d-l@b

Design Lab

PMR 5237
Modelagem e Design de Sistemas Discretos

Aula 3

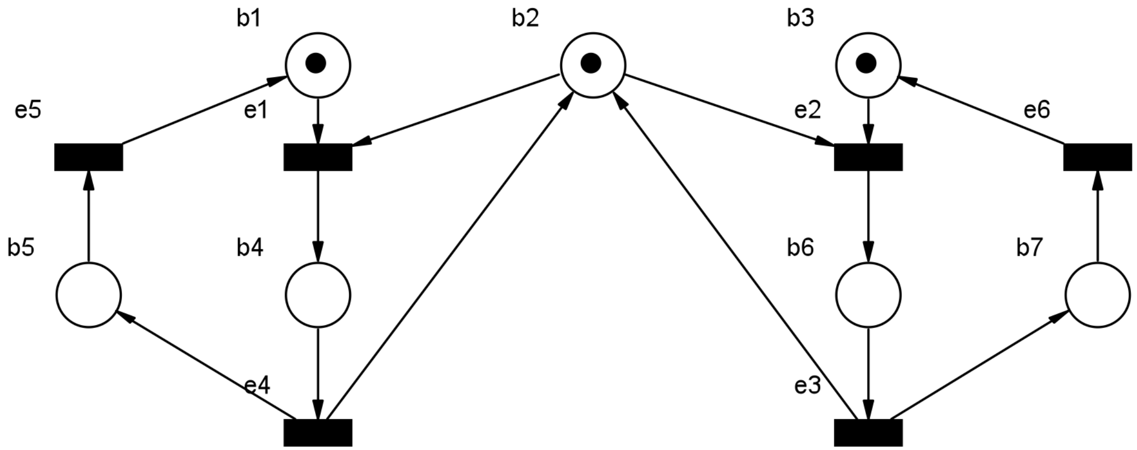
Prof. Dr. José Reinaldo Silva
reinaldo@usp.br

Escola Politécnica da USP

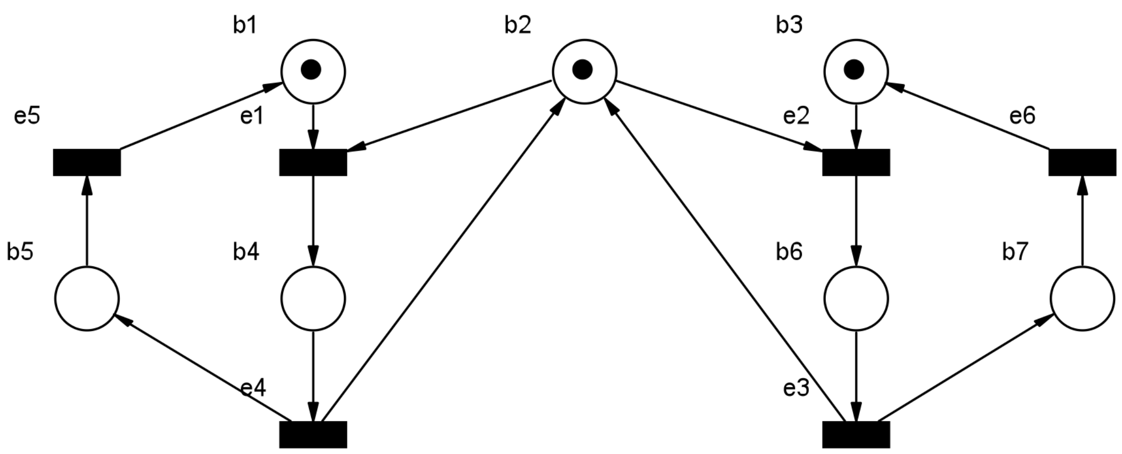
MECATRÔNICA

Comentários sobre a lista

Exercício 3:



Trata-se de uma rede normal, sem loops e portanto a equação de estado pode ser plenamente determinada.



A marcação corrente é

$$M=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad (1)$$

Um algoritmo para determinar o vetor de habilitação pode ser especificado do seguinte modo:

- verificar a independencia das transições duas a duas, tomando o produto direto entre os vetores coluna da matriz A^T(ou as linhas da matriz A);
- determinar o conjunto de passos admissiveis do resultado acima;
- determinar, para a marcação corrente, quais as transições habilitadas e o vetor de habilitação.

Da matriz

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é possivel ver que

$e_1 \cdot e_2 = 1$, $e_1 \cdot e_3 = -1$, $e_1 \cdot e_4 = -2$, $e_1 \cdot e_5 = -1$, $e_1 \cdot e_6 = 0$;

$e_2 \cdot e_3 = -2$, $e_2 \cdot e_4 = -1$, $e_2 \cdot e_5 = 0$, $e_2 \cdot e_6 = -1$;

$e_3 \cdot e_4 = 1$, $e_3 \cdot e_5 = 0$, $e_3 \cdot e_6 = -1$;

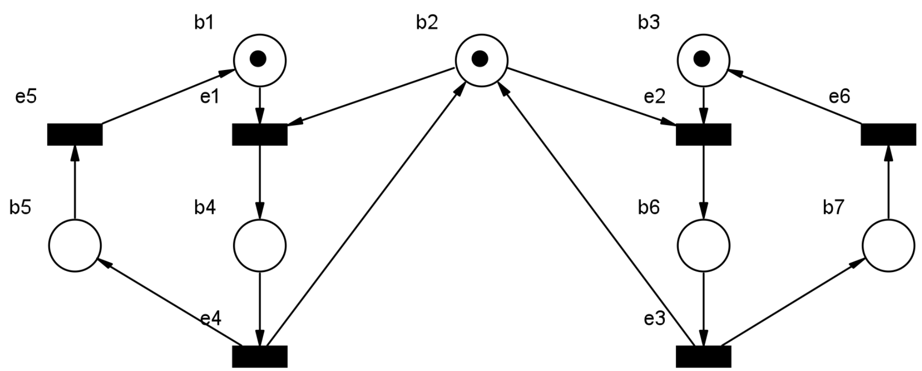
$e_4 \cdot e_5 = -1$, $e_4 \cdot e_6 = 0$;

$e_5 \cdot e_6 = 0$.

os passos admissiveis são dados pelo conjunto de transições independentes duas a duas, que no caso se restringe a,

$\{e_1, e_6\}$, $\{e_2, e_5\}$, $\{e_3, e_5\}$, $\{e_4, e_6\}$, $\{e_5, e_6\}$

Análise da estrutura da rede



Se o produto escalar é nulo, isto é, se os vetores são ortogonais, então estes representam transições independentes. Se o produto escalar é negativo então as transições estão em contato, se for positivo então há um conflito.

$e_1 \cdot e_2 = 1,\ e_1 \cdot e_3 = -1,\ e_1 \cdot e_4 = -2,\ e_1 \cdot e_5 = -1,\ e_1 \cdot e_6 = 0;$

$e_2 \cdot e_3 = -2,\ e_2 \cdot e_4 = -1,\ e_2 \cdot e_5 = 0,\ e_2 \cdot e_6 = -1;$

$e_3 \cdot e_4 = 1,\ e_3 \cdot e_5 = 0,\ e_3 \cdot e_6 = -1;$

$e_4 \cdot e_5 = -1,\ e_4 \cdot e_6 = 0;$

$e_5 \cdot e_6 = 0.$

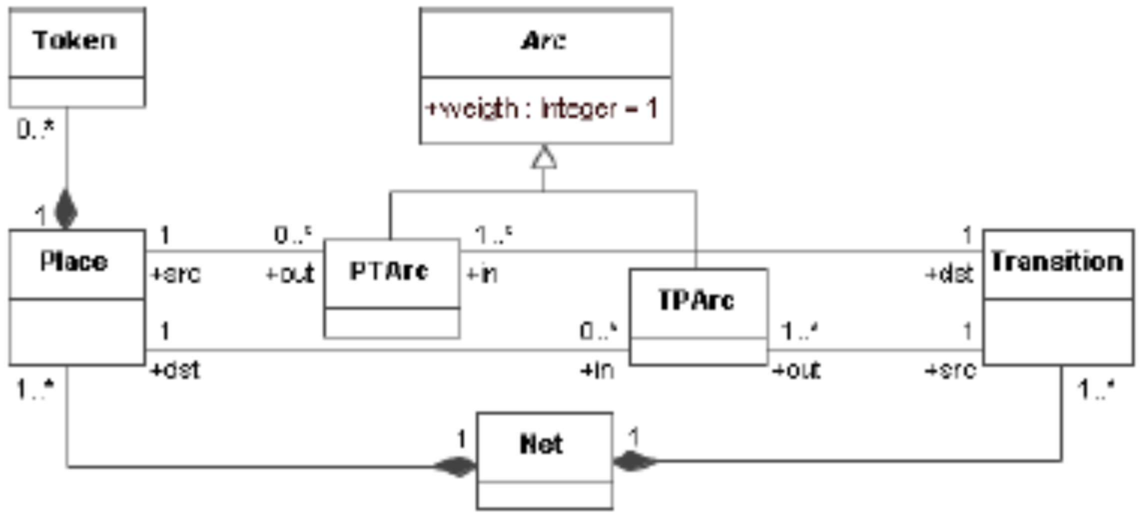
A marcação M habilita somente os estados $\{e_1, e_2\}$ que não constituem um passo - ao contrario estão em conflito - portanto somente uma destas transições poderá ocorrer, digamos e_1, e o vetor de habilitação neste estado é o seguinte,

$$\sigma_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A aula passada

Meta-modelo da rede de Petri

μ_5 :



Wachmuth, G.; Metamodel Adaptation and Model Co-adaptation, Atlantic Modeling (AtlanMod), INRIA, Nantes, France, http://www.emn.fr/z-info/atlanmod/index.php/Emfatic#KDM_1.0

Sistema Elementar

A rede definida anteriormente tem apenas uma estrutura ou esquema.

Para associar uma rede a um sistema dinâmico devemos incluir ainda um estado inicial, compondo assim um sistema elementar.

Definição de Sistema Elementar

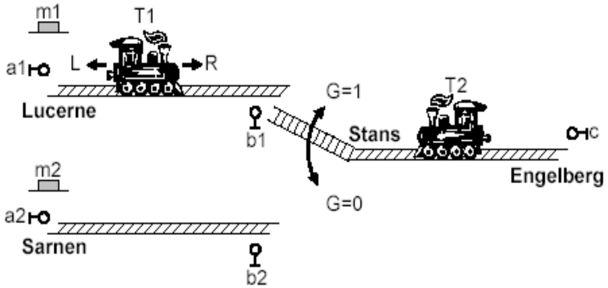
Um sistema elementar é definido como uma quádrupla $N=(S,T;F, c_0)$ onde $(S,T;F)$ é uma rede como definido anteriormente.

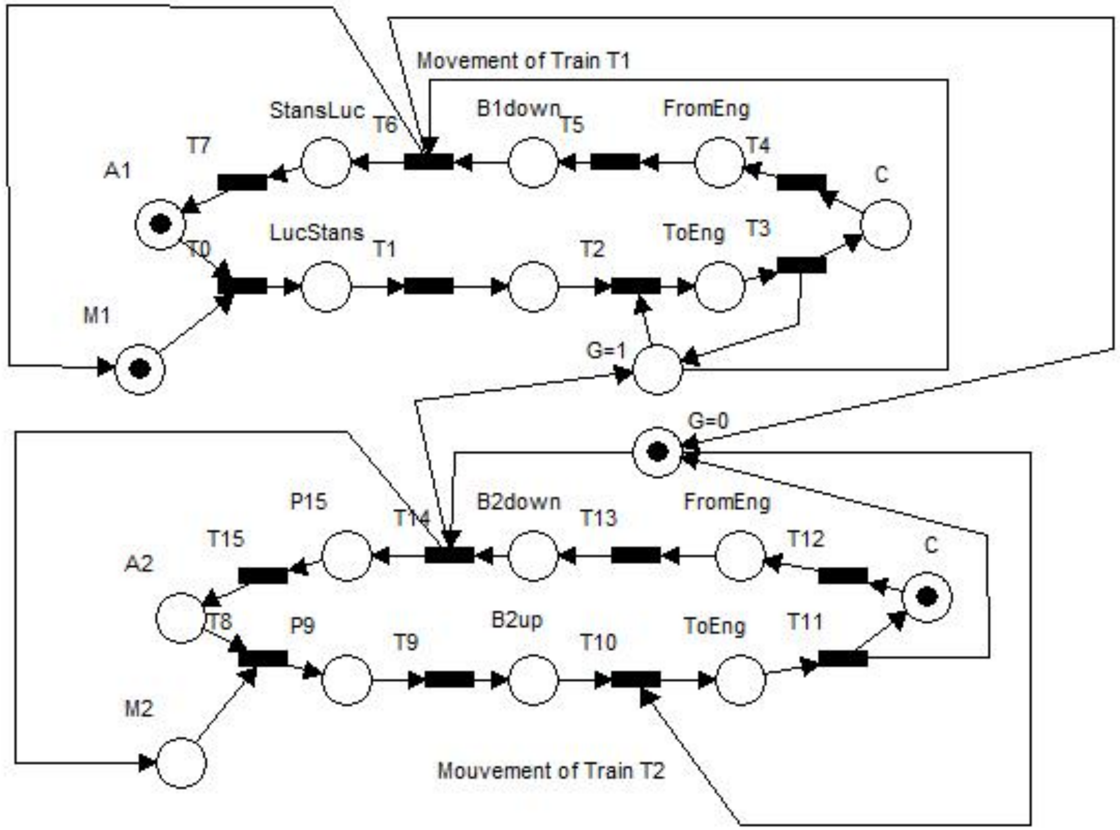
O conjunto de estados que este sistema admite está determinado pela escolha do case inicial c_0 e é denotado por $\mathcal{C}_N = | \, c_0 \rangle$, que é o conjunto de cases gerados por c_0.

Escola Politécnica da USP

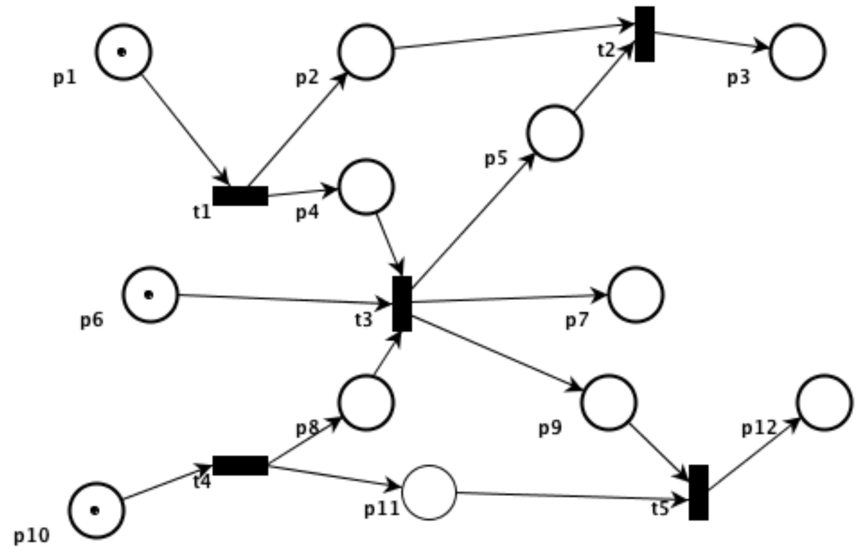
MECATRÔNICA

Simetria e Indistinguibilidade das marcas





Largada na F1: simetria

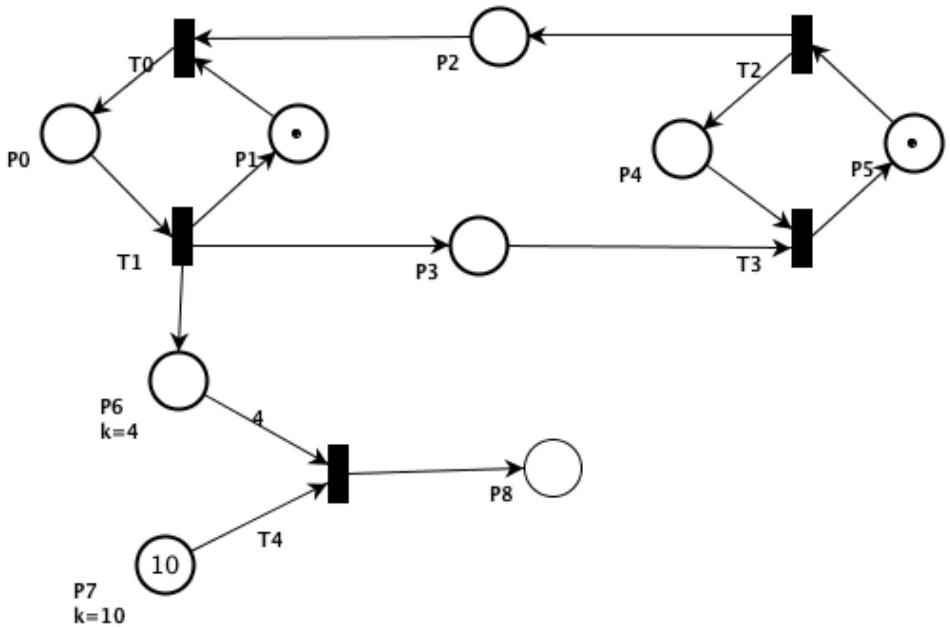


p_1= carro A: preparando-se para começar;
p_2= carro A: esperando o sinal de largada;
p_3= carro A: correndo;
p_4= sinal de prontidão do carro A enviado;
p_5= sinal de largada para o carro A enviado;
p_6= operador: esperando sinal de prontidão dos pilotos;
p_7= operador: sinal de largada enviado;
p_8= sinal de prontidão do carro B enviado;
p_9= sinal de largada para o carro B enviado;
p_{10}= carro B: preparando-se para começar;
p_{11}= carro B: esperando o sinal de largada;
p_{12}= carro B: correndo;

t_1 = carro A: envia sinal de prontidão
t_2 = carro A: acelera
t_3 = operador: manda sinal de largada
t_4 = carro B: envia sinal de prontidão
t_5 = carro B: acelera

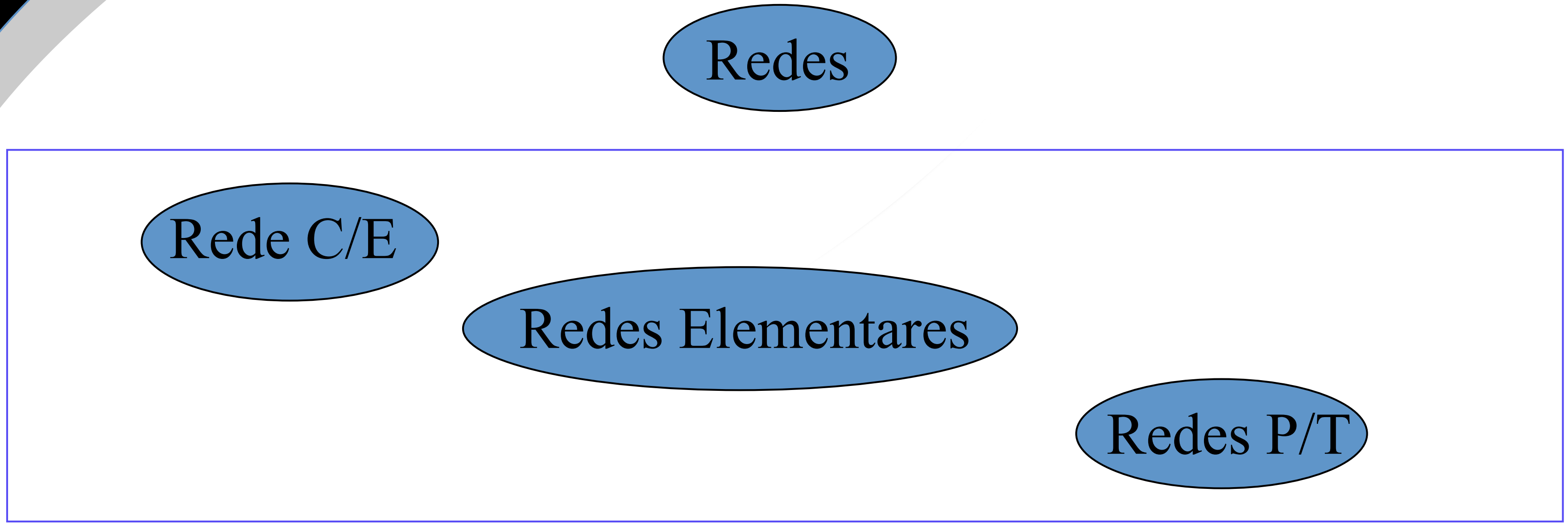
Produtor/Consumidor/ Empacotador

Vamos agora rever a rede do exerício 2 da primeira lista com o sistema elementar produtor/consumidor. Vamos imaginar que agora queremos introduzir o empacotamento, que agrupo quatro ítens em uma caixa. O novo sistema dispõe inicialmente de 10 caixas. Obviamente este não pode mais ser um sistema elemetar.



Escola Politécnica da USP

Especto das Redes Clássicas



?

Redes Clássicas

Para as redes de Petri clássicas, a análise de comportamento dos sistemas (discretos, distribuídos) é baseada em propriedades como:

Deadlock-freedon (ausência de deadlock) – a rede não atinge um deadlock total
Liveness (vivacidade) – a rede não atinge uma situação de deadlock parcial
Boundness (limitação) - nenhum lugar tem marcação monotonicamente crescente
Reversibility (reversibilidade) – o estado inicial é alcançável de qualquer marcação

Coverability Tree

O Sistema Elementar

Uma determinada classe de redes de Petri é caracterizada pela definição dos seus elementos constituintes e por sua estrutura estática, por um lado, e por suas regras de disparo, ou dinâmica, por outro.

Note-se entretanto que, subjacente à definição dos elementos, e em especial dos elementos estáticos, está a definição da classe de estados, isto é, dos estados admissíveis do sistema.

Seja um sistema elementar $N = (P, T, F, C_{in})$, podemos definir como a rede subjacente ao sistema N, ou simplesmente $und(N)$, à rede (P, T, F), que também é chamada de estrutura de N. Note-se que a classe de estados definida por N e por $und(N)$ é basicamente diferente.

Sistema Sequenciais

Sistema elementar sequencial

Def. 14] Seja um sistema elementar $N = (P, T, F, C_{in})$. Este sistema é dito sequencial se e somente se,

i) $|C_{in}| = 1$, e

ii) $\forall C \in |C_{in}\rangle, |C| = 1$.

Def. 15] Seja um sistema elementar $N = (P, T, F, C_{in})$. Este sistema é dito uma máquina de estados se e somente se $\forall t \in T, |\bullet t| = |t \bullet| = 1$.

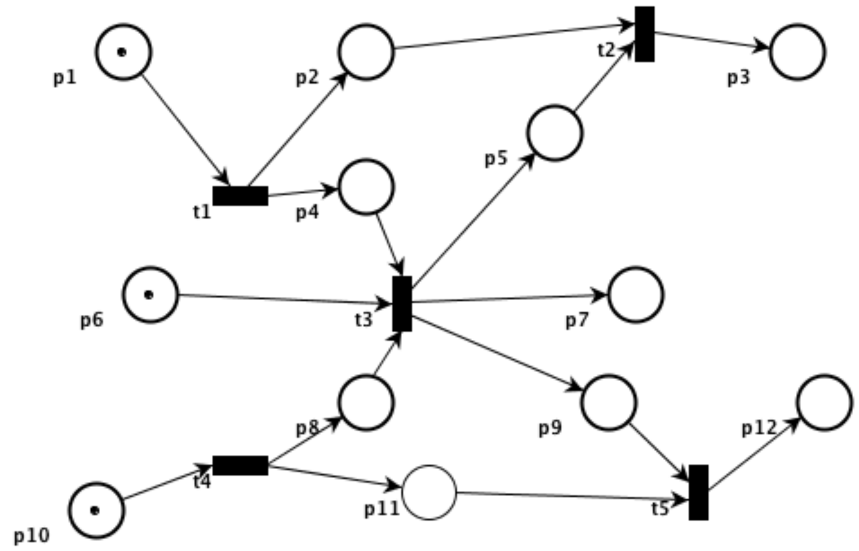
Sub-classes das redes elementares

Def. 16] Seja um sistema elementar $N = (P, T, F, C_{in})$. Este sistema é dito um grafo marcado se e somente se $\forall p \in P, |\bullet p| = |p\bullet| = 1$.

Def. 17] Seja um sistema elementar $N = (P, T, F, C_{in})$. Este sistema é dito uma rede *free choice* se e somente se $\forall p \in P, |p\bullet| \leq 1 \, ou \, \bullet(p\bullet) = \{p\}$.

Desel, J. and Esparza, J.; Free Choice Nets, Cambridge University Press, 1995.

Largada na F1: simetria



p_1= carro A: preparando-se para começar;
p_2= carro A: esperando o sinal de largada;
p_3= carro A: correndo;
p_4= sinal de prontidão do carro A enviado;
p_5= sinal de largada para o carro A enviado;
p_6= operador: esperando sinal de prontidão dos pilotos;
p_7= operador: sinal de largada enviado;
p_8= sinal de prontidão do carro B enviado;
p_9= sinal de largada para o carro B enviado;
p_{10}= carro B: preparando-se para começar;
p_{11}= carro B: esperando o sinal de largada;
p_{12}= carro B: correndo;

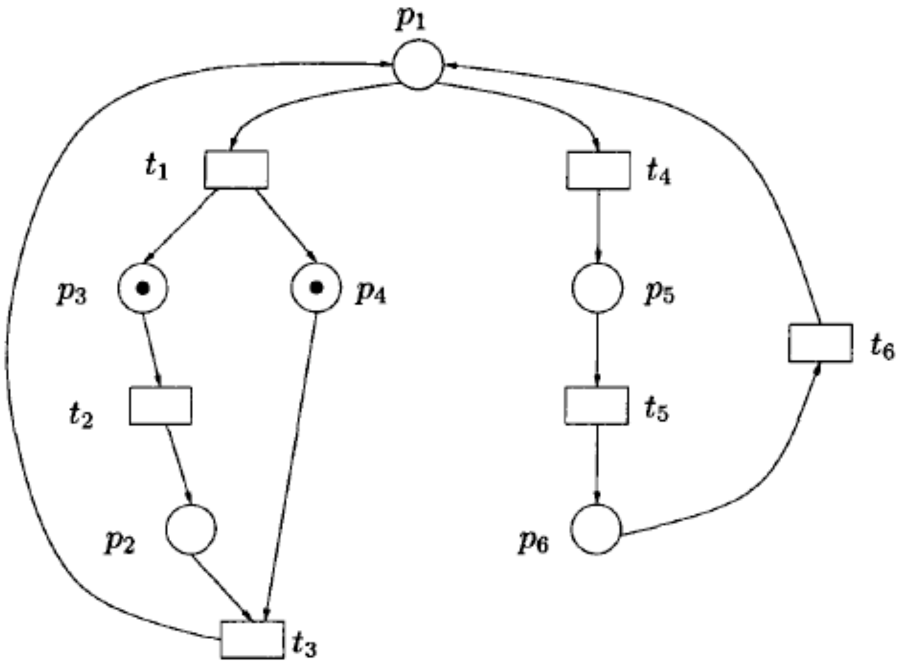
t_1 = carro A: envia sinal de prontidão
t_2 = carro A: acelera
t_3 = operador: manda sinal de largada
t_4 = carro B: envia sinal de prontidão
t_5 = carro B: acelera

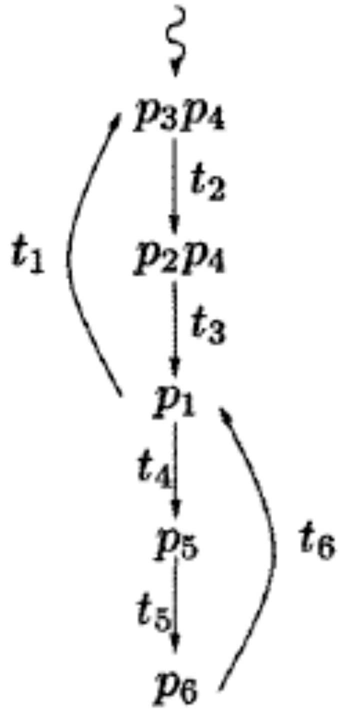
Escola Politécnica da USP

MECATRÔNICA

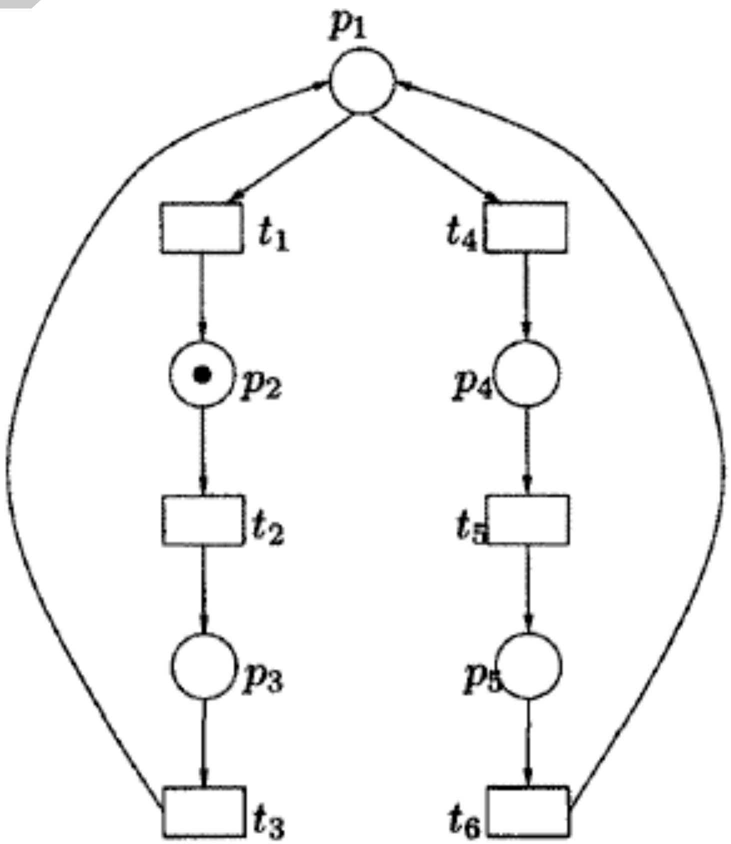
Exemplos

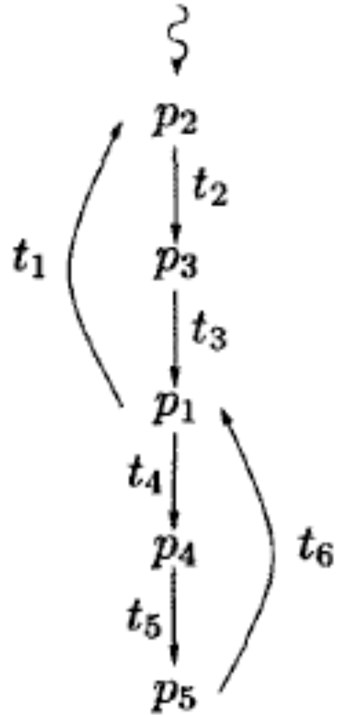
A que sub-classe pertence esta rede?





Exemplos





Redes Lugar/Transição (P/T)

- número irrestrito (w) de marcas em cada lugar
- relações de fluxo não unitárias (peso dos arcos)
- determinação de capacidade dos lugares (> 1)
- indistinguibilidade das marcas
- geração de estados à partir de um estado inicial

Redes elementares → **Redes P/T**

Decidibilidade

Vários trabalhos mostram que o problema da atingibilidade de um dado estado é decidível.

J. Esparza, Decidability and Complexity of Petri Nets Problems:An Introduction. Advanced Courses in Petri Nets, 1998, in Lecture Notes in Comp. Science 1491, Lectures in Petri Nets : Basic Models.

Referências

Murata, Tadao; Petri Nets: Properties, Analysis and Applications, Proceedings of the IEEE, no. 4, Vol. 77, April, 1989

Reisig, W.; Petri Nets: An Introduction, Springer-Verlag, 1988.

Desel, J., Reisig, W.; Place/Transition Nets, Lect. Notes in Computer Science, 1491, 1998.

Distinguibilidade das marcas

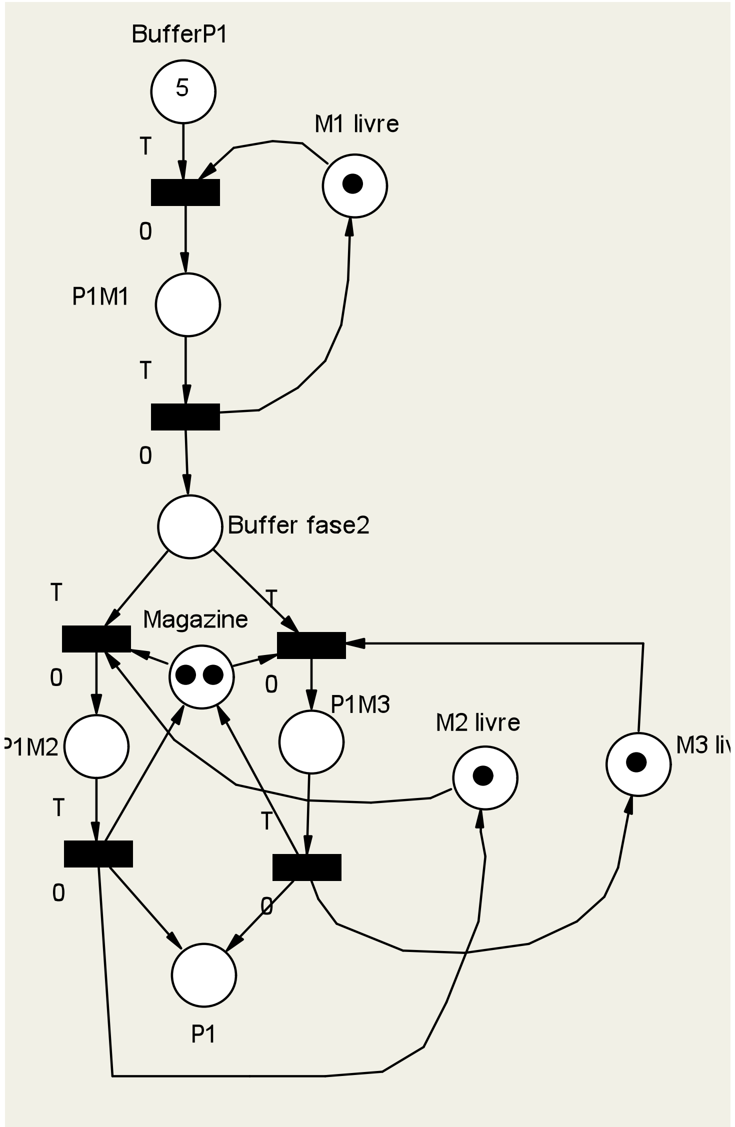
Sejam dois lotes de peças com seqüenciamento de processos distintos, e três máquinas, M1, M2 e M3 onde as duas últimas compartilham o mesmo magazine de ferramentas e executam os mesmos processos:

P1 ≡ M1; (M2 ∨ M3)

P2 ≡ (M2 ∨ M3); M1

Fabricação de P1

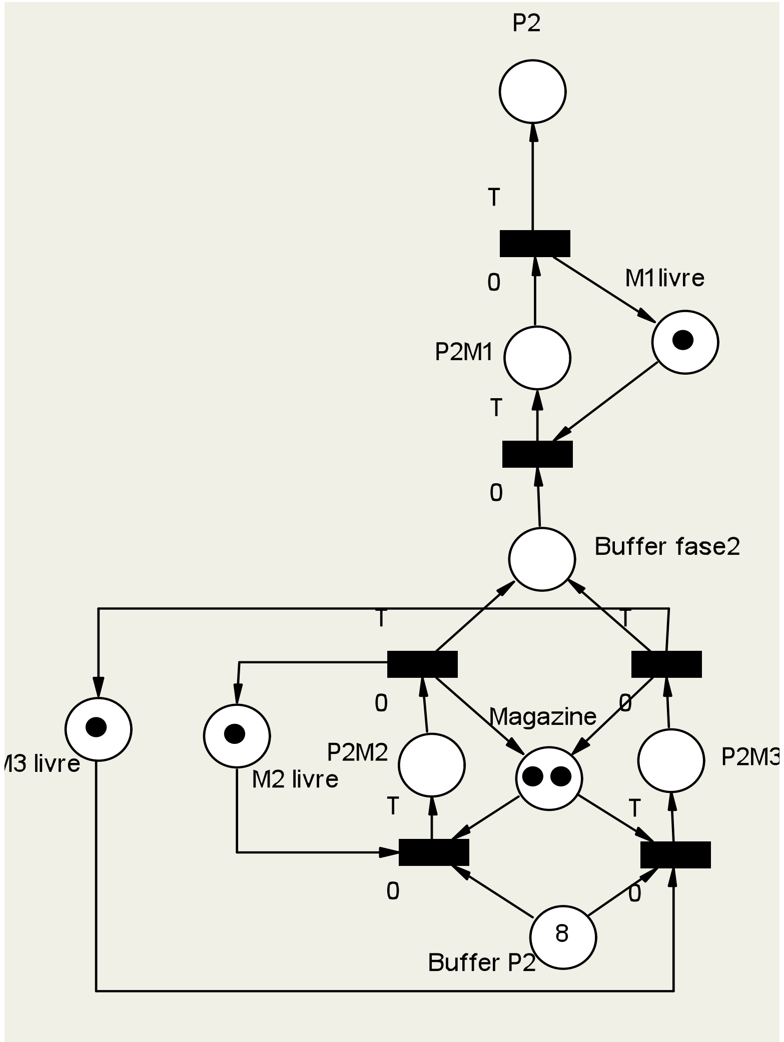
HPSIM



Escola Politécnica da USP

Fabricação de P2

HPSIM

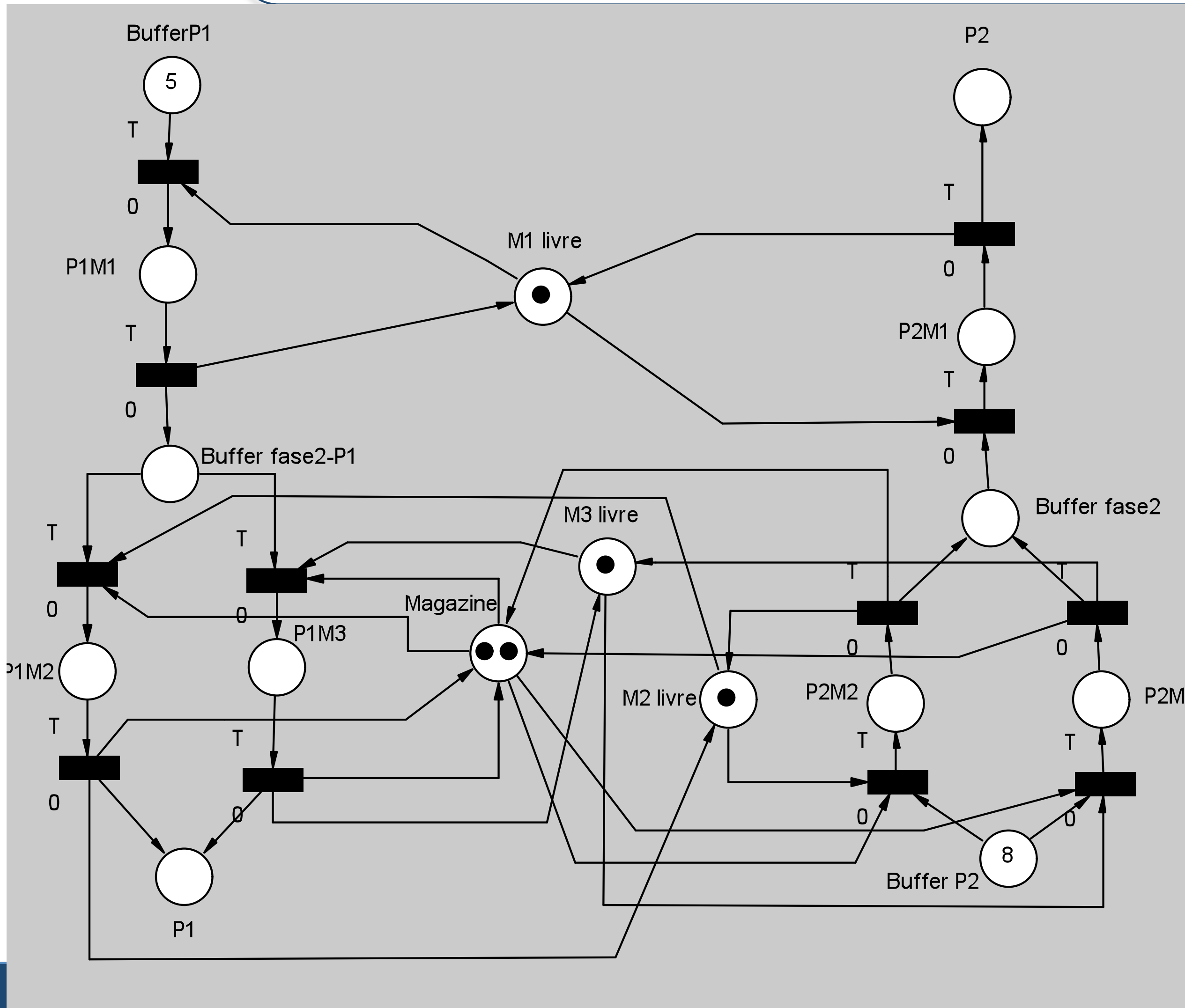


Escola Politécnica da USP

MECATRÔNICA

Fabricação de P1 e P2

HPSIM



Formalização das redes P/T

Uma rede P/T é uma tupla $N=(S,T;F, W, K, M_0)$ onde

i) S é um conjunto finito de lugares;
ii) T é um conjunto finito de transições;
iii) $F = (S \times T) \cup (T \times S)$ são relações de fluxo (arcos);

iv) $W : F \rightarrow N^+$, é um mapeamento que representa o peso dos arcos (quantidade de marcas que pode fluir pelos arcos);

v) $K : S \rightarrow N^+ \cup \{\omega\}$, é um mapeamento que representa a capacidade dos lugares;
v) $M_0 : S \rightarrow N \cup \{\omega\}$ é um mapeamento que associa a cada lugar uma marcação.

Regra de Disparo

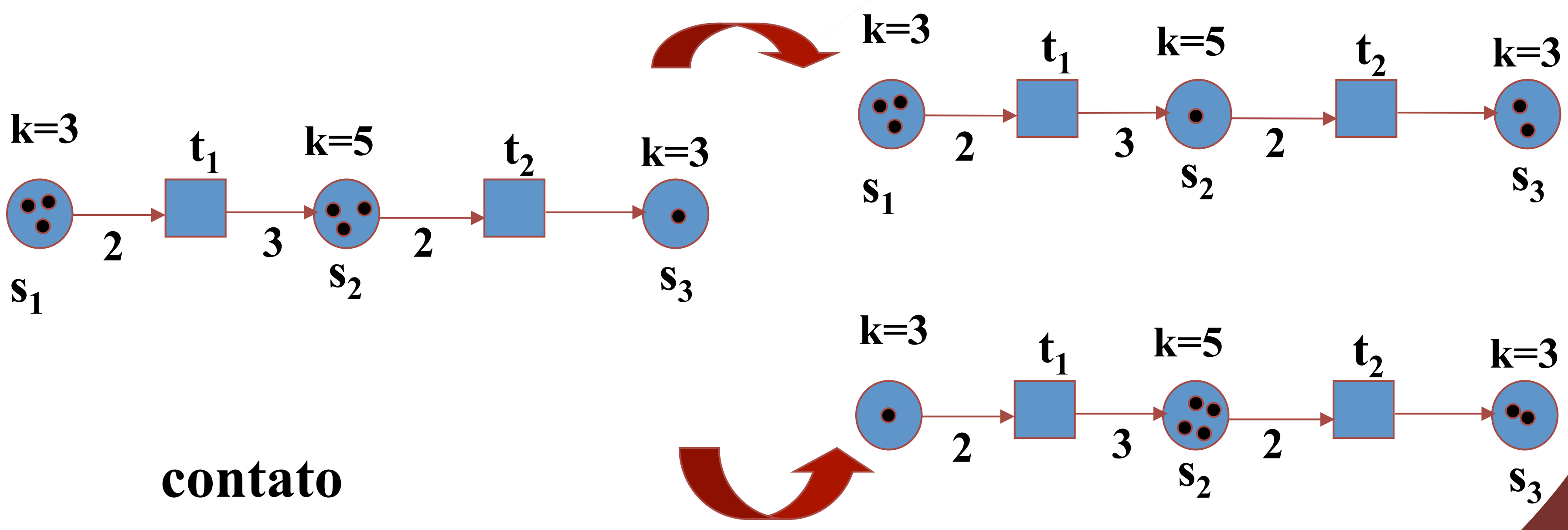
Def. 18] Uma rede é dita *k*-limitada se e somente se existe um número natural k tal que $\forall\, s \in S$, $M(s) \leq k$, onde M é a função de marcação da rede em qualquer instante. Este inteiro *k* é também chamado de capacidade máxima de *s*, ou K(*s*).

Def.19] Uma transição *t* é dita habilitada se e somente se,
$\forall\, s \in {}^{\bullet}t$. $M(s) \geq W(s,t)$ e $\forall\, s \in t^{\bullet}$. $W(t,s) \leq K(s) - M(s)$

A Def.19 é chamada de condição de disparo estrita, e é aplicada a redes onde K (s) é limitado, isto é, redes de capacidade finita.

Contato em Redes P/T

Uma rede P/T é dita de capacidade infinita sse $\forall\ s \in S, K(s)=\omega$.



Rede Dual

Def 20] Dada uma rede P/T **N=(S,T;F, W, K, M$_0$),** definiremos como sendo o sistema **N'**, S-completo em relação a **N**, uma rede P/T **N'=(S',T';F', W', M$_0$')** onde

i)

$$S' = S \cup \overline{S}, \text{onde } \overline{S} \text{ é o dual de } S, \text{isto é,}$$
$$\overline{S} = \{\overline{s} \mid \forall s \in S.(\exists | \overline{s}.({}^{\bullet}s = \overline{s}^{\bullet}) \wedge (s^{\bullet} = {}^{\bullet}\overline{s}) \text{ e}$$
$$M(\overline{s}) = K(s) - M(s)\}$$

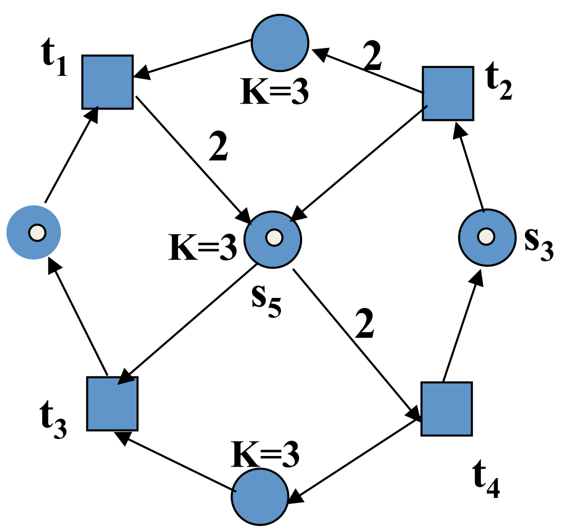
***ii)* T'=T;**

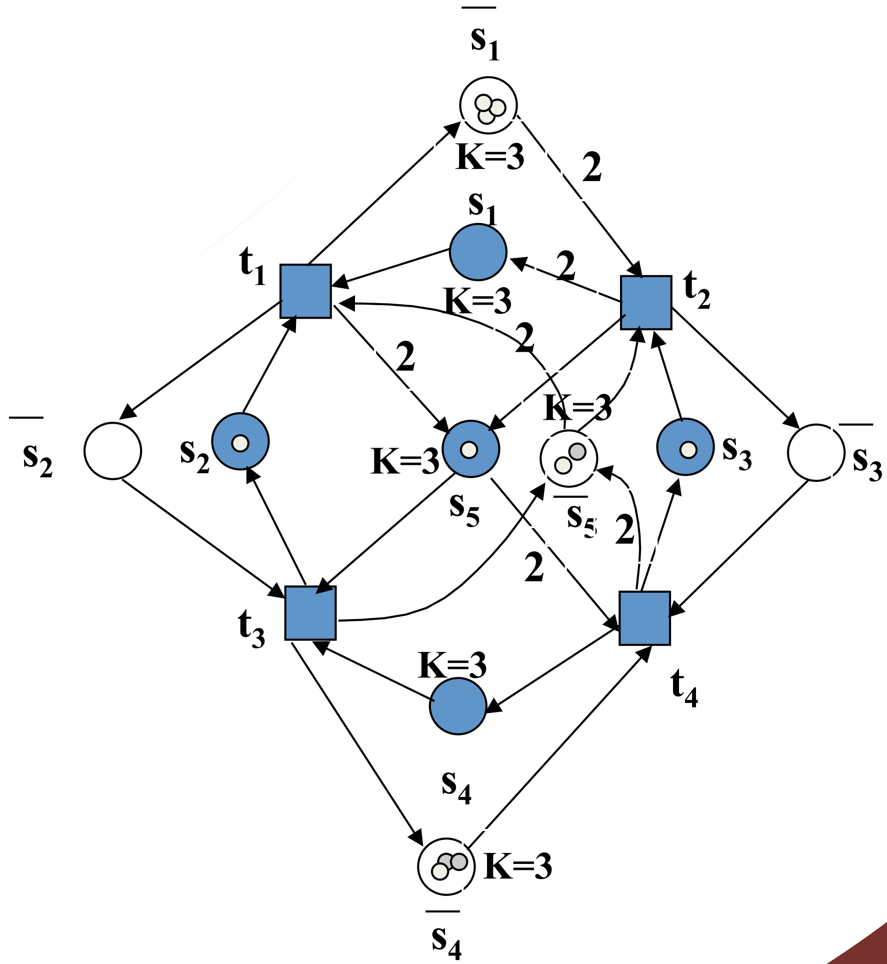
iii)

$$F' = F \cup \overline{F}, \text{ onde}$$
$$\overline{F} = \{(t,\overline{s}) \mid t \in T \wedge [w(t,\overline{s}) = w(s,t)]\} \cup$$
$$\{(\overline{s},t) \mid t \in T \wedge [w(\overline{s},t) = w(t,s)]\}$$

***iv)* M$_0$'= M$_0$(s) ∪ M$_0$($\overline{s}$)**

Transformação dual





Def.21] Seja uma rede P/T N=(S,T;F, W, K, M_0). Define-se uma regra de transição fraca sobre N, se uma transição *t* é dita habilitada se e somente se $\forall\, s \in {}^{\bullet}t \,.\, M(s) \geq W(s,t)$.

Uma regra de transição fraca é sempre aplicável a uma rede de capacidade infinita.

Teorema 3] Seja uma rede P/T de capacidade finita (N, M_0) onde se aplica a regra de disparo estrita. Seja (N', M_0') a rede dual de (N, M_0) onde se aplica a regra de transição fraca. Estas duas redes são funcionalmente equivalentes, isto é, os seus respectivos grafos de atingibilidade são isomorfos.

Dem] exercício

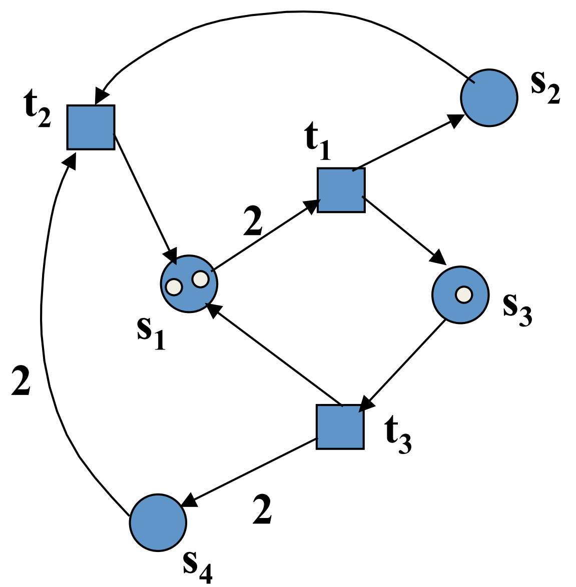
Proposição 2] Para toda análise de rede Place/Transition é possível utilizar a regra de transição fraca, dado que toda rede de capacidade finita, onde se pode aplicar a regra de disparo estrita, é de fato equivalente à sua rede dual onde se pode aplicar a regra de transição fraca.

Representação Algébrica e Propriedades

As redes P/T podem ser consideradas uma generalização das redes Elementares, na medida que estas podem ser consideradas uma rede particular P/T onde a capacidade dos lugares é unitária, assim como o peso dos arcos. Portanto, vamos considerar a representação algébrica destas redes como um caso geral, bem como a análise de propriedades importantes com os invariantes.

Matriz de incidência

Uma rede de Petri pode ser representada por sua matriz de incidências. Seja a rede supostamente ilimitada abaixo,

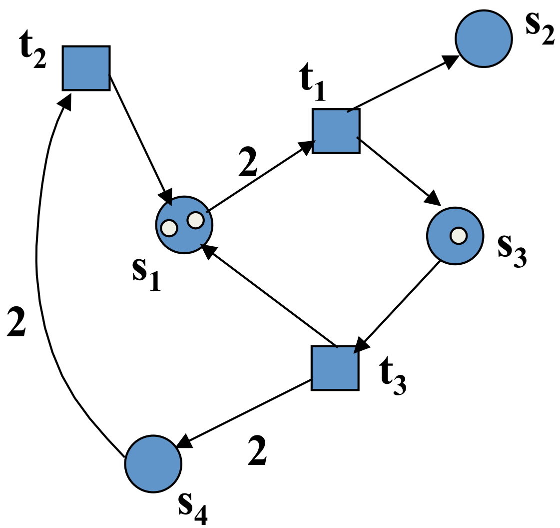


$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array}
\end{array}
$$

O Vetor de habilitação

$$\sigma_{i,1} = \begin{cases} 1, & \text{se a transição } t_i \text{ está habilitada} \\ 0, & \text{se } t_i \text{ não está habilitada} \end{cases}$$

Equação de Estado



$$\boxed{M_{i+1} = M_i + A^T \sigma_i}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc|c} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array}$$

Escola Politécnica da USP

MECATRÔNICA

Aplicando-se a relação recursivamente,

$$\mathbf{M}_{i+1} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{A}^T \sum_{j=0}^{i} \sigma_j$$

Escola Politécnica da USP

MECATRÔNICA

A condição necessária para que um da estado de marcas M_{i+1} seja atingível a partir de M_0 é que exista uma soma de vetores de habilitação tal que,

$$\mathbf{A}^T \sum_{j=0}^{i} \sigma_j = \mathbf{A}^T \overline{\sigma} = \mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_0 = \Delta\mathbf{M}$$

Escola Politécnica da USP

MECATRÔNICA

Multiplicando a equação de estado por uma matriz B_f temos que,

$$\mathbf{B}_f \mathbf{A}^T \overline{\sigma} = \mathbf{B}_f \Delta\mathbf{M} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{B}_f^T)^T \overline{\sigma} = \mathbf{B}_f \Delta\mathbf{M}$$

$B_f\Delta M = 0$ determina as soluções da equação homogênea.

Neste caso B_f é uma ponderação na distribuição das marcas tal que estas se conservam na evolução de M_0 a M_{i+1}.

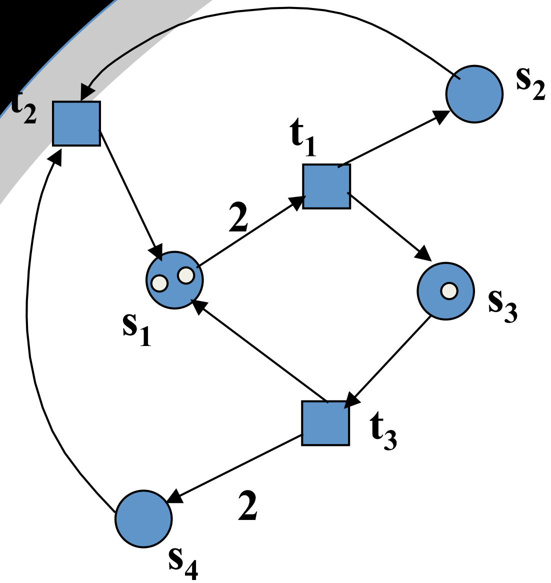
Neste caso, uma solução direta é que $AB_f^T=0$, e os vetores de B_f^T são chamados de S-invariantes.

Determinando B_f

$$\begin{array}{ccl} & \begin{array}{cc} \text{m-r} & \text{r} \end{array} & \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{r} \\ \text{n-r} \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{B}_f = [\mathbf{I}_{m-r} : -\mathbf{A}_{11}^T(\mathbf{A}_{12}^T)^{-1}]$$

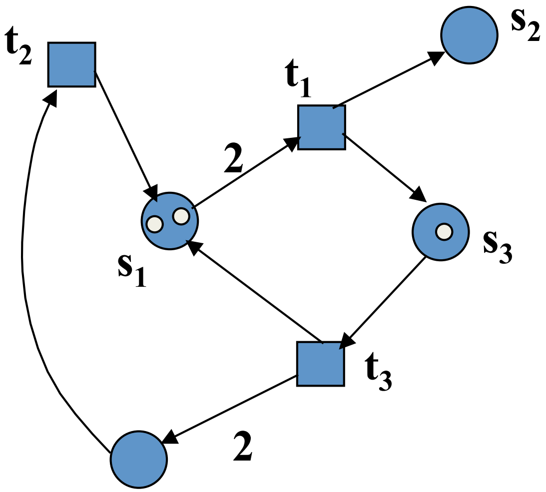
Exemplo :



$$\mathbf{B}_f = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} s_1 & \quad s_2 & \quad s_3 & \quad s_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array}$$



$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \underset{t_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} \underset{t_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \underset{t_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \underset{t_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}3\\0\\0\\2\end{pmatrix} \underset{t_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \underset{t_3}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\4\end{pmatrix} \underset{t_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}3\\0\\0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \ldots$$

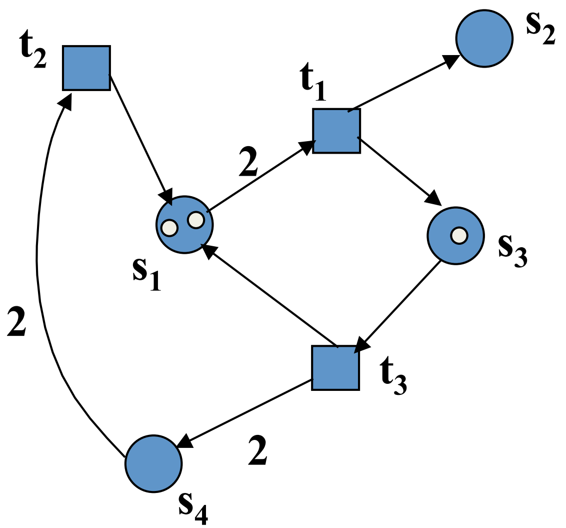
Voltando à equação de estado

$$\mathbf{A}^T \sum_{j=0}^{i} \sigma_j = \mathbf{A}^T \overline{\sigma} = \mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_0 = \Delta\mathbf{M}$$

Podemos agora selecionar os ciclos, isto é, estados e sequências de disparo tais que ΔM=0.

À soma dos vetores de habilitação que caracterizam este processo chamamos de T-invariante.

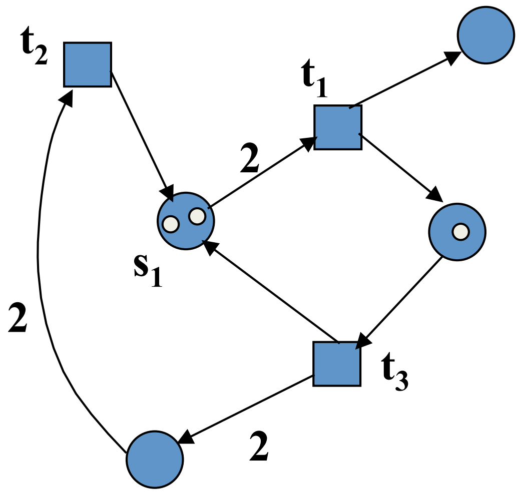
Exemplo :



$$
\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$x = y = z$$

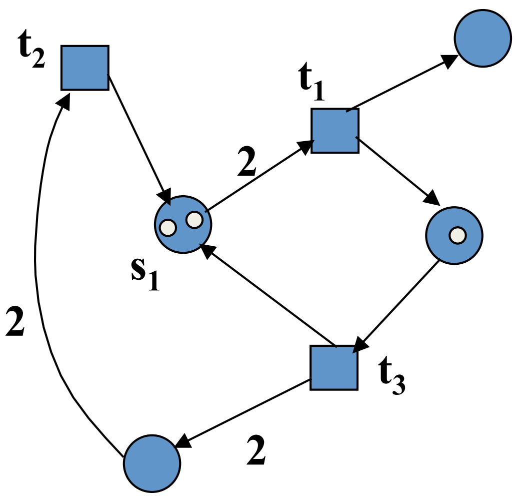
$$
\begin{array}{c} \\ \mathbf{A} = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array}
$$



$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \overset{t_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} \overset{t_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \overset{t_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \overset{t_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}3\\0\\0\\2\end{pmatrix} \overset{t_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \overset{t_3}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\4\end{pmatrix} \overset{t_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}3\\0\\0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \ldots$$

O processo $t_1\ t_3\ t_2$ gera ciclos invariantes em estados diferentes, como mostrado anteriormente.



$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ e } \sigma_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{3} \sigma_i = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ é um T-invariante}$$

em M_0

Leitura da semana

Murata, Tadao; Petri Nets: Properties, Analysis and Applications, Proceedings of the IEEE, no. 4, Vol. 77, April, 1989.

Fim

Escola Politécnica da USP

MECATRÔNICA