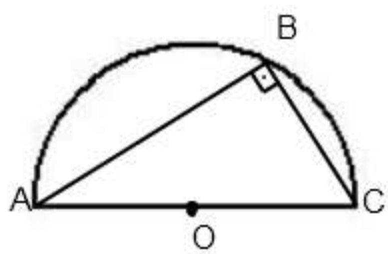
6. Trigonometria

Introdução

A palavra trigonometria tem origem no grego *trigonos* (triângulo) + *metrum* (medida). Pode-se dizer que, etimologicamente, significa medida de triângulo.

Um dos objetivos da trigonometria é estudar as relações entre os lados e ângulos de um triângulo e logo foi vista como a resposta às necessidades da astronomia, da navegação, da cartografia e da topografia.

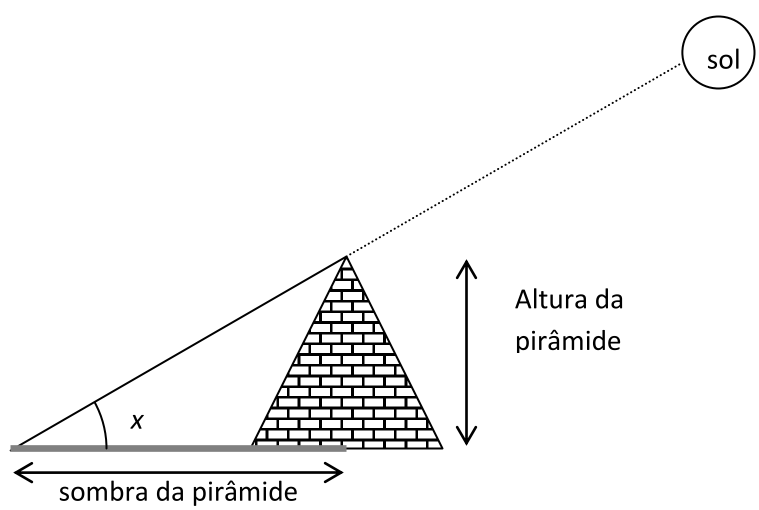
Tales (624-548 a.C.) foi considerado um homem de rara inteligência, o primeiro filósofo e o primeiro dos sete sábios. Organizou a geometria de forma dedutiva e, durante uma viagem à Babilônia, concebeu e demonstrou o teorema que leva o seu nome, segundo o qual um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto.



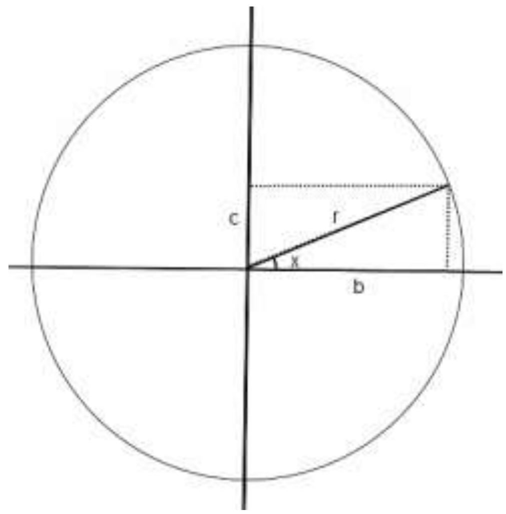
O fato histórico pelo qual ele é sempre lembrado é o de ter medido a altura da pirâmide de Quéops, no Egito, através da semelhança de dois triângulos. Observou as sombras e os raios solares e descobriu que a sombra de uma estaca qualquer, fincada perpendicularmente ao solo, era proporcional à sombra da pirâmide.

Teste: Suponha que Tales tivesse uma estaca com 0,75 m e as sombras da estaca e da pirâmide fossem, respectivamente, 1,5 m e 274 m. Determine a altura de Quéops.

Desafio: Você é capaz de determinar, aproximadamente, o ângulo x da figura ao lado a partir dos dados obtidos por Tales?



O pensamento de Tales evoluiu com o passar do tempo e com isso passou-se a usar os seguintes parâmetros para a geometria de um círculo:



Os segmentos *c* e *b* da figura acima passaram a ser reconhecidos como projeções do raio *r* no eixo das ordenadas (vertical) e no eixo das abscissas (horizontal). A relação entre *c*, *b* e *r* é definida pelo teorema de Pitágoras

$$c^2 + b^2 = r^2 \tag{1.1}$$

Com o desenvolvimento de novos pensamentos matemáticos, os valores de c e b foram definidos da seguinte maneira:

$$b = r \cdot \cos(x)$$
$$c = r \cdot \mathrm{sen}(x)$$

Assim, 1.1 ficou determinada como:

$$(r\,.\mathrm{sen}(x))^2 + (r\,.\cos(x))^2 = r^2 \tag{1.2}$$

logo,

$$r^2\,\mathrm{sen}^2(x) + r^2\cos^2(x) = r^2$$

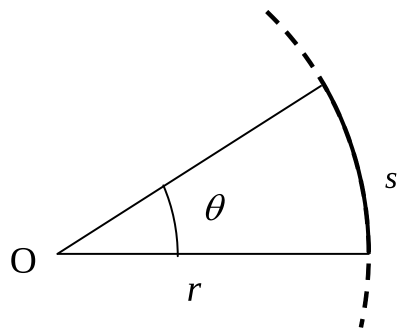
$$sen^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{1.3}$$

(1.3) é uma relação trigonométrica fundamental e utilizada frequentemente para determinar o seno de um ângulo quando se conhece o cosseno e vice-versa. Como pudemos verificar, esta igualdade independe das dimensões do triângulo retângulo ao qual pertence o ângulo x.

Círculo Trigonométrico

Define-se que o círculo trigonométrico tem raio igual a 1. Agora, precisamos escolher uma unidade de medida de ângulo plano, que, no SI, é o radiano.

A medida do ângulo em radianos



Para explicar como se mede um ângulo em radianos, apresentamos na figura ao lado a geometria da medida de um ângulo. A linha curva tracejada representa um arco de uma circunferência de raio *r* com origem na interseção das duas retas que definem o ângulo θ. Essa interseção das retas foi designada por O na figura. O arco de circunferência delimitado pelas duas retas, em linha cheia, foi chamado de *s*. Dizemos que a medida do ângulo em radianos é

$$\theta = \frac{s}{r}\ .$$

Assim, uma volta inteira, que corresponde a 360º, vale, em radianos,

$$\text{volta inteira} = \frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi\ .$$

Dessa maneira descobrimos que, para transformar a medida de um ângulo em graus para radianos, basta calcular

$$\theta_{rad} = 2\pi \cdot \frac{\theta_{graus}}{360^o}$$

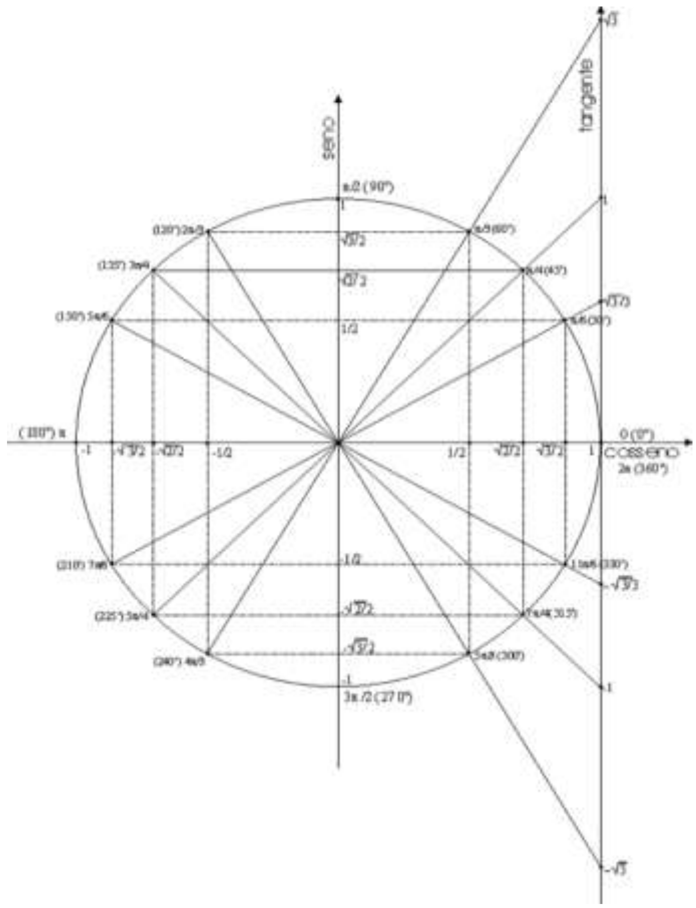
A tabela ao lado apresenta os valores em radianos dos ângulos mais usados.

Note também que, no círculo trigonométrico, como o raio é 1, a medida do arco é igual à do ângulo em radianos.

ângulos mais comuns	
graus	radianos
30º	$\pi/6$
45º	$\pi/4$
60º	$\pi/3$
90º	$\pi/2$
180º	π
270º	$3\pi/2$
360º	2π

Inserindo o círculo trigonométrico no plano cartesiano, o eixo das ordenadas (y) representa o valor do sen(θ), variando em função de θ. O mesmo ocorre com o valor de cos(θ) representado no eixo das abscissas (x).

Abaixo, segue uma figura representativa deste círculo.



Podemos, com os dados da figura acima, determinar os valores do seno, cosseno e tangente de alguns ângulos, que estão na tabela abaixo,

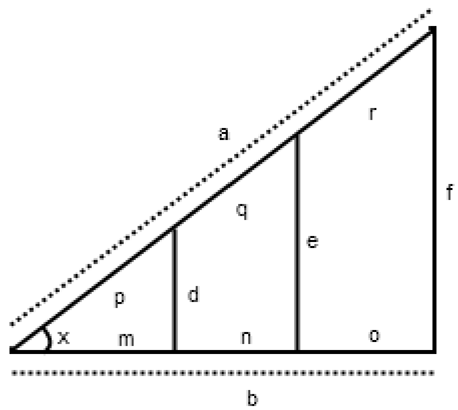
	Seno	Cosseno	Tangente
0 rad	0	1	0
$\pi/6$ rad	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$ rad	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$ rad	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$ rad	1	0	não existe

Função seno

Dado um triângulo retângulo com um de seus ângulos internos igual a θ, define-se sen(θ) como a razão entre o cateto oposto a θ e a hipotenusa desse triângulo, ou seja:

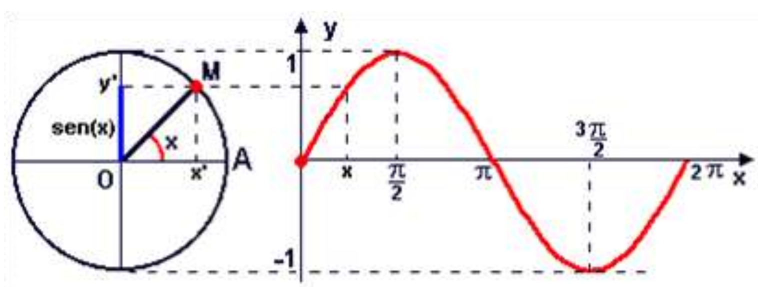
$$\text{sen}(\theta) = \frac{cateto\ \ oposto}{hipotenusa} \tag{2.1}$$

Com a expressão 2.1, podemos determinar o seno do ângulo x dos triângulos abaixo.



$$\text{sen}(x) = \frac{d}{p} = \frac{e}{p+q} = \frac{f}{a}$$

No círculo trigonométrico, cujo raio é igual a 1, pode-se verificar que o valor do sen(θ) pertence ao intervalo [-1,1], uma vez que seu comprimento é sempre menor que o do raio. Abaixo segue o gráfico da função sen(θ) no intervalo entre 0 e 2π



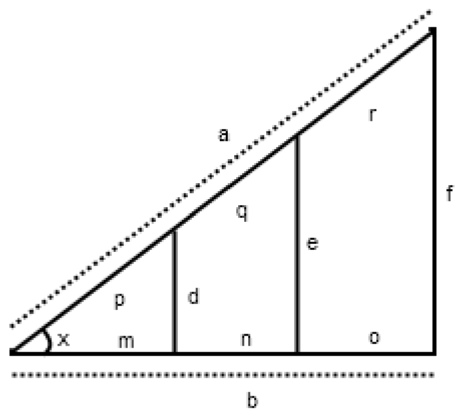
Note que a função sen(θ) tem período igual a 2π, uma vez que esse é o ângulo que corresponde a uma volta inteira – o ponto M, marcado em vermelho no circula, volta ao mesmo lugar depois de girar 2π em volta de O.

Função cosseno

Dado um triângulo retângulo com um de seus ângulos internos igual a θ, define-se $\cos(\theta)$ como a razão entre o cateto adjacente a θ e a hipotenusa desse triângulo, ou seja:

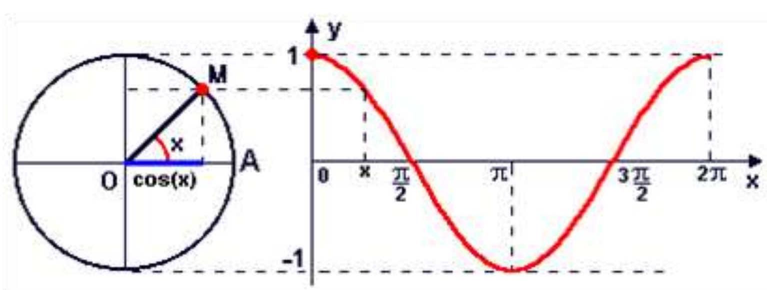
$$\cos(\theta) = \frac{cateto\ \ adjacente}{hipotenusa} \tag{3.1}$$

Com essa definição, podemos determinar o cosseno do ângulo x dos triângulos abaixo.



$$\cos(x) = \frac{m}{p} = \frac{m+n}{p+q} = \frac{b}{a}$$

No círculo trigonométrico de raio igual a 1, o valor do $\cos(\theta)$ pertence ao intervalo [-1,1]. Abaixo segue o gráfico da função de $\cos(\theta)$ no intervalo entre 0 e 2π



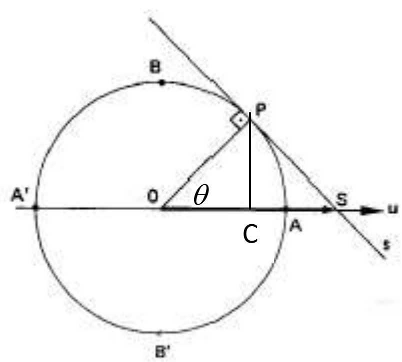
A função $\cos(\theta)$ possui período igual a 2π, pela mesma razão que a função seno.

Função Secante

Por definição, secante é o inverso do cosseno:

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \qquad (5.1)$$

A figura abaixo mostra a construção usada para visualizar o seno. O triângulo OPS é retângulo em P (OS é, portanto, a tangente ao círculo pelo ponto P), de modo que OP é o cateto adjacente ao ângulo θ. Já o triângulo OCP é retangulo em C, de modo que, nesse triângulo, o cosseno de θ é igual à razão cateto adjacente (OC) pelo raio. Para achar a representação geométrica da secante, devemos fazer com que a hipotenusa desse triângulo OCP – o raio do círculo – sirva de cateto adjacente do outro triângulo, o OPS.



Os triângulos OCP e OPS são semelhantes, porque ambos têm um ângulo reto, nos vértices C e P, respectivamente, e um ângulo em comum, no vértice em O. Como os lados opostos a ângulos iguais são proporcionais, escrevemos

$$\frac{\overline{OS}}{r} = \frac{r}{\overline{OC}}$$

Da definição do cosseno,

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{OC}}{r}$$

que, substituído na expressão anterior, dá

$$\frac{\overline{OS}}{r} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

Se considerarmos que o raio do círculo trigonométrico é 1, a secante é o segmento $\overline{OS}$, que vai do centro da circunferência até o ponto S Movendo o ponto P ao longo do círculo, notamos que, quando P→ A (mesmo que $\theta \rightarrow 0$) OS → r , ou seja, $\sec\theta \rightarrow 1$, e, quando P→ B (mesmo que $\theta \rightarrow \pi/2$) OS → ∞., ou seja, $\sec\theta \rightarrow \infty$. No geral, quanto menor o valor de cos(θ) maior será o valor de sec(θ).

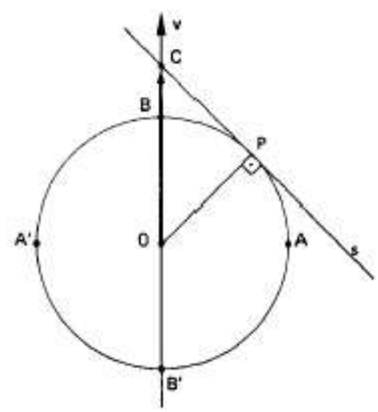
Função Cossecante

Por definição, cossecante é o inverso do seno.

$$\mathrm{cosec}(\theta) = \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)} \qquad (4.1)$$

A construção geométrica da cossecante é similar à da secante e está representada na figura abaixo.

Exercício. Mostre, por um raciocínio análogo ao usado acima na interpretação geométrica da secante, que a cossecante corresponde ao segmento que vai do centro da circunferência trigonométrica até o ponto C, na figura abaixo.



Na figura, fica claro que, quanto menor o valor de sen(θ) maior será o valor de cossec(θ).

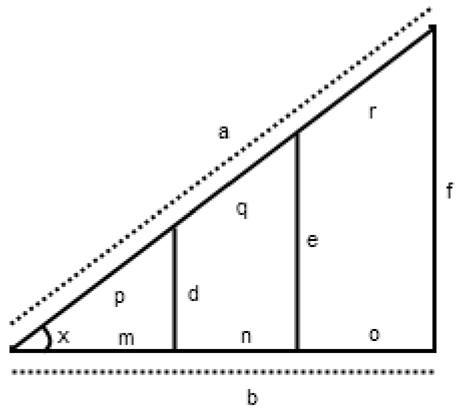
Função Tangente

Na trigonometria, a tangente de um ângulo θ é definida como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente:

$$tg(\theta) = \frac{cateto\ \ oposto}{cateto\ \ adjacente} \qquad (6.1)$$

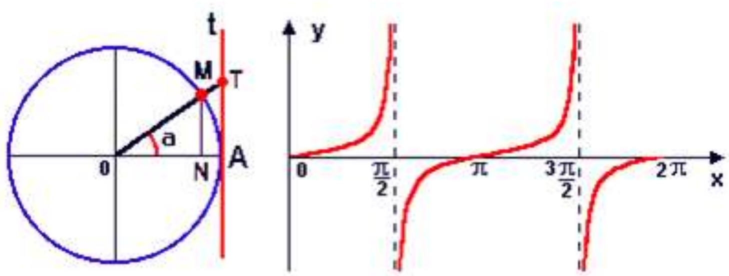
Note que, na geometria, tangente designa a reta que tem apenas um ponto de contato com uma curva sem interceptá-la, ou seja, é a reta limite da secante, quando os dois pontos de contatos vizinhos da secante se aproximam no limite de distância nula (desculpe os jeitos obscuros de definir tangente na geometria, mas a reta tangente é mais fácil de representar geometricamente do que defini-la com palavras, o que dá origem a definições erradas na Wikipédia em português e a definições ainda mais obscuras em alguns dicionários.

Utilizando 6.1 podemos determinar as tangentes do ângulo x dos triângulos abaixo.



$$\tan(x) = \frac{d}{m} = \frac{e}{m+n} = \frac{f}{b}$$

No círculo trigonométrico de raio igual a 1, o domínio da função tan(θ) corresponde aos Reais diferentes de $(\pi/2) + k\pi$, com $k \in \mathbf{N}$, uma vez que para esses valores: ..., -3π/2, -π/2, π/2, 3π/2, 5π/2,... a tangente tende a ∞. Abaixo, o gráfico da função de tg(θ) no intervalo entre 0 e 2π



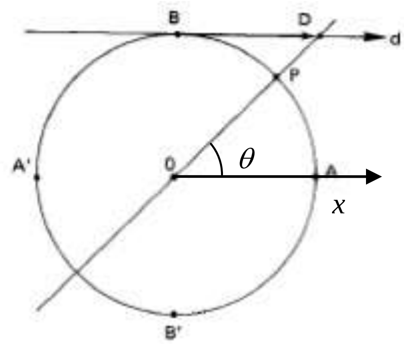
A função tan(θ) possui período igual a 2π, pela mesma razão que o seno.

Função Cotangente

Por definição, cotangente é a o inverso da tangente.

$$\text{cotg}(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} \tag{7.1}$$

A construção geométrica que permite representar a cotangente como um segmento está abaixo, em que a reta d é tangente ao círculo trigonométrico no ponto B e D é o ponto de intersecção da reta d com o segmento OP que define o ângulo θ. A cotangente é representada pelo segmento que vai do ponto B até o ponto D.



Relações Fundamentais.

As relações trigonométricas fundamentais são:

a) $\operatorname{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$

b) $tg(\theta)=\dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$

c) $\cot g(\theta)=\dfrac{1}{tg(\theta)}$

d) $\sec(\theta)=\dfrac{1}{\cos(\theta)}$

e) $\cos\sec(\theta)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}$

Da relação a), dividindo por $\cos^2(\theta)$ e $\operatorname{sen}^2(\theta)$, podem ser deduzidas, respectivamente, as relações f e g abaixo:

f) $\sec^2(\theta)=tg^2(\theta)+1$

g) $\cos\sec^2(\theta)=\cot g^2(\theta)+1$

Com mais trabalho, pode-se deduzir as fórmulas do seno e coseno de uma soma de ângulos:

h) $\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(b)\cos(a)$

i) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Notando que o seno é uma função ímpar e o coseno, par, as fórmulas para o seno e o coseno de uma diferença de ângulos podem ser deduzidas das expressões h e i acima:

j) $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$

l) $\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Ainda das fórmulas h e i, podem ser deduzidas para as fórmulas do seno e cosseno do dobro do ângulo a partir dos valores das funções para o ângulo:

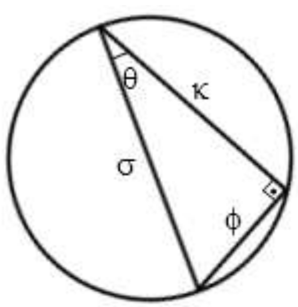
m) $\operatorname{sen}(2a) = \operatorname{sen}(a+a) = 2 \,.\, \operatorname{sen}(a)\cos(a)$

n) $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)$

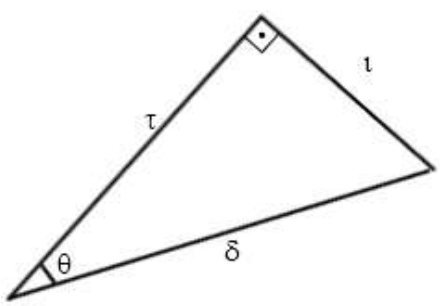
Exercícios

1) De cada triângulo abaixo, determine os valores de seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente do ângulo θ em função dos tamanhos dos lados dos triângulos.

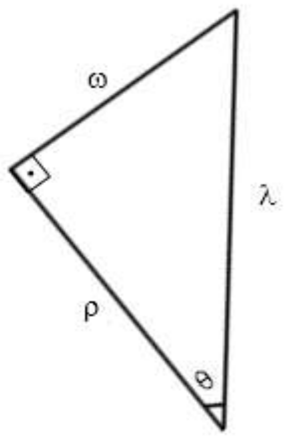
a)



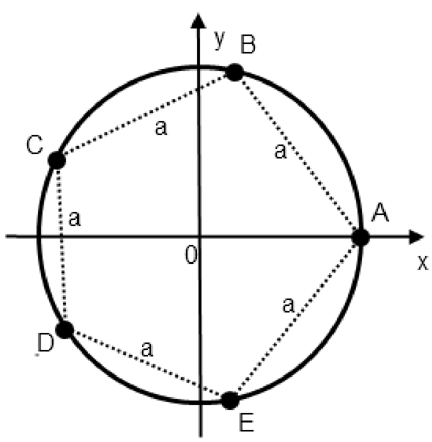
b)



c)



2) Considere uma circunferência trigonométrica dividida em cinco partes iguais, por meio dos pontos A, B, C, D e E.



Dê as medidas algébricas (em radianos) dos conjuntos de arcos que têm extremidades nesses pontos, ou seja, AB, AC, AD e AE.

3) Simplifique

$$A = \frac{a^2\cos(0) - b^2\,\mathrm{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{a\cos^2(\pi) + b\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2ab\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

4) Para todo $x \in$ R, a expressão $\left(sen(x)+\cos(x)\right)^2+\left(sen(x)-\cos(x)\right)^2$, é igual a ... ?

5) Quando $\text{sen}(x)-\cos(x)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, calcule o valor de $\text{sen}(x)\cdot\cos(x)$.

6) Resolvendo a equação de segundo grau::

$$x^2 sen(\theta)-2x\cos(\theta)-sen(\theta)=0$$

obtemos qual dos resultados a, b, c ou d abaixo?

a) $x=tg(\theta)\pm\sec(\theta)$

b) $x=\cot g(\theta)\pm\sec(\theta)$

c) $x=tg(\theta)\pm\cos\sec(\theta)$

d) $x=\cot g(\theta)\pm\cos\sec(\theta)$

7) Simplificar a expressão $y = \dfrac{sen(-\alpha)}{sen(\pi + \alpha)} - \dfrac{tg\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{tg\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)} + \dfrac{\cos(2\pi - \alpha)}{sen\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)}$.

8) Ache os valores de x, $0 \le x \le 2\pi$, tais que $2\cos^2 x + 5\,\mathrm{sen}\,x - 4 = 0$

9) Resolva as equações abaixo, desenhando os gráficos das funções envolvidas. Para cada uma delas construa os gráficos das funções intermediárias num mesmo par de eixos, a fim de visualizar as transformações que ocorreram:

a) $\mathrm{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{sen}x$

b) $2\mathrm{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 1 = 0$

c) $4\,\mathrm{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$