

Logaritmos

Definição

Podemos resolver algumas equações exponenciais utilizando propriedades de potenciação e fatoração, como no exemplo abaixo.

$$2^x = 16$$

Devemos determinar o valor de x que satisfaça a igualdade, e fatorando o número 16 obtemos que $2^x = 2^4$, portanto, $x = 4$.

Porém, há casos em que o valor de x não é um número inteiro, como no caso abaixo.

$$2^x = 10$$

Podemos afirmar que $3 < x < 4$ e também que x é um número irracional, portanto, para determinarmos seu valor mais aproximado devemos utilizar o conceito de logaritmo, ou seja, para encontrar o valor de x devemos calcular o logaritmo de 10 na base 2.

$$\log_2 10 = x$$

No exemplo acima dizemos que 2 é a base, 10 é o logaritmando e x é o logaritmo.

Observação: Quando a base é 10, por convenção, omitimos a mesma, ou seja, $\log_{10} 2 = \log 2$.

Agora, então, podemos representar o logaritmo em sua forma geral.

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

Restrições e condições da definição

1. Temos que $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$.
2. Por definição, temos que $0^0 = 1$, mas $0^\alpha = 0$ para qualquer $\alpha > 0$.
3. Se $b = 1$, $a = 1$ para qualquer valor de c .
4. Se $a = 1$, $c = 0$ para qualquer valor de b .
5. Se $a = b$, então $c = 1$.

Você pode comprovar essas condições e restrições como um exercício.

Exercício

Calcule, aplicando a definição de logaritmo:

- a) $\log_9 \frac{1}{9}$ b) $\log_{25} 625$ c) $\log_{0,01} 10$ d) $\log_4 \frac{1}{2}$ e) $\log_{\sqrt{3}} 27$
f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[7]{16}$ g) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9}$ h) $\log_4 \sqrt{2}$ i) $\log_{100} \sqrt[3]{10}$ j) $\log_8 \sqrt[3]{16}$

Propriedades

Sabemos calcular os seguintes logaritmos, e obtemos que:

$$\log 10 = 1, \log 100 = 2, \log 1000 = 3 \text{ e } \log 100000 = 5$$

Olhando para o resultado acima vemos que:

$$\log(100 \cdot 1000) = \log(100000) = 5 = 2 + 3 = \log 100 + \log 1000$$

ou seja, obtemos que:

$$\log(100000) = \log 100 + \log 1000$$

Mas podemos observar também que:

$$\log\left(\frac{1000}{100}\right) = \log(10) = 1 = 3 - 2 = \log 1000 - \log 100$$

Porém, podemos observar também que:

$$\log(10^2) = \log(100) = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \log(10)$$

Será que podemos generalizar esses resultados?

Se sabemos que:

$$\log_b a = c \quad (1)$$

$$\Updownarrow$$

$$b^c = a \quad (2)$$

$$\log_b d = e \quad (3)$$

$$\Updownarrow$$

$$b^e = d \quad (4)$$

$$\log_b(a.d) = f \quad (5)$$

$$\Updownarrow$$

$$b^f = a.d \quad (6)$$

Substituindo (2) e (4) em (6), obtemos que:

$$b^f = b^c \cdot b^e \Rightarrow f = c.e \quad (7)$$

e agora substituindo (1), (3) e (5) em (7), obtemos que a primeira propriedade dos logaritmos, que é chamada de Logaritmo do Produto, é dada por:

$$\boxed{\log_b(a \cdot d) = \log_b a + \log_b d}$$

Agora consideramos o seguinte logaritmo:

$$\log_b\left(\frac{a}{d}\right) = g \quad (8)$$

$$\Updownarrow$$

$$b^g = \frac{a}{d} \quad (9)$$

Substituindo (2) e (4) em (9), obtemos que:

$$b^g = \frac{b^c}{b^e} \Rightarrow g = c - e \quad (10)$$

E agora substituindo (1), (3) e (8) em (10), obtemos que a segunda propriedade dos logaritmos, que é chamada de Logaritmo do Quociente, é dada por:

$$\boxed{\log_b\left(\frac{a}{d}\right) = \log_b a - \log_b d}$$

E por último podemos calcular o seguinte logaritmo:

$$\log_b(a^h) = x \quad (11)$$

$$\Updownarrow$$

$$b^x = a^h \quad (12)$$

Substituindo (2) em (12), obtemos que:

$$b^x = (b^c)^h \Rightarrow x = c \cdot h \quad (13)$$

E agora substituindo (1) e (11) em (13), obtemos a terceira propriedade dos logaritmos, que é chamada de Logaritmo da Potência, que é dada por:

$$\log_b(a^h) = h \cdot \log_b a$$

Os três resultados acima representam propriedades importantes dos logaritmos.

Exercícios

Usando as propriedades operatórias dos logaritmos, calcule:

$$\text{a) } \log_5(125 \cdot 625) \quad \text{b) } \log_2 16\sqrt{8} \quad \text{c) } \log_3 \frac{81\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} \quad \text{d) } \log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{32}$$

Determine o valor de x para que existam os logaritmos.

$$\text{e) } \log_3(4x-1) \quad \text{f) } \log_{(2x-1)} 2 \quad \text{g) } \log_{2x}(x+1) \quad \text{h) } \log_{(4-x)}(x-3)$$

Mudança de base

As propriedades dos logaritmos apresentadas acima são válidas somente para logaritmos de mesma base, e por isso é importante que saibamos mudar a base de um logaritmo.

Sabemos que:

$$\log_b a = c \quad (14)$$

$$\Updownarrow$$

$$b^c = a \quad (15)$$

$$\log_d a = e \quad (16)$$

$$\Updownarrow$$

$$d^e = a \quad (17)$$

Das equações (15) e (17):

$$b^c = d^e \quad (18)$$

Também sabemos que:

$$\log_d b = f \quad (19)$$

$$\Updownarrow$$

$$d^f = b \quad (20)$$

Substituindo a equação (20) em (18), obtemos:

$$(d^f)^c = d^e \Rightarrow d^{fc} = d^e \Rightarrow fc = e \quad (21)$$

Substituindo as equações (14), (16) e (19) na equação (21), obtemos a mudança de base do logaritmo.

$$\log_d b \cdot \log_b a = \log_d a$$

$$\Updownarrow$$

$$\log_b a = \frac{\log_d a}{\log_d b}$$

Exercícios

Sendo $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, calcule:

a) $\log_2 432$

b) $\log_4 20$

c) $\log_2 500$

d) $\log_3 540$

e) $\log_2 72$

f) $\log_{18} 45$

Logaritmo natural

Vamos considerar a série infinita abaixo:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \dots$$

Se calcularmos o valor da função para $x = 1$, obtemos:

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \dots \cong 2,718$$

Podemos reconhecer esse número como uma constante muito famosa, o número de Euler. Usualmente representamos essa função como e^x , ou seja, o número de Euler elevado a x .

Essa função tem outra propriedade bem interessante. Se derivarmos essa função em relação a x , obtemos:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \cdots \equiv f(x)$$

Ou seja, essa função é igual à sua derivada, e podemos escrever então que:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

Existe um logaritmo muito especial que é o chamado Logaritmo Natural (ou Neperiano), onde ele tem como base o Número de Euler. Sua representação é feita da seguinte forma:

$$\ln 2 = x \Rightarrow e^x = 2$$

As propriedades dos logaritmos continuam sendo válidas para esse caso e ele será utilizado com muita frequência em disciplinas posteriores.