1. Matrizes

Definições

Matrizes são agrupamentos retangulares de elementos que podem ser localizados a partir de um número i correspondente a uma linha e de um número j correspondente a uma coluna. Uma matriz é parecida com uma malha quadriculada onde cada posição, definida por esses números da linha e da coluna, guarda um elemento.

	1	2
1	**0**	**5**
2	**3**	**2**

Figura 1. Ilustração de uma matriz, com identificação dos números de linha e coluna.

Na ilustração acima, os números das linhas e das colunas estão nos quadrados em cinza, enquanto os elementos da matriz estão nos quadrados brancos. Por exemplo, o elemento que está na linha $i = 1$ e na coluna $j = 2$ é o elemento $a_{12} = 5$ – usa-se a letra *a* minúscula com os números de linha e coluna subscritos para identificar um elemento da matriz, de modo que um elemento qualquer da matriz é a_{ij} onde $i \geq 1$ e $j \geq 1$. Agora, responda você: Quanto vale o elemento a_{21}?

A representação da figura 1 é útil para compreender a estrutura de uma matriz, mas essa não é a representação matemática de uma matriz. A forma com que a apresentamos normalmente é

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Do lado esquerdo da igualdade acima, identificamos a matriz pelo símbolo $A_{2\times 2}$, que se lê, matriz A 2 por 2. Normalmente, usam-se letras maiúsculas para identificar as matrizes e os números subscritos, que são opcionais, indicam respectivamente o número de linhas e de colunas da matriz. A matriz de nosso exemplo possui duas linhas e duas colunas; se fosse uma matriz com 5 linhas e 3 colunas, teríamos uma matriz $B_{5\times 3}$.

A identificação dos elementos da matriz $A_{2\times 2}$ fica:

$a_{11} = 0$, elemento da linha 1 e coluna 1.

$a_{12} = 5$, elemento da linha 1 e coluna 2.

$a_{21} = 3$, elemento da linha 2 e coluna 1.

$a_{22} = 2$, elemento da linha 2 e coluna 2.

Assim, os elementos de uma matriz qualquer de m linhas e n colunas são representados por:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes especiais

Considere uma matriz $A_{m\times n}$.

Se $m = 1$ e $n > 1$, a matriz $A_{1\times n}$ é chamada *matriz linha*. Por exemplo,

$$A_{1\times 4} = [1 \quad 5 \quad 9 \quad 13]$$

e em geral

$$A_{1\times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

Se $m > 1$ e $n = 1$, a matriz $A_{m\times 1}$ é chamada *matriz coluna*. Por exemplo,

$$A_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 32 \\ 128 \end{bmatrix}$$

e em geral

$$A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Se $m = n$, a matriz $A_{m\times m}$ é chamada matriz *quadrada* de *ordem m* . Por exemplo,

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & 8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

e em geral

$$A_{m\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Observe que, se uma matriz é quadrada, então é possível definir sua Diagonal principal e sua diagonal secundária como segue:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 4 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

Se $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$, a matriz $A_{m\times n}$ é chamada *matriz diagonal*. Por exemplo

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Perceba que uma matriz diagonal **pode** ter um elemento igual a 0 na diagonal principal, mas **deve** ter todos os outros elementos, que não fazem parte da diagonal principal, iguais a 0.

A matriz diagonal que tem todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 é chamada *matriz identidade*. Para denotar matrizes identidade usa-se o símbolo I_n onde n é a ordem da matriz. Por exemplo.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A_{m\times n}$e $B_{m\times n}$ são iguais se e somente se $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, ou seja, não basta que todos os elementos sejam iguais, eles também tem que estar nas posições correspondentes.

Exercício – exemplo. Determine as variáveis x e y para que as matrizes A e B sejam iguais.

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ x & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & y \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resposta: } \begin{cases} y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

Exercício

Determine os valores de x e y para que as matrizes A e B sejam iguais nos itens abaixo:

a) $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} x+2 & 3 \\ 3 & 3y-1 \end{bmatrix}$ e $B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4y+3 \end{bmatrix}$

b) $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & y+2 \\ z-5 & t \end{bmatrix}$ e $B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 3y-x-1 \\ -5 & y \end{bmatrix}$

Adição de matrizes

Duas matrizes A e B só podem ser somadas se tiverem o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas. A soma se dá elemento a elemento, isto é, soma-se o primeiro elemento da primeira coluna da matriz A com o primeiro elemento da primeira coluna da matriz B, que dá o elemento da primeira linha e primeira coluna da matriz soma. Assim, a matriz soma, que vamos chamar de C, tem o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas das duas matrizes somadas. Por exemplo, com as matrizes

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & 8 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a matriz soma $C_{4\times 4}$ que é soma delas, ou seja

$$C = A + B$$

é calculada por meio das somas dos elementos,

$$a_{11} + b_{11} = c_{11}$$
$$a_{12} + b_{12} = c_{12}$$
$$a_{13} + b_{13} = c_{13}$$
$$\vdots$$
$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

e vale

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 6 & 6 \\ 10 & 7 & 12 & 14 \\ 6 & 1 & 9 & 7 \\ 10 & 9 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de escalar por matriz

A multiplicação de um número escalar k por uma matriz A implica na multiplicação de k por todos os elementos da matriz. Por exemplo, se $k = 2$ e A é a matriz do exemplo anterior, $k \cdot A$ dá:

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & 8 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 12 & 14 \\ 10 & 2 & 0 & 10 \\ 12 & 16 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

Em geral,

$$k \cdot A_{mxm} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m1} & \cdots & ka_{mm} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ podem ser multiplicadas e gerarem uma matriz $C_{m\times p}$, ou seja,:

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Para executar esta operação, existe um detalhe importante. Note que o número de *colunas* da primeira matriz (A) deve ser igual ao número de *linhas* da segunda matriz (B) e a matriz produto terá tantas linhas quanto a primeira matriz e tantas colunas quanto a segunda matriz. Note, também, que a ordem de multiplicação é importante no caso de matrizes, aliás, de acordo com a regra acima a multiplicação $B_{n\times p} \cdot A_{m\times n}$, será impossível se $p \neq m$.

Agora que temos as condições necessárias para a operação e uma idéia do que esperar como resultado, vamos ao procedimento.

Sejam $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} =$$

Note que os elementos da matriz A estão em negrito. O procedimento consiste em multiplicar o primeiro elemento da primeira linha de A pelo primeiro elemento da primeira coluna de B e somar com a multiplicação do segundo elemento da primeira linha de A com o segundo elemento da primeira coluna de B e assim sucessivamente; a direção em que os elementos são selecionados para serem multiplicados está indicada pelas setas. O resultado gera a matriz $C_{3\times 4}$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (\mathbf{2}\cdot 3 + \mathbf{4}\cdot 4) & (\mathbf{2}\cdot 1 + \mathbf{4}\cdot 2) & (\mathbf{2}\cdot 0 + \mathbf{4}\cdot 5) & (\mathbf{2}\cdot 2 + \mathbf{4}\cdot 1) \\ (\mathbf{1}\cdot 3 + \mathbf{0}\cdot 4) & (\mathbf{1}\cdot 1 + \mathbf{0}\cdot 2) & (\mathbf{1}\cdot 0 + \mathbf{0}\cdot 5) & (\mathbf{1}\cdot 2 + \mathbf{0}\cdot 1) \\ (\mathbf{3}\cdot 3 + \mathbf{5}\cdot 4) & (\mathbf{3}\cdot 1 + \mathbf{5}\cdot 2) & (\mathbf{3}\cdot 0 + \mathbf{5}\cdot 5) & (\mathbf{3}\cdot 2 + \mathbf{5}\cdot 1) \end{bmatrix}$$

$$C \quad = A \cdot B = \begin{bmatrix} 22 & 10 & 20 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 29 & 13 & 25 & 11 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta

Transpor uma matriz significa transformar as colunas dessa matriz em linhas. Dada a matriz $A_{m\times n}$, sua matriz transposta é representada por $A^t = B_{n\times m}$. Exemplo:

$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, a matriz transposta de A é $A^t \ = B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

O determinante de uma matriz

O determinante de uma matriz é uma grandeza escalar obtida por um cálculo específico com *todos* os elementos da matriz e que **só é definido para matrizes quadradas**.

Matriz quadrada de segunda ordem

O determinante de uma matriz de segunda ordem é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Exemplo:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \big(6 \cdot (-1)\big) - \big((-3) \cdot 5\big) = 9$$

Assim, de forma geral, o determinante de uma matriz de segunda ordem é dado por:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

Matriz quadrada de terceira ordem

Trataremos aqui somente de uma técnica para calcular os determinantes de matrizes de terceira ordem, que é uma maneira abrangente e que pode ser usada para o cálculo de matrizes quadradas de qualquer ordem, chamada *fórmula de Laplace*.

A fim de iniciar por um exemplo, vamos calcular o determinante de matriz A dada por

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo é eliminar uma linha i e uma coluna j da matriz, o que resulta em outra matriz quadrada de grau uma unidade menor que a matriz original. Eliminaremos primeiro a primeira linha e primeira coluna da matriz A o que nos dá,

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

A linha e a coluna eliminada estão em cinza e a matriz restante, de ordem 2, está em branco; essa matriz tem o nome de *menor complementar* do elemento a_{11}. O passo seguinte é calcular o determinante desse *menor*,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\right) = (5 \cdot 9) - (6 \cdot 8) = -3$$

e, depois, multiplicar o valor obtido por $(-1)^{i+j}$; o resultado é chamado *cofator*. Como neste caso $i = j = 1$, temos:

$$C_{11} = (-3) \cdot (-1)^2 = -3$$

Repetimos esse procedimento para determinar os cofatores dos dois outros elementos da primeira linha. O menor do elemento da 1ª linha e 2ª coluna é obtido pela eliminação da 1ª linha e 2ª coluna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow C_{12} = (-1)^{3}(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) = (-1)(-6) = 6$$

O menor do elemento da 1ª linha e 3ª coluna é obtido pela eliminação da 1ª linha e 3ª coluna:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \quad C_{13} = (4 \cdot 8) - (5 \cdot 7) = -3$$

Obtém-se o determinante somando 3 parcelas, cada uma igual à multiplicação de um elemento da primeira linha com seu cofator correspondente:

$$\det(A) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = 0$$

A expressão que generaliza o procedimento acima quando fixamos uma linha i é dada por:

$$\det A_{n\times n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$$

para qualquer linha *i*, ou seja, não somos obrigados a expandir o determinante em cofatores pela primeira linha, podemos escolher qualquer uma das linhas da matriz.

Exercício. Prove que o determinante de uma matriz que tem todos os elementos de uma linha iguais a zero é nulo.

O determinante pode ser calculado também calculando os cofatores de todos os elementos de uma mesma coluna, de acordo com a fórmula

$$\det A_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$$

para qualquer coluna *j*.

Exercício. Prove que o determinante de uma matriz que tem todos os elementos de uma coluna iguais a zero é nulo.

Exercícios

1) Escreva a matriz $A_{2\times2} = [a_{ij}]$ tal que $a_{ij} = 5$ para $i = j$ e $a_{ij} = -1$ para $i \neq j$.

2) Determine a e b tais que $\begin{bmatrix} a+3 & 5 \\ -2 & b-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

3) Determine o valor de x tal que $\begin{bmatrix} x^2 \\ x^2 + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

4) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $3A$

b) $3A^t + B^t$

5) Determine os produtos das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

6) Encontre os determinantes das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$