Cap. VII ESCOAMENTOS POTENCIAIS BIDIMENSIONAIS (continuação)[1]

Na última aula, estudamos fluidos incompressíveis com escoamento bidimentional irrotacional. Para achar a velocidade deste tipo de escoamento, podemos resolver a equação de Laplace para a função de corrente ψ (ou a função potencial ϕ).

Temos em coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

ou em coordenadas polares:

$$\begin{cases} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{d\theta}, \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases}$$

Argumentamos que para fluidos incompressíveis com escoamento bidimentional irrotacional estacionário em volta de objetos sólidos, podiamos construir a solução da equação de Laplace por *superposição*, impondo condições de contorno. Por exemplo para o cilindro parado num escoamento retilíneo uniforme, fizemos a superposição da função de corrente ψ de um escoamento retilíneo uniforme com a de um dipolo. As condições de contorno para este caso são que a função de corrente ψ do cilindro no infinito é a do escoamento retilíneo uniforme e na superfície do cilindro, existe uma linha de ψ constante com forma da superfície (em termo de velocidade, esta tem componente não nula só tangencial).

Quando fazemos nossa superposição, fazemos uso implícito do teorema de unicidade: a solução ψ de equação de Laplace num volume V simplesmente conexo ("= sem buraco") é única se ψ ou $\partial\psi/\partial n$ é especificado sobre a superfície delimitando V. Quando o volume é multi-conexo ("= com buraco") , precisa dar também o valor da circulação sobre as curvas irredutíveis ("curva redutivel= curva fechada que pode ser deformada até um ponto de maneira contínua sem sair do volume"), se $\partial\psi/\partial n$ for dado. (Este teorema é usado no eletromagnetismo por exemplo quando se construe uma solução pelo método das imagens.)

Por exemplo, no caso do cilindro num escoamento retilíneo uniforme, temos várias soluções dependendo do valor da circulação Γ_c, nula ou não (cf. §3.4 desta aula).

Neste capítulo, usaremos a noção de potencial complexo para re-achar a solução do problema do cilindro num escoamento retilíneo uniforme e resolver novos problemas.

1 O potencial complexo (cap. XVI da ref. [4])

A um ponto (x,y), podemos associar o número complexo

$$z = x + iy.$$

As vezes é mais prático escrever

$$z = re^{i\theta}$$

com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.

O potencial complexo é a função complexa $\omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$.

Esta função é analítica, isto é, derivável porque ela satisfaz as condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad .$$

(e as derivadas parciais que aparecem são contínuas).

A derivada de ω pode ser calculada como

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d\omega}{dz}} &= \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}} = v_x + i\, v_y = v\, e^{i\theta_v} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial (iy)} + i\frac{\partial \psi}{\partial (iy)} \quad . \end{aligned}$$

Esta função é chamada de *velocidade complexa*.

Vemos que

$$\begin{cases} v_x &= Re\frac{d\omega}{dz} \\ v_y &= -Im\frac{d\omega}{dz} \end{cases} \qquad ou \quad \begin{array}{ll} v &= |\frac{d\omega}{dz}| \\ \theta_v &= -arg\frac{d\omega}{dz} \end{array}$$

Olhamos alguns exemplos de potencial complexo.

1.1 Escoamento retilíneo uniforme

Seja o potencial linear

$$\omega(z) = Cz$$

onde $C = |C|e^{-i\alpha}$ é uma constante (complexa) arbitrária.

Sua derivada é

$$\frac{d\omega}{dz} = v_x - iv_y = v\, e^{-i\theta} = |C|e^{-i\alpha} \ ,$$

Daí $v = |C| \qquad e \qquad \theta_v = \alpha$

ou

$v_x = |C|\cos\alpha \qquad e \qquad v_y = |C|\sin\alpha$ Isto significa que ω é o potencial complexo para escoamento retilíneo uniforme de velocidade $|C|$ e inclinação α da velocidade em relação a Ox.

De fato podemos calcular

$$\phi = (|C|\cos\alpha)x + (|C|\sin\alpha)y$$

e

$$\psi = (|C|\cos\alpha)y - (|C|\sin\alpha)x$$

que são as funções que encontramos anteriormente para descrever um escoamento retilíneo uniforme de velocidade $|C|$ e inclinação α da velocidade em relação a Ox.

1.2 Fonte puntiforme de fluxo

Consideremos agora o potencial

$$\omega(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z \ ,$$

com Q real.

Pondo $z = re^{i\theta}$, temos

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \text{e} \quad \psi = \frac{Q\theta}{2\pi} \ ,$$

este escoamento é radial e temos uma fonte se $Q > 0$ e um sorvedouro se $Q < 0$.

A velocidade (radial) é

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}.$$

A velocidade tangencial é

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

1.3 Vórtice singular

Se no potencial anterior, Q ao invés de ser real for imaginário puro, isto é,

$$\omega(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \ \ln \ z,$$

com Γ real,

ϕ e ψ trocam de papel e o escoamento será circular com

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

e

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0.$$

Γ é a circulação sobre uma curva aoredor da origem.

Podemos completar a tabela da última aula:

Fluido incompressível irrotacional				
escoamento retilíneo		escoamente radial	escoamente circular	dipolo sobre Ox
$\vec{v} = u\hat{x}$	$\vec{v} = v\hat{y}$	$\vec{v} = (A/r)\hat{r}$	$\vec{v} = \pm(\Gamma_C/(2\,\pi\,r)\hat{\theta}$	$\vec{v} = (-m/(2\,\pi\,r^2)\hat{r}$
$\psi = u\,y$	$\psi = -v\,x$	$\psi = A\,\theta$	$\psi = \mp(\Gamma_C/(2\,\pi)\ln r$	$\psi = (-m/(2\,\pi\,r)\sin\theta$
$\phi = u\,x$	$\phi = v\,y$	$\phi = A\,\ln r$	$\phi = \pm(\Gamma_C/(2\,\pi)\theta$	$\phi = (m/(2\,\pi\,r)\cos\theta$
$\omega = Cz$		$\omega = \frac{Q}{2\pi}\ln z$	$\omega = \frac{-i\Gamma}{2\pi}\ln z$	$\omega = \frac{m}{2\pi}\frac{1}{z}$

2 Transformação conforme Cap. VIII da ref.[2]

Deixamos temporariamente os potenciais complexos, para discutir outro assunto.

Na análise complexa, existe um teorema[2] que diz que: em todos os pontos onde uma função f é analítica (com derivada não nula), ela produz uma transformação conforme entre regiões do plano $z = (x, y)$ ($x \equiv Re\,z, y \equiv Im\,z$) e $f(z) = w = (u, v)$ ($u \equiv Re\,f, v \equiv Im\,f$), isto é, ela conserva os ângulos entre curvas no espaço dos $z = (x, y)$ e suas imagens no espaço dos $w = (u, v)$.

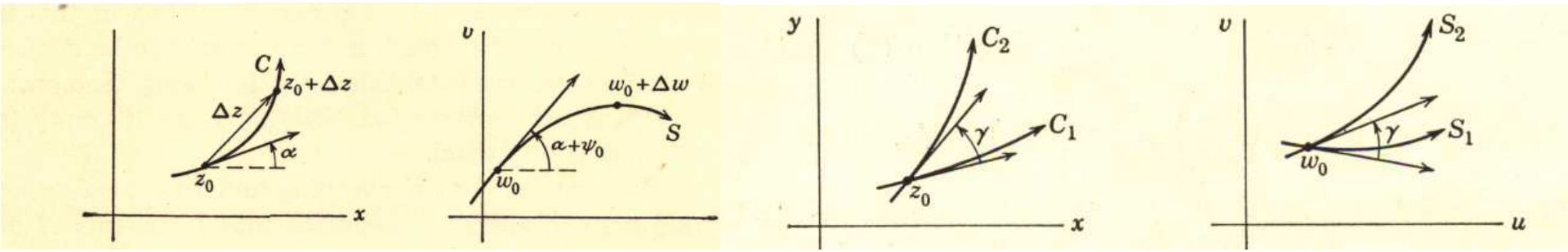


Fig.1: efeito de uma transformação sobre curvas ao passar do espaço dos z ao dos w.

[Derivação: Seja, então, $f(z)$ uma função analítica na vizinhança de um ponto z_0. Por definição, se uma função é analítica em P, ela possui derivada df/dz nesse ponto, isto é o limite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \equiv \frac{df}{dz} = R_0\, e^{i\psi_0}$$

é independente da direção do incremento Δz e, em particular, o argumento da derivada ψ_0 também. Então
$\lim_{\Delta z \to 0} arg \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} arg \Delta z + \psi_0$.
Daí a tangente a uma curva passando por z_0 no espaço dos z é girada em $w_0 = f(z_0)$ de ψ_0 no espaçødos w.

Consideremos agora duas curvas orientadas C_1 e C_2, passando por z_0 e formando, respectivamente, angulos α_1 e α_2 com a direção do eixo real Ox, sendo $\alpha_2 - \alpha_1 = \theta$. Ao ponto z_0 corresponde, no plano w, um ponto w_0 e às curvas C_1 e C_2, respectivamente, S_1 e S_2. Os ângulos entre essas curvas e o eixo real $O'u$ do plano w devem ser $\alpha_1' = \alpha_1 + \psi_0$ e $\alpha_2' = \alpha_2 + \psi_0$ e, portanto, $\alpha_2' - \alpha_1' = \alpha_2 - \alpha_1$, o que demonstra que a transformação dada pela função f é conforme.]

Vejamos alguns exemplos de transformações conformes simples [3].

2.1 Retas x=cste, y=cste e $f(z) = \cos z$

Temos

$$f(z) = \cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2 = (e^{ix-y} + e^{-ix+y})/2 = \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x = u + iv$$

Assim $u = \cosh y \cos x$ e $v = -\sinh y \sin x$. Eliminando x temos $u^2/\cosh^2 y + v^2/\sinh^2 y = 1$ e eliminando y temos $u^2/\cos^2 x - v^2/\sin^2 x = 1$. Assim as curvas $x = cste$ se tornam hipérboles com focos em -1 e +1. As curvas com $y = cste$ se tornam elipses com os mesmos focos. Estas curvas formam um sistema de curvas ortogonais.

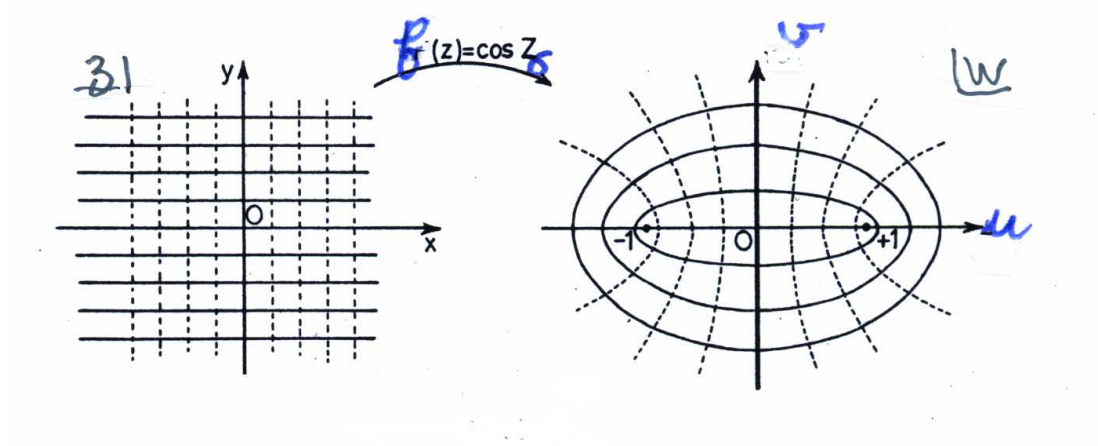


Fig.2 : observar como se mantem os ângulos entre curvas solidas e pontiladas ao passar da esquerda a direita.

2.2 Hipérboles no espaço (x,y) e $f(z) = a\,z^2$

Temos

$$f(z) = a(x^2 - y^2) + 2iaxy = u + iv.$$

Assim se no plano (x,y) tivermos hipérboles $x^2 - y^2 = cste$ e $xy = cste$, no plano (u, v), teremos retas $u = cste$ e $v = cste$.

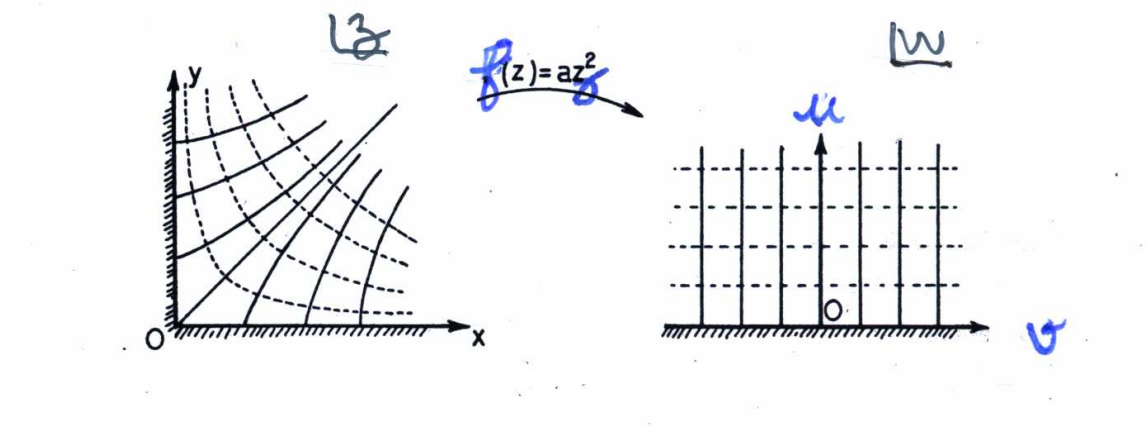


Fig.3 : observar como se mantem os ângulos entre curvas solidas e pontiladas ao passar da esquerda a direita.

2.3 Circunferência em (x,y) e $f \propto (z + 1/z)$

Analisemos três casos:

$$f_1(z) = \tfrac{d}{2}(z + \tfrac{1}{z})$$

$$f_2(z) = i\frac{d}{2}(z + \frac{1}{z})$$

$$f_3(z) = \frac{d}{2}(a - ib)(z + \frac{1}{z})$$

representados na figura embaixo, quando fazemos z percorrer uma circunferência de raio unitário, i.e. $z = e^{i\theta}$. Assim $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \cos\theta$

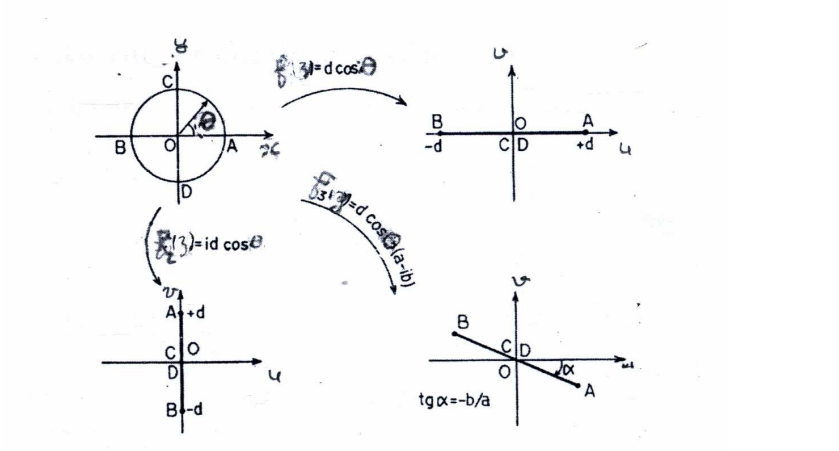


Fig. 4: transformação conforme de um círculo em segmento.

Nessas transformações, os pontos que estão sobre a circunferência e em seu interior se transformam em pontos sobre a reta no plano (x,y). Os pontos exteriores á circunferência estão fora da reta transformada.

3 Uso de transformação conforme para resolver problemas de escoamento [2]

Agora juntamos os resultados das secções 1 e 2.

A ideia é mapear com uma transformação conforme $F(w) = z$ ($w = u + iv$, $z = x + iy$) a região onde procuramos a função potencial $\omega_{proc}(u, v)$ numa região onde conhecemos a função potencial $\omega_{conh}(z)$. Introduzemos $\omega_{proc}(w) = \omega_{conh}(z) = \omega_{conh}(F(w))$.

Pictorialmente:

$$\begin{array}{ccc} z = (x, y) & \overset{f(z)=w}{\longrightarrow} & w = (u, v) \\ & \underset{F(w)=z}{\longleftarrow} & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \omega_{conh} = (\phi, \psi) & & \omega_{proc}(w) = \omega_{conh}(F(w)) \end{array}$$

Observamos que como ω_{conh} e F são anaíticas, ω_{prco} também o é e deve representar algum escoamento. Além disto, uma linha de corrente de ω_{conh} se transforma numa linha de corrente de ω_{proc}. (Se z_C pertence a C linha de corrente de ω_{conh}, $Im\,\omega_{conh}(z_C) = cste$ e $Im\,\omega_{proc}(w_C) = Im\,\omega_{conh}(F(w_C)) = Im\,\omega_{conh}(z_C) = cste$.)

O problema então é achar F. Podemos encontrar "dicionários" de transformações conformes para todo tipo de regiões por exemplo no fim de [3].

3.1 Cilindro circular infinito numa corrente uniforme

Por simetria só precisamos metade do cilidro e a região onde procuramos o escoamento é fora dele, como mostrado na figura a esquerda.

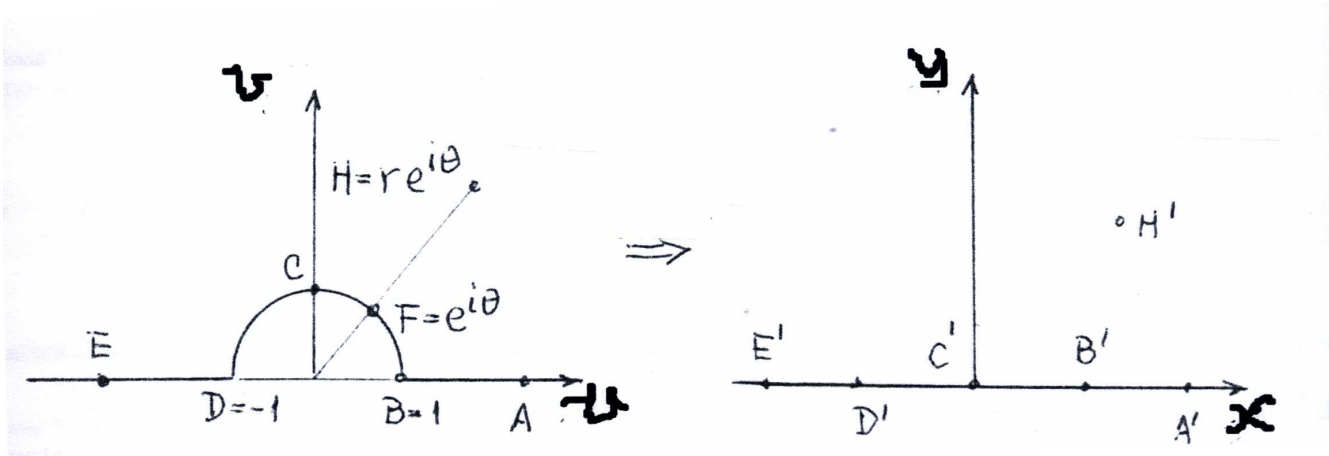


Fig. 5: escolha do mapeamento para o problema do cilindro.

Esta região pode ser mapeada no semi-plano $y > 0$ da figura a direita, usando para a função F (cf. seção anterior)

$$z = w + 1/w$$

(para um cilindro de raio 1).

No semi-plano $y > 0$, os potenciais ϕ e ψ soluções da equação de Laplace com linha de corrente constante sobre Ox são conhecidos: o escoamento deve ser retilino uniforme ao longo de Ox, seu potencial é

$$\omega_{conh} = Az$$

e a velocidade complexa é

$$\overline{\frac{d\omega_{conh}}{dz}} = A$$

.

Assim $\phi_{conh} = Ax$ e $\psi_{conh} = Ay$ bem como $v_x = A$ e $v_y = 0$.

Escrevemos w com variveis polares: $w = r\,e^{i\theta}$, de modo que

$$z = F(w) = w + 1/w = r\,e^{i\theta} + (1/r)\,e^{-i\theta} = (r + 1/r)\cos\theta + i(r - 1/r)\sin\theta$$

Temos $\omega_{proc} = \omega_{conh}(F(w)) = A(w + 1/w) = A(r + 1/r)\cos\theta + i(r - 1/r)\sin\theta$. A velocidade complexa é

$$\overline{\frac{d\omega_{proc}}{dw}} = \overline{A(1 - 1/w^2)}$$

Para $|w| \to \infty$ ela tende para A de modo que A deve ser escolhida para que A seja a velocidade do fluido no qual o cilindro está imerso.

Temos $\phi_{proc} = A(r + 1/r)\cos\theta$ e $\psi_{proc} = A(r - 1/r)\sin\theta$ que é de fato o que tinhamos encontrado para o cilindro de raio 1 num escoamente retilíneo uniforme de velocidade A na aula anterior.

Para passar ao caso de raio R, podemos usar como transformação conforme $z = (w/R + R/w)$ (o que significa que usamos r/R no lugar de r). Agora

$$\omega_{proc} = A(w + 1/w) = A(r/R + R/r)\cos\theta + i(r/R - R/r)\sin\theta$$

A velocidade complexa é

$$\overline{\frac{d\omega_{proc}}{dw}} = \overline{A(1/R - R/w^2)}$$

Para $|w| \to \infty$ ela tende para A/R de modo que A deve ser escolhida para que A/R seja a velocidade do fluido no qual o cilindro está imerso.

Temos $\phi_{proc} = A(r/R + R/r)\cos\theta$ e $\psi_{proc} = A(r/R - R/r)\sin\theta$ que é também o que tinhamos encontrado para o cilindro de raio R num escoamente retilíneo uniforme de velocidade A na aula anterior.

3.2 Escoamento numa esquina a 90^0

Neste caso transformamos a região em forma de esquina onde tem o escoamento (de novo) no plano $y > 0$ usando $F(w) = w^2 = z$ i.e.

$$z = u^2 - v^2 + i\,2uv.$$

Temos $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$ com u e $v > 0$. Assim, $(u, 0)$ se transforma em $(u^2, 0)$, o semi-eixo $x > 0$.
$(0, v)$ se transforma em $(0, v^2)$, o semi-eixo $y > 0$.
e a região u e $v > 0$ se transforma em $y > 0$.

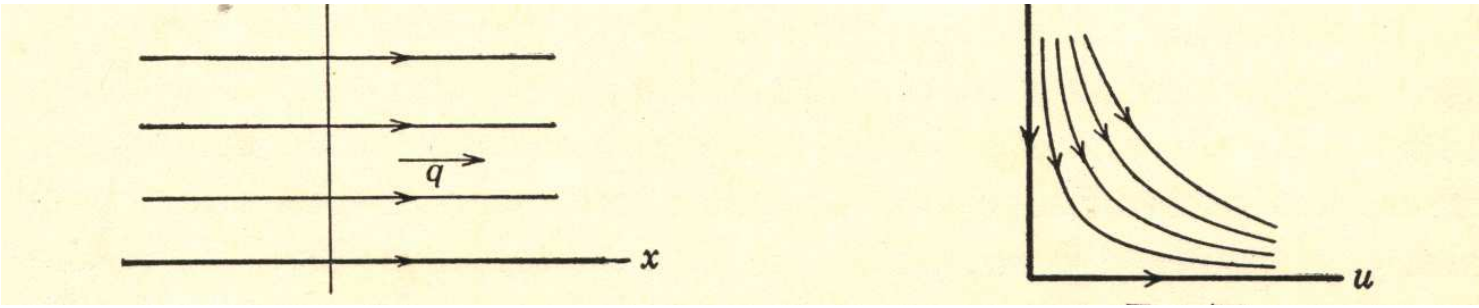


Fig. 6: escolha do mapeamento para o problema da esquina.

Como na §3.1, o potencial para o semi-plano $y > 0$ é Az então o potencial da esquina é

$$\omega_{proc} = Az = Aw^2 = A(u^2 - v^2 + i\,2uv)$$

As linhas de corrente que são $Ay = cste$ para o escoamento retilíneo uniforme se transformam em $uv = cste$ i.e. são hipérbolas.

A velocidade complexa é

$$\overline{\frac{d\omega}{dw}} = 2A(u - iv)$$

daí o módulo da velocidade é $2A\sqrt{u^2 + v^2}$, o que é proporcional à distância da partícula em relação à origem.

3.3 Aerofólio de Joukowski

A transformação de Joukowski é a transformaçãoa do §2.3 que mapea um círculo em segmento,

$$f(z) = (d/2)(z + 1/z)$$

mas desta vez supomos que o círculo é centrado em $z_0 = x_0 + iy_0$.

Neste caso, o círculo é mapeado na forma indicada embaixo, chamada aerofólio:

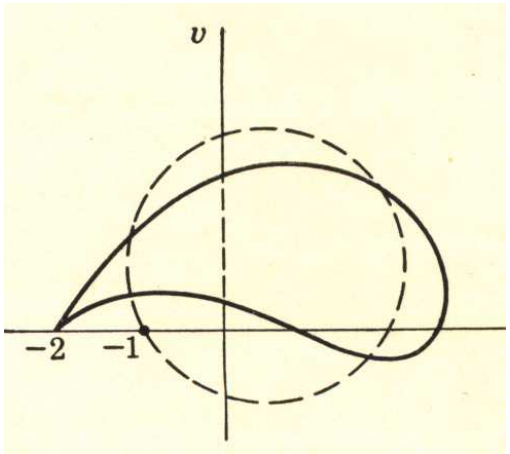


Fig. 7: mapeamento cilindro-aerofolio.

Calculamos a função inversa de f, que mapea o aerofólio num cilindro resolvendo $(d/2)(z + 1/z) = w$

$$F(w) = \frac{w}{d} + \sqrt{\left(\frac{w}{d}\right)^2 - 1}$$

O potencial pode ser então obtido a partir do potencial do cilindro.

Este tipo de transformação foi muito usado para estudar asas de avião (para mais informações, ver cap. XVI e XVII da ref. 4).

3.4 Cilindro em rotação num escoamento retilíneo uniforme

No problema do cilindro colocado numa correnteza uniforme na §3.1, a solução não é única sob ponto de vista matemático. Existe uma outra solução satisfazendo as condições de contorno $v_n = 0$ sobre o cilindro e $\vec{v} = 0$ no infinito e, portanto, podemos somar esta à anterior, obtendo uma solução mais completa. (Do ponto de vista matemático, a condição de contorno $\partial\phi/\partial n$ não é suficiente para determinar completamente a solução da equação $\nabla^2\phi = 0$, numa região multiplamente conexa como no caso).

O potencial $\omega = -i(\Gamma/2\pi)\ln z$, estudado na §1.3, satisfaz as condições de contorno mencionadas acima: (i) vimos que no escoamento descrito por ω as linhas de corrente são circulares e portanto $\vec{v}$ é tangente à superfície cilíndrica, (ii) calculamos que $v = v_\theta = \Gamma/2\pi r$ e, portanto, $v \to 0$ no infinito. A solução geral do problema do cilindro é, então,

$$\omega = A\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z}\right) - i\,\frac{\Gamma}{2\pi}\,\ln\frac{z}{R}, \tag{7.20}$$

onde Γ é a circulação ao redor do cilindro.

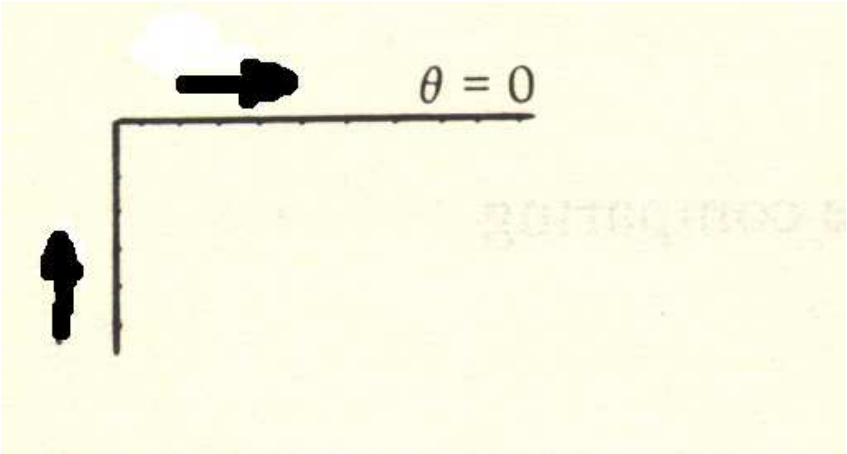
Esta solução é válida para o caso do cilindro parado ($\Gamma = 0$) ou em rotação ($\Gamma \neq 0$) no escoamento retilíneo uniforme. Ela é ilustrada na figura 15 da aula anterior.

4 Exercícios

1. Desenhar as linhas de corrente $\psi = cste$ e equipotenciais $\phi = cste$ dos escoamentos bidimensionais descritos pelos potenciais complexos $f = \phi + i\psi$ seguintes e concluir sorbe a natureza destes escoamentos'

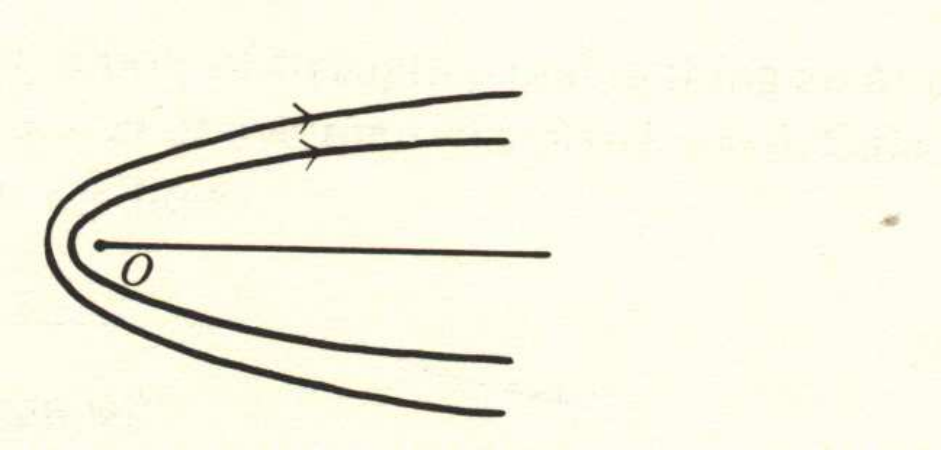
a) $f(z) = Vz$ com V real.
b) $f(z) = C \ln z$ com C real.
c) $f(z) = iC \ln z$ com C real.
d) $f(z) = az^2/2$ com a real.
e) $f(z) = V(z + a^2/z)$ com V, a reais.
f) $f(z) = C \ln(z - \epsilon)$ com C, ϵ reais.
g) $f(z) = C \ln[(z - \epsilon)/(z + \epsilon)]$ com C, ϵ reais.
h) $f(z) = V(z + a^2/z) - iC \ln(z/a)$ com V, C, a reais.
(Fácil)

2. Considere escoamento de um fluido incompressível contornando uma esquina (de 90°) como se mostra na figura ao lado.



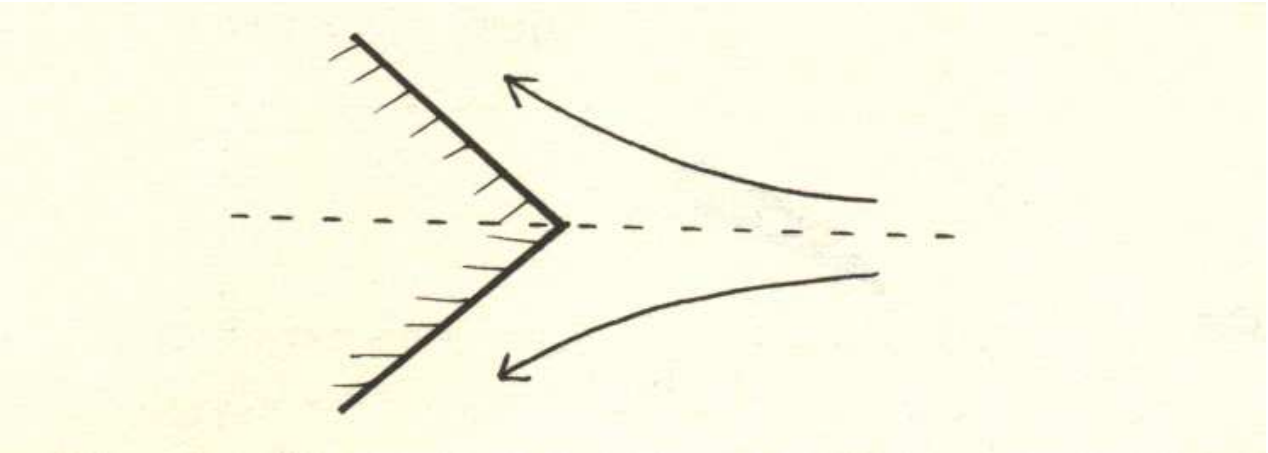
a.) Escreva o potencial complexo do problema.
b) Determine as equipotenciais e as linhas de corrente.
(Dica: procurar $w \to w^k$.)
(Fácil)

3. Mesmas perguntas do que o 2 com



(Fácil)

4. Coloca-se uma cunha de ângulo reto contra uma corrente estacionária bidimensional de um certo fluido perfeito de densidade ρ (ver a figura), de tal modo que, a uma distância x_0 da aresta, a pressão é p_0 e a velocidade $\vec{v}_0$ dirigida para a aresta.



a) Escreva o potencial complexo ω para este problema.
b) Determine o módulo da velocidade.
c) Calcule a pressão exercida sobre a cunha.
(Dica: procurar $w \to w^k$; usar o escoamento $-Az$; resolver na metade de cima)
(Médio)

5. Estudamos no plano complexo $z = x + iy$ o potencial complexo $f(z) = \phi + i\psi = Vz + [q/(2\pi)] \ln z$.

a) Podemos considerar este escoamento como superposição de outros dois. Quais?

b) Mostrar que $\psi = q/2$ tem um ponto de estagnação.

Desenhar esta curva toda.

(Em particular ela tem uma parte em U que se estende até o infinito.)

c) Argumentar que se pode subsituir a linha $\psi = q/2$ por uma parede sólida da mesma forma sem modificar o escoamento.

(Médio)

6. Considere o potencial complexo $\omega(z)$ definido pela função inversa $z = \omega + e^{\omega}$.

a) Desenhe as linhas de corrente $\psi = 0$ e $\psi = \pm\pi$.

b) Mostre que, para $\phi << -1$ e $-\pi < \psi < \pi$, o potencial tende a $\omega(z) \simeq z$, isto é, neste limite êle corresponde a um escoamento uniforme.

c) Mostre que, para $\phi >> 1$ e $-\pi < \psi < \pi$, o escoamento tende ao proveniente de uma fonte puntiforme.

d) Baseado nos resultados obtidos nos ítens anteriores, diga o que poderia representar esse escoamento?

(Médio)

7. Prova 2 (2009):

Exercício 1.

Para modelizar um ciclone, pode se usar em primeira aproximação, um modelo com as características seguintes:
- o fluido é perfeito e incompressível
- o escoamento é bidimensional, e usamos coordenadas polares para o descrever
- a velocidade do ar no ciclone é

$\vec{v}(r) = \Omega r \hat{\theta}$ se $r \leq R$

$\vec{v}(r) = \Omega R^2 / r \hat{\theta}$ se $r > R$.

Parte I

a) (0,5) Fazer um gráfico de $v(r)$, anotando a velocidade máxima.

b) (1,0) Verificar que a equação de continuidade é satisfeita.
Calcular a função de corrente $\psi(r, \theta)$. (Ajustar as constantes de integração de modo que $\psi(r = 0) = 0$ e ψ contínua em $r = R$.)

c) (1,0) Calcular $\nabla \times \vec{v}$ para $r \leq R$ e $r > R$.
Calcular a função potencial $\phi(r, \theta)$ na região onde o escoamento é irrotacional.

d) (1,0) Se $r > R$: supondo o escoamento estacionário, desprezendo a gravitação e impondo a condição no infinito $p = p_{atm}$, derivar uma equação de tipo Bernouilli e obter $p(r)$.

e) (1,0) Se $r \leq R$: supondo o escoamento estacionário, desprezendo a gravitação e impondo a condição de continuidade em $r = R$, derivar uma equação para $\partial p / \partial r$ e obter $p(r)$.

Parte II

a) (1,0) Usando o teorema de Stokes, calcular a circulação Γ nas regiões $r \leq R$ e $r > R$. (Cuidado: ambas são $\neq 0$.)

b) (1,0) Na região $r > R$, podemos definir o potencial complexo $\omega = \phi + i\,\psi$. Sabemos também que o potencial complexo para um escoamento de tipo turbilhão é $\omega = -(i\Gamma/(2\pi))\ln z$ com $z = r\,e^{i\theta}$. Calcular ϕ e ψ e comparar com os resultados anteriores.(Pode-se adionar uma constante a ω.)

c) (1,0) Calcular as equipotenciais e linhas de corrente.

d) (0,5) Onde é a região de pressão mais baixa e como circula o vento no ciclone?

5 References

References

[1] Y.Hama "Mecânica dos fluidos" notas de aula.

[2] R.V.Churchill "Introduction to complex variables and applications" Mc Graw-Hill 1948.

[3] M.D.Catani "Elementos de mecânica dos fluidos" Blücher 1990.

[4] A.R. Paterson "A first course in fluid dynamics" Cambridge U.Press 1997.