Cap. VIII FLUIDOS VISCOSOS (continuação)

Na primeira parte deste capítulo, vimos como escrever explicitamente a força de viscosidade na equação de movimento de um pedaço de fluido *incompressível*, que passa a se chamar não mais de equação de Euler, mas de equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{\vec{f}_{int}}{\rho}$$

onde a força $\vec{f}_{int}$ incorpora as forças de superfície de pressão e de viscosidade

$$\vec{f}_{int} = \vec{f}_{press} + \vec{f}_{visc}.$$

(A gravidade pode ser incluida como na equação de Euler).
Vimos que[1]

$$(f_{int})_i = +\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

com

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

e

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Usando $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = 0$, obtivemos

$$(f_{int})_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right)$$

[1] A convenção para os sinais da derivada em $(f_{int})_i$ e na definição de σ_{ij} nas duas equações que seguem é oposta em certos livros.

de modo que:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{-\vec{\nabla} p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 \vec{v}$$

Podemos também calcular o efeito de um fluido sobre uma superfície sólida. No caso de um fluido perfeito, o fluido tem velocidade tangencial em relação ao sólido. No caso de um fluido viscoso, o fluido é parado na interface com o sólido. Isto permite calcular as forças exercidas pelo sólido sobre o fluido com

$$dF_i = (f_{int})_i \, dV = \sigma_{ij} \, dS_j$$

1 Equação de Navier-Stokes para um fluido qualquer[1, 2]

A extensão do que fizemos para um fluido compressível é bastante simples.

Como $\vec{\nabla}\vec{v} \neq 0$ geralizamos:

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + K \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij}$$

É comun re-escrever esta equação como

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij}$$

A equação de Navier-Stokes se torna então:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{-\vec{\nabla} p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 \vec{v} + \frac{(\zeta + \frac{1}{3}\eta)}{\rho} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}).$$

η é a viscosidade de cisalhamento ou dinâmica e ζ a viscosidade de volume (em geral pequena).

A seguir consideremos somente fluidos incompressíveis (não tem o terma em ζ). O coeficiente de viscosidade η corresponde ao coeficiente de difusão do momento. É graça a viscosidade que o movimento de uma camada de fluido pode induzir um movimento nas camadas vizinhas. Este coeficiente depende da temperatura. Com temperatura crescente, ele diminue para um líquido (cf. fig.1 esquerda para a água) e aumenta para um gas (cf. fig.1 direita para o ar).

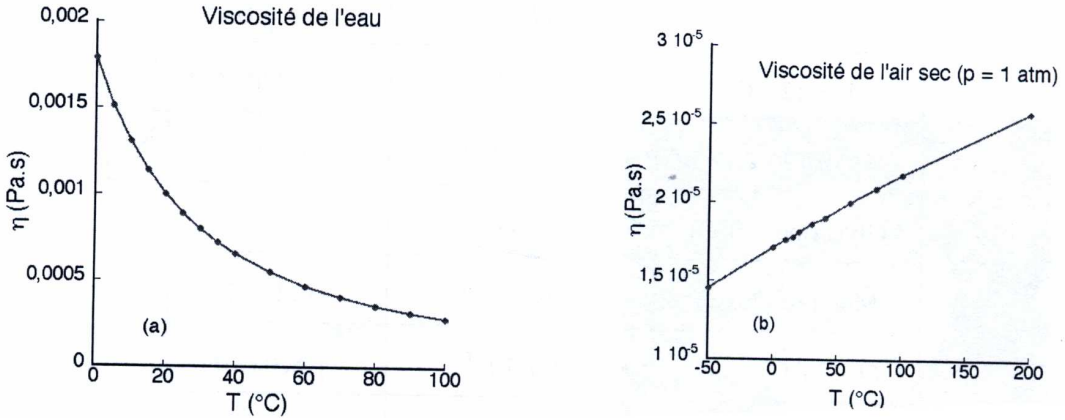


Fig.1 Dependência da viscosidade de cisalhamento na temperatura (dados [3]).

2 Dissipação de energia num fluido viscoso[1, 2]

A ocorrencia de viscosidade leva à dissipação de energia, que no final é transformada em calor. O calculo da dissipação de energia num fluido viscoso incompressível é "simples [2]".

Considerando um volume V do fluido, delimitado por uma superfície fechada S, a variação da energia cinética com o tempo pode ser escrita

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\rho}{2}\int_V \frac{\partial v^2}{\partial t}\, dV = \rho \int_V \vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\, dV \quad .$$

Substituindo $\partial\vec{v}/\partial t$ com o auxílio da equação de Navier-Stokes e lembrando que $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$, podemos reescrever a função integranda como

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\tfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} &= -\vec{v}\cdot(\,\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\,)\,\vec{v} - \tfrac{\vec{v}\cdot\vec{\nabla}p}{\rho} + \tfrac{\eta}{\rho}\vec{v}\cdot(\,\vec{\nabla}^{\,2}\vec{v}\,) = -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\,)\Big[\,\tfrac{v^2}{2}+\tfrac{p}{\rho}\,\Big] + \tfrac{\eta}{\rho}\,v_i\Big[\,\tfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\partial x_k} + \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\tfrac{\partial v_k}{\partial x_k}\Big)\,\Big] \\
&= -\vec{\nabla}\cdot\Big[\,\vec{v}\,\Big(\tfrac{v^2}{2}+\tfrac{p}{\rho}\Big)\Big] + \tfrac{\eta}{\rho}\,\tfrac{\partial}{\partial x_k}\Big[\,v_i\Big(\tfrac{\partial v_i}{\partial x_k}+\tfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big)\Big] - \tfrac{\eta}{\rho}\tfrac{\partial v_i}{\partial x_k}\Big(\tfrac{\partial v_i}{\partial x_k}+\tfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big) \\
&= -\vec{\nabla}\cdot\Big[\,\vec{v}\Big(\tfrac{v^2}{2}+\tfrac{p}{\rho}\Big)\Big] + \tfrac{\partial}{\partial x_k}\Big[\,\tfrac{\eta v_i}{\rho}\Big(\tfrac{\partial v_i}{\partial x_k}+\tfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big)\Big] - \tfrac{\eta}{2\rho}\Big(\tfrac{\partial v_i}{\partial x_k}+\tfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big)^2 \quad .
\end{aligned}$$

(para passar da 2a a 3a igualidades na 1a linha, usamos nossa fórmula familiar $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = (1/2)\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v}) + (\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v}$ e $\vec{\nabla}\cdot v = \partial v_k/\partial x_k = 0$. Na 2a linha, usamos $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}f\vec{v}$ já que $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$. Também precisa fazer um pouco de acrobacia com os índices...)
Portanto,

$$\frac{dE_c}{dt} = -\int\vec{\nabla}\cdot\Big[\,\rho\vec{v}\Big(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\Big)\Big]dV + \int\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[\,\eta v_i\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big)\Big]dV - \frac{\eta}{2}\int\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big)^2 dV \quad .$$

Usando agora o teorema de Gauss, chegamos finalmente a

$$\frac{dE_c}{dt} = -\oint_S \rho\vec{v}\Big(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\Big)\cdot\vec{dS} + \oint \eta v_i\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big)\,dS_k - \frac{\eta}{2}\int\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big)^2 dV \quad .$$

Os dois primeiros termos desta expressão representam a variação da energia cinética do fluido devido ao transporte direto (através da superfície S) e o último termo é devido à dissipação. Em particular, se $S\to\infty$, os dois primeiros termos tendem

a 0 (no referencial em que o fluido está em repouso a grandes distâncias). (Se existirem superfícies sólidas, as duas primeiras integrais serão nulas sobre elas, pois $\vec{v} = 0$ lá). Portanto, a variação da energia cinética de todo o fluido é

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{\eta}{2}\int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV \quad .$$

O sinal menos é porque há dissipação de energia.

3 Adimensionamento da equação de Navier- Stokes

A equação de Navier-Stokes de um fluido incompressível se escreve:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{-\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v}$$

No termo de esquerda, o primeiro termo é chamado termo instacionário e o segundo termo inercial. No termo de direita, os termos são devidos respectivamente as forças de pressão, de volume e viscosas. Esta equação é escrita por unidade de massa e queremos a adimensionar.

Introduzemos:
$t = t'T$, $x_i = x_i'L$, $v = v'V_0$, $p = p'P_0$ e $\vec{g} = \vec{g}'G$, onde as letras majusculas correspondem a quantidades dimensionadas e as letras com linha a variaveis adimensioanadas. A equaçãode Navier-Stokes se re-escreve:

$$\frac{V_0}{T}\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \frac{V_0^2}{L}(\vec{v}'\cdot\vec{\nabla}')\vec{v}' = -\frac{P_0}{L}\frac{\vec{\nabla}'p'}{\rho} + G\vec{g}' + \frac{\eta}{\rho}\frac{V_0}{L^2}\nabla'^2\vec{v}'$$

ou fazendo aparecer um coeficiente unidade na frente do termo inercial:

$$\frac{L}{V_0 T}\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}')\vec{v}' = -\frac{P_0}{V_0^2}\frac{\vec{\nabla}' p'}{\rho} + \frac{LG}{V_0^2}\vec{g}' + \frac{\eta}{\rho}\frac{1}{V_0 L}\nabla'^2 \vec{v}'$$

Muitos problemas que consideraremos envolvem um fluido escoando sobre um obstáculo. Assim consideramos o caso de um objeto de dimensão L (perpendicular á velocidade) deslocando-se com velocidade V_0 num fluido em repouso. L e V_0 são as únicas escalas do problema. Não tem escala independente de tempo ou pressão. Supomos também que a gravidade não é importante. Podomos construir $T = L/V_0$ e $P_0 = \rho V_0^2$. Obtemos a equação adimensionada:

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}')\vec{v}' = -\frac{\vec{\nabla}' p'}{\rho} + \frac{1}{Re}\nabla'^2 \vec{v}'$$

onde definimos o número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho V_0 L}{\eta}$$

(Se a esfera for parada no escoamento, o terma instacionário pode sumir.)

A grande vantagem desta equação adimensionada é a seguinte: quando a resolvemos para um valor de Re dado, todos os problemas que tem o mesmo Re tem a mesma solução. Isto é a ideia atràs dos testes de arrasto em tunel de vento com modelo reduzido (cf. exercícios).

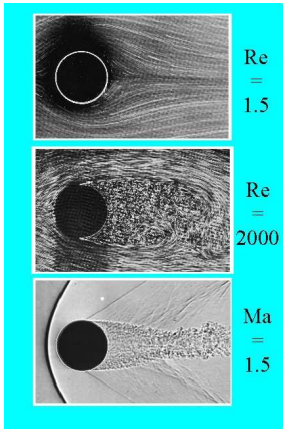
O número de Reynolds apareceu como a razão entre termo inercial e termo viscoso

$$Re = \frac{||(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}||}{||\eta/\rho \nabla^2 \vec{v}||} = \frac{V_0^2/L}{\eta/\rho \; V_0/L^2} = \frac{\rho V_0 L}{\eta}$$

No caso $Re \to 0$, os efeitos viscosos dominam. O escoamento é laminar (elementos de fluido vizinhos permanecem vizinhos). No caso $Re \to \infty$, os efeitos inerciais dominam, o escoamento vira turbulento ($\vec{v}(t, x, y, z)$ varia aleatoriamente.) Para valores intermediarios, (entre 1 e 2000), as forças de inercia são preponderantes mas o escoamento permanece laminar.

Alguns valores de número de Reynols são:
- uma paramecia nadando na água $Re \sim 10^{-2}$
- uma gota chuva caindo no ar $Re \sim 1000$
- o arrasto de um pedestre $Re \sim 4 \times 30\,000$
- o arrasto de um carro $Re \sim 4 \times 10^6$
- o arrasto de um avião $Re \sim 2 \times 10^8$.

Fig. 2: O escoamento atrás de uma esfera para valores crescentes do número de Reynolds passa de laminar a turbulento.



Para um fluido passando por um obstáculo, existe dois regimes: longe onde o escoamento não é perturbado e a viscosidade não é inportante e perto, onde o momento pode difusar devido a viscosidade. A região perto do obstáculo é chamada camada-limite e precisa ser tratado com a equação de Navier-Stokes. A região fora pode ser tratada como um fluido perfeito.

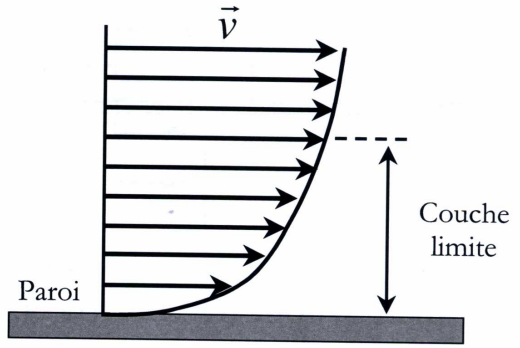


Fig. 3: Escoamento com velocidade $\vec{v}$ sobre uma parade parada, na camada limite a velocidade do fluido se ajusta de zero contra a parede (como tem que ser devido a viscosidade) a $\vec{v}$.

Em velocidade alta, a camada limite pode se separar da parede e aperecerem vórtices. Este descolamento é importante por exemplo para aviões porque ele corresponde a uma queda abruta da força de sustentação (cf. §5).

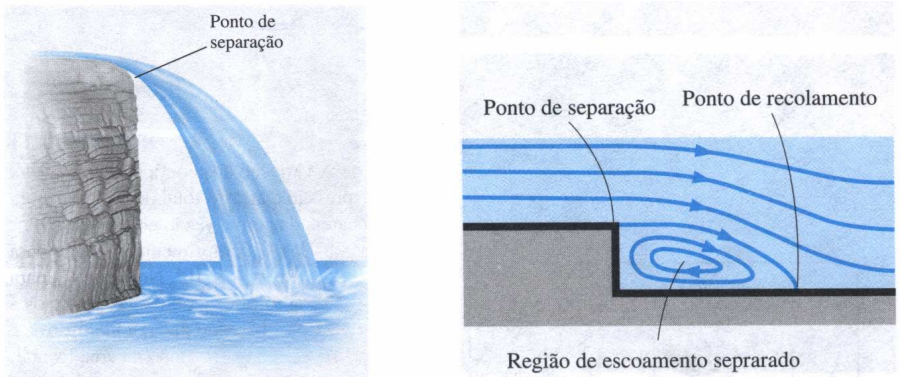


Fig. 4: Separação do escoamento em uma queda de água e no degrau de uma parede.

Este tipo de raciocínio (usando o número de Rynolds e a equação de Navier-Stokes adimensionada) pode ser aplicado a problemas onde aparece uma escala de pressão P_0 ou tempo T, efeitos de gravidade, vários tamanhos. Alguns outros números podem ser introduzidos (Strouhal, Froude, Euler) nestes casos.

4 Escoamento ao redor de uma esfera

Chama-se escoamento paralelo, um escoamento unidirecional e invariante ao longo do escoamento ($\vec{v} = (v_x(y), 0, 0)$ ou $\vec{v} = (v_x(y, z), 0, 0)$). Os escoamentos de Couette e de Poiseuille são deste tipo. Vimos que neste caso de escoamento paralelo, $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$ e automaticamente $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. A equação de Navier-Stokes tem só termos lineares $\vec{\nabla} p$ e $\vec{\nabla}^2 \vec{v}$ (eventualemente $\vec{g}$) e fica relativamente simples de resolver.

Existe um outro caso interessante onde podemos resolver esta equação de Navier-Stokes, um escoamento estacionário com

obstaculo e número de Reynolds pequeno. O termo inercial $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$ pode ser desprezido e a equação a resolver fica:

$$0 = \frac{-\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v}$$

Isto é a equação de Stokes.

Consideraremos o caso onde o obstaculo é uma esfera de raio R e o escoamento tem velocidade $\vec{u}$. Vamos mostrar que a força de atrito é

$$\vec{F} = 6\pi\eta R\vec{u}$$

Esta força é chamada força de Stokes.

No curso de Física experimental I, voces talvez ouviram falar desta força, numa experiência de queda de uma esfera num tubo com óleo. Procurava-se obter a velocidade limite v_L da esfera quando ela está em equilíbrio sob os efeitos da força de peso, do empuxe devido aos gradientes de pressão e a força de atrito viscoso ou força de Stokes. A previsão teórica para v_L (vezes uma correção para levar em conta que o diametro do tubo é finito) é que ela varia linearmente com o raio da esfera ao quadrado.

Um exemplo de campo de aplicação desta fórmula são a descrição do movimento de grães num fluido, por exemplo grães individuais de areia na areia-fluido com vento não muito forte. Sobre este assunto, pode-se ver o colôquio (na videoteca do Instituto) de:

Hans Herrmann "A Física das Dunas".

Outro exemplo de aplicação são os esportes com bola (cf. exercícios).

Esboço aquí as grandes linhas do cálculo da força de Stokes. Um outro método pode ser encontrado em [1, 2].

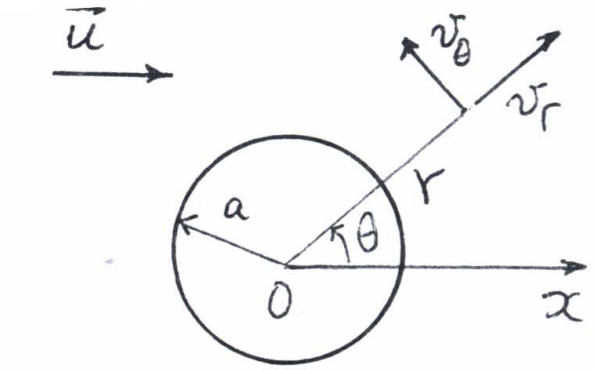


Fig.5: escoamento axi-simétrico ao redor de uma esfera.

Supomos o escoamento estacionário e axisimétrico ao redor de Ox (desprezamos a gravidade):

$$\vec{v} = v_r(r,\theta)\hat{r} + v_\theta(r,\theta)\hat{\theta}$$

e as condições de contorno são

$\vec{v} = 0$ em $r = R$ e $\vec{v} = u\hat{x}$ se $r \to \infty$,

o que podemos re-escrever

$u_r = u_\theta = 0$, $u_r = u\cos\theta$ e $u_\theta = -u\sin\theta$ se $r \to \infty$.

A função de Stokes [4] (que faz um papel similar a função de corrente) em coordenadas esféricas pode ser calculada e é da forma $\psi = u\sin^2\theta(A/r + Br^2 + Cr/2)$ com A, B, C constantes a determinar com as condições de contorno. Acha-se

$$\psi = -\frac{1}{2}ur^2\sin^2\theta(1 - \frac{3}{2}\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3})$$

com isto pode-se calcular a velocidade

$$u_r(r,\theta) = u\cos\theta(1 - \frac{3}{2}\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}) u_\theta(r,\theta) = -u\sin\theta(1 - \frac{3}{4}\frac{R}{r} + \frac{1}{4}\frac{R^3}{r^3})$$

e com a equação de Stokes obtemos a pressão

$$p(r,\theta) = P_0 - \frac{3}{2}\frac{\eta u R}{r^2}\cos\theta.$$

A partir de $\vec{v}$ e p pode-se calcular as componentes do tensor $\sigma_{i,j}$[2] e obter:
$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = -p$ e
$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \eta\partial v_\theta/\partial r$.
Os outros σ's são nulos.

Com isto pode-se calcular a força ao longo de Ox:
$dF_x = dF_r\cos\theta - dF_\theta\sin\theta = \sigma_{rr}dS_r\cos\theta - \sigma_{r\theta}dS_r\sin\theta = (3\eta/2)u/R$
de modo que
$F_x = 6\pi\eta R u$, isto é a fórmula de Stokes.
A existência desta força vindo da viscosidade resolve o paradoxo de d'Alembert, de como por exemplo uma bola de pingue-pongue pode ficar em equilibrio num jato de ar vertical.
Pode-se verificar também que a força transversal de sustentação é nula como esperado par este caso axisimétrico.

Pode surprender o fato da força de arrasto depender na velocidade: qual é a vantagem então de chutar forte e dar muita velocidade a uma bola? Para responder a esta pergunta, referemos aos exercícios e por enquanto notamos o seguinte.

Para qualquer número de Reynolds, o coeficiente de arrasto de um objeto de seção S num escoamento de velocidade $\vec{u}$, é definido a partir da força de arrasto F_A:

$$C_A = \frac{F_A}{\frac{1}{2}\rho u^2 S}$$

Para uma esfera e um número de Reynolds pequeno, usando a expressão de Stokes, temos:

$$C_A = 24/Re.$$

Experimentalmente, esta expressão vale até $Re \sim 1$. Existem outras fórmulas aproximadas para outros intervalos de Re.

5 Aplicação às asas de avião

O estudante de mecânica de fluidos provavelmente ficaria frustrado se saisse do curso sem ter abordado o assunto de como voam os aviões. (Afinal temos que usar este modo de transporte dia ou outro.) As ideias desenvolvidas neste capítulo permitem abordar este tópico.

A priori sabemos a resposta: se a velocidade do ar sobre uma asa for menor na face de baixo do que a de cima, usando a lei de Bernouilli, há uma diferencça de pressão e então uma força de sustentação. Esta diferença de velocidade aparece se tiver alguma circulação em volta da asa (efeito Magnus). O problema é que para usar a lei de Bernouili, precisamos supor o fluido perfeito. Além disto para um fluido perfeito, se a circulação for inicialmente nula, ela deveria permancer assim.

A viscosidade é fundamental para entender o que acontece. Vimos na §3 que com viscosidade, podem aparecer vórtices num escoamento. Isto é tambem representado na fig. 6.

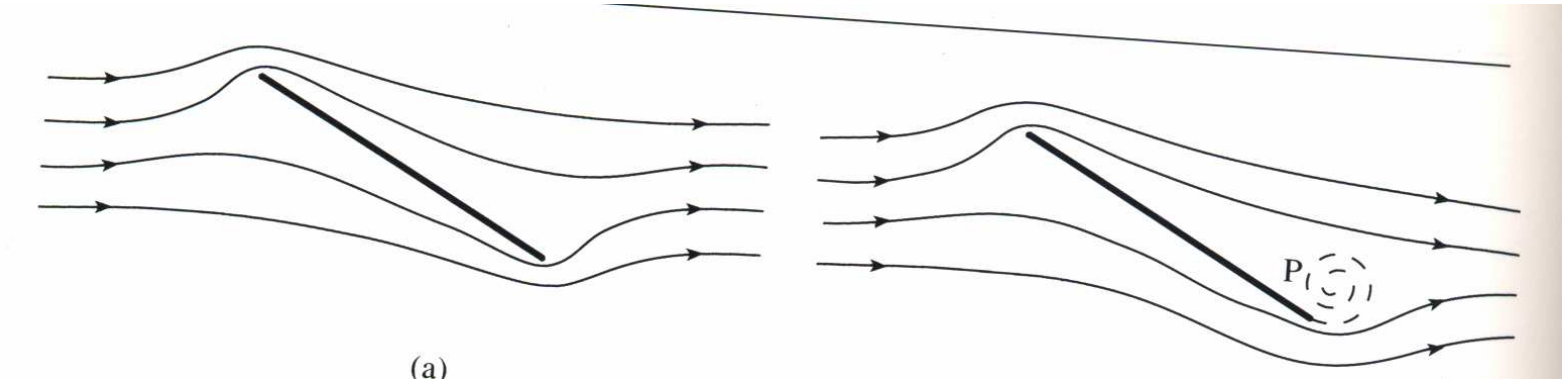
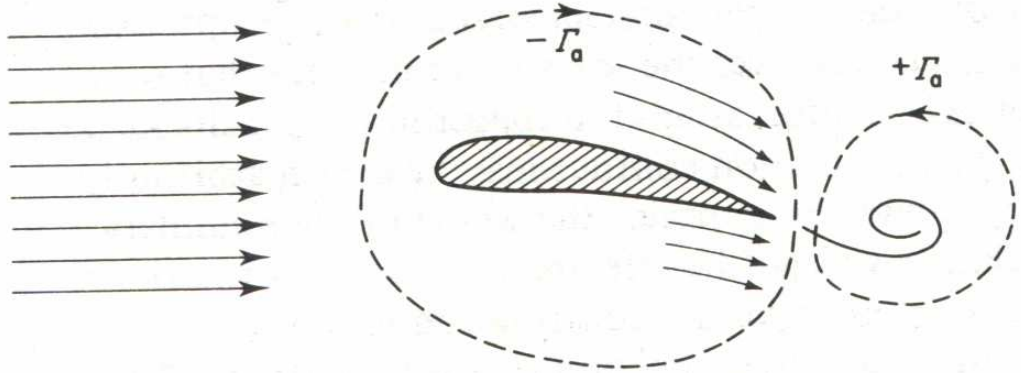


Fig.6: aparecimento de vórtices numa asa de avião.

O turbilhão que se forma na extremidade da asa (no encontro do ar vindo de cima da asa com o vindo de baixo) é compensado por outro turbilhão aoredor da asa. O turbilhão na extremidade se despreende.



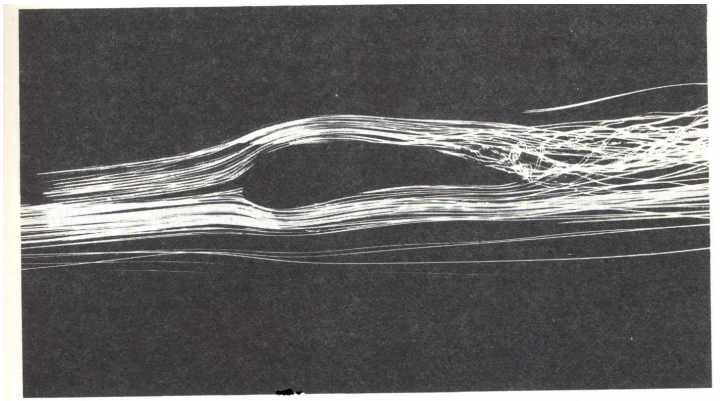


Figure 10.19 Helium bubble in air flow visualization around an aerofoil

Fig.7: vórtice na ponta da asa compensado por outro aoredeor da asa.

Este vórtice aoredor da asa permite ter diferença de velocidade, então de pressão e sustentação.

Fig.8: visualização dos vórtices num avião fazendo uma pulverisação acima de campos.

A razão pela qual podemos usar a lei de Bernouilli que vale para fluidos perfeitos, é que para número de Reynolds elevado (como é a caso para aviões) a camade limite é fina. (Nessa explicação, a viscosidade teve papel para entender a aparição de vórtices.)

Para um objeto num escoamento uniforme, além do coeficiente de arrasto

$$C_A = \frac{F_A}{\frac{1}{2}\rho u^2 S}$$

é comum introduzir o coeficiente de sustentação:

$$C_S = \frac{F_S}{\frac{1}{2}\rho u^2 S}$$

onde F_S é a força de sustentação de tipo efeito Magnus que acabamos de estudar para avião. Estes coeficientes dependem da inclinação entre asa e escoamento, o avião pode perder a sustenção se este ângulo for grande.

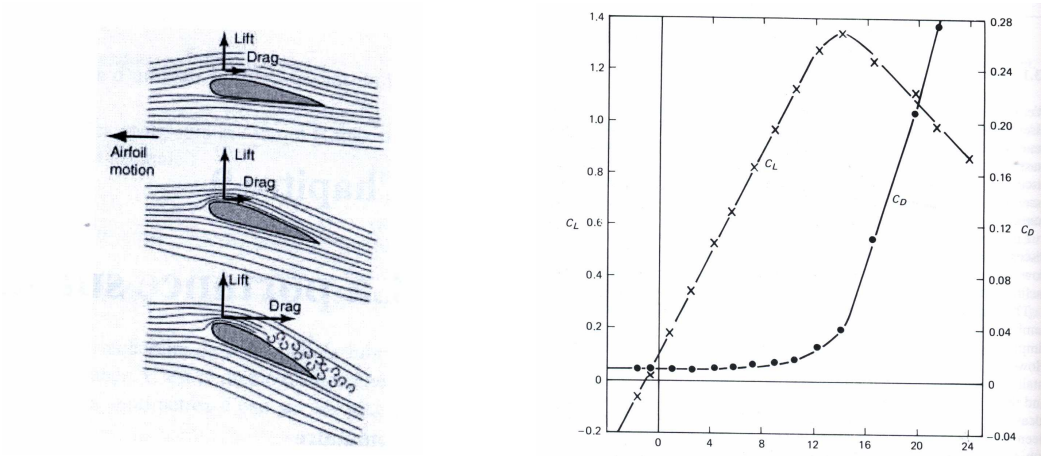


Fig.9: perda de sustentação para inclinação grande. $C_L = C_S$ (L: "lift")e $C_D = C_A$ (D:"drag").

Sobre o assunto desta seção, pode-se ver o colôquio (na videoteca do Instituto) de:
Eduardo Ernesto Castellano "Física e Aeronáutica, uma tournée amadora".

6 Exercícios

1. O arrasto aerodinâmico de um novo automóvel esporte deve ser testado a uma velocidade de 75,0 km/h em ar com temperatura de 25^0C. Os engenheiros automotivos criaram um modelo em escala um para cinco do automóvel para testá-lo em tunel de vento. É inverno e o ar no túnel de vento están a 5^0C Determine a velocidade do vento que os engenheiros devem colocar no túnel de vento para atingir a similaridade entre o modelo e o protótipo.
Para o ar a pressão atmosférica e T=25^0C, $\rho = 1,184\, kg/m^3$ e $\eta = 1,849 \times 10^{-5} kg/m \cdot s$. Da mesma forma a T=$5^0C$, $\rho = 1,269\, kg/m^3$ e $\eta = 1,754 \times 10^{-5} kg/m \cdot s$.

2. Usando argumentos de similitude, explicar porque
a)as crianças andam descalças sobre pedrinhas mais facilmente do que adultos.
b) não tem animal maior do que 50 metros na terra.

3. Usando

$$(f_{int})_i = +\frac{d\sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

com

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

e

$$\sigma'_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

obter a equação de Navier-Stokes de um fluido incompressível.

4. Vimos na naula, que acima de um certo número de Reynolds, os escoamentos passam de laminar a turbulento. Para determinar este número demaneira caseira [5], pode se proceder como descrito neste exercício.
Duas pessoas deixam a água escorrer de uma torneira de o,8cm de raio, aberta o suficiente para que bolinhas de ar comeńcam

a se agitar nos limites do escoamento. Elas contam que em 10s, sai 450 ml de água. Calcular o número de Reynolds deste escoamento (a viscosidade da água é 0,001 N s m^{-2} e pode-se usar o raio da torneira como dimensão característica apesar do que o diametro também seria uma escolha possível [5]).

5. Uma partícula de 1 mm de diametro e densidade 1.1 10^3 kgm^{-3} cai livremente do repouso em óleo de densidade 0.9 10^3 kgm^{-3} e viscosidade 0.03 N s m^{-2}.
a)Supondo que a lei de Stokes se aplica, obter $v(t)$.
b)Quanto tempo a partícula leva para atingir 0.99 % de sua velocidade limite? Qual é o número de Reynolds correspondando a esta velocidade limite?

6. Considere um cilindro de comprimento infinito em movimento de rotação constante (velocidade angular ω) dentro de um líquido viscoso.
a) Usando um raciocínio análogo ao caso de escoamentos unidirecionais, mostre que, neste caso, $\vec{v}(r,\phi,z) = v_\phi(r)\hat{\phi}$ e a equação de Navier-Stokes se escreve

$$\begin{cases} \frac{v^2}{r} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \ , \\ 0 &= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) \ , \\ 0 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \ , \end{cases}$$

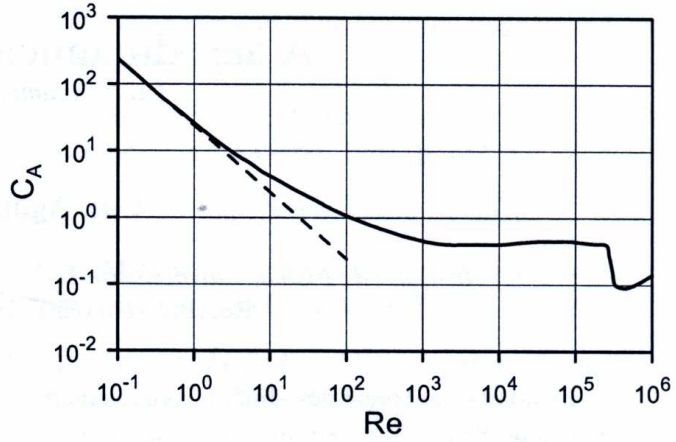
Lembre-se de que $(\partial\hat{r})/(\partial\phi) = \hat{\phi}$ e $(\partial\hat{\phi})/(\partial\phi) = -\hat{r}$ ($\hat{r}$ e $\hat{\phi}$ são versores).
b) Usando a simetria do problema e as equações do ítem a), conclua que $p = p(r)$ e a segunda equação se reduz a

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0 \ .$$

c) Determine a distribuição de velocidade, procurando soluções da equação acima na forma r^n.
d) Determine o torque por unidade de comprimento necessário para manter o cilindro em movimento uniforme.

7. Para que chutar uma bola forte?

O coeficiente de arrasto de uma esfera lisa em função do número de Reunolds, é mostrado na figura:



a) A partir da força de Stokes, mostrar que o coeficiente de arrasto pode ser escrito $24/Re$.

Até qual valor de Re vale esta expressão seguindo a figura?

b) Como varia C_A para Re entre 10^3 e $3\,10^5$?

Como varia a força de arrasto com a velocidade?

c)Calcular o número de Reynolds de uma bola de futebol (diametro 22 cm) de velocidade 25m/s, no ar ($\eta = 18,2\,10^{-6} Ps\,s$, $\rho = 1,20 kg/m^{-3}$ a $20^0 C$ e 1 atm).

Seguindo a figura, o que acontece com o coeficiente de arrasto para este valor de Re? Esta crise do arrasto, indesejável para um avião é utilisavel no futebol?

8. Um barco está alinhado com um vento de $v_v = 50$ km/h e numa corrente (perpendicular ao vento) de $v_c = 1$ km/h. As dimensões do barco são largura B=3m , altura fora da água H=1,5m, altura na água D=1m e comprimento na linha de água

L=8m.
a) Estes escoamentos são turbulentos?
b) Mostre que as forças de arrasto atuando sobre o barco são da forma $F_v \sim 1,2 v_v^2 \, BH$ e $F_c \sim 1000 v_c^2 \, LD$ e as calcular.
Procure os coeficientes ρ, η que voce precisa na lista de exercícios e usar como coeficiente de arrasto (muito aproximado) o de um paralelípedo ~ 2.

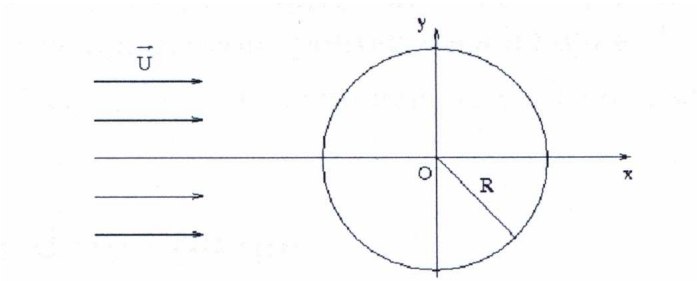
9. Prova 2 de 2010:

Parte I

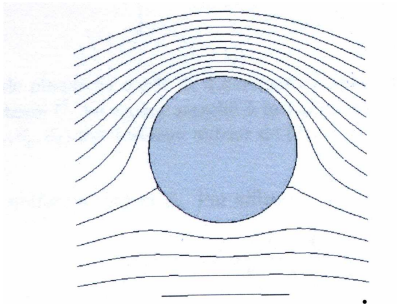
Um cilindro de raio R em rotação uniforme ω aoredor de seu eixo Oz, esta colocado no ar. Os efeitos da gravitação são despreziveis. O escoamento do ar longe do cilindro é uniforme com velocidade

$$\vec{U} = U\hat{x}$$

e ocorre à pressão p_0. O ar tem densidade de massa ρ.



a) Inicialmente o cilindro estava imóvel. Ele foi submetido a uma aceleração angular para comunica-lhe sua velocidade constante final ω. As linhas de corrente do ar são perturbadas como mostrado na figura abaixo. Porque isto não seria possível se o ar fosse um fluido perfeito? O que ocorre microscopicamente?



No resto da parte I e na parte II, o ar é tratado com um fluido perfeito incompressível.

b) Qual é condição necessária e suficiente para que a velocidade do escoamento seja da forma $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$?
Qual á condição geral (vista na aula) para que a velocidade do escoamento seja da forma $\vec{v} = \vec{\nabla} \times (\psi \hat{z})$?

c) Calcular ϕ e ψ sabendo que as componentes da velocidade do escoamento são:

$$\begin{cases} v_r &= U\,(1 - \frac{R^2}{r^2})\cos\theta \\ v_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r} - U\,(1 + \frac{R^2}{r^2})\sin\theta \end{cases}$$

d) Usando o traçado das linhas de corrente da figura acima, determinar para um $|y|$ fixo, para qual lado do cilindro ($y > R$ ou $y < -R$), o módulo v da velocidade de escoamento é maior.

e) Deduzir o sentido de rotação do cilindro (horario ou antihorario) e mostrar que $\Gamma < 0$.

f) Na figura com as linhas de corrente, existe dois pontos de estagnação (velocidade nula). Indicar numa figura a posição destes pontos. Chamamos θ_s a posição angular (em relação a Ox) de um deles.
Calcular Γ em função de $U, R, \sin\theta_a$.

g) Obter a expressão de $p(\theta)$ na superfície do cilindro em função de U, ρ, R, Γ, p_0

h) Chamamos $\vec{F}$ a força exercida pelo ar sobre o cilindro e h o comprimento de cilindro.
Usando a figura com as linhas de corrente, argumentar que a componente F_x é nula.

Calcular F_x com o resultado de g). O resultado é fisicamente razoavel?

i) Usando a figura com as linhas de corrente, argumentar que a componente F_y não é nula.

Calcular F_y em função de ρ, U, Γ, h.

Qual é o efeito desta força?

j) Se o ar tiver viscosidade pequena, como seriam modificadas as linhas de corrente? (pode-se fazer uma figura).

Parte II

Um escoamento bidimensional é descrito pelo potencial complexo

$$f = \phi + i\psi = U(z + \frac{R^2}{z}) - iC \ln \frac{z}{R}$$

a) Calcular ϕ e ψ.

b) Que tipo de escoamento f descreve?

c) Desenhar as linhas de corrente e equipotenciais.

Parte III

Consideramos o mesmo cilindro em rotação com velocidade angular constante ω no ar da parte I. Agora o ar é tratado como um fluido incompressível de viscosidade de cisalhamento η e velocidade longe do cilindro nula:

$$\vec{U} = 0.$$

O cilindro é suposto muito comprido, de modo que $\vec{v} = v(r,\theta)\hat{\theta}$.

a) Mostrar que $v(r,\theta) = v(r)$.

b) Mostrar que as equações do movimento podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \frac{v^2}{r} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho\, r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}\right) \\ 0 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Lembre-se de que $\partial\hat{r}/\partial\theta = \hat{\theta}$ e $\partial\hat{\theta}/\partial\theta = -\hat{r}$.

c) Mostrar que $p = p(r)$ e que portanto a segunda equação se reduz a

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0$$

d) Determine a distribução de velocidade, procurando soluções da equação do c) na forma r^n.
Determinar as constantes de integração.

e) Calcular o torque por unidade de comprimento necessário para manter o cilindro em movimento uniforme.

References

[1] Y.Hama, notas de aula.

[2] L.Landau “Fluid mechanics” Pergamon 1987.

[3] G.K.Batchelor “Introduction to Fldui dynamics”, Cambridge U. 1967.

[4] A.R.Paterson “A first course in fluid dynamics”, Cambridge U. 1983.

[5] V.Thomsen “Estimating the Reynolds number in the kitchen sink” The Physics Teacher 31 (1993) 410.