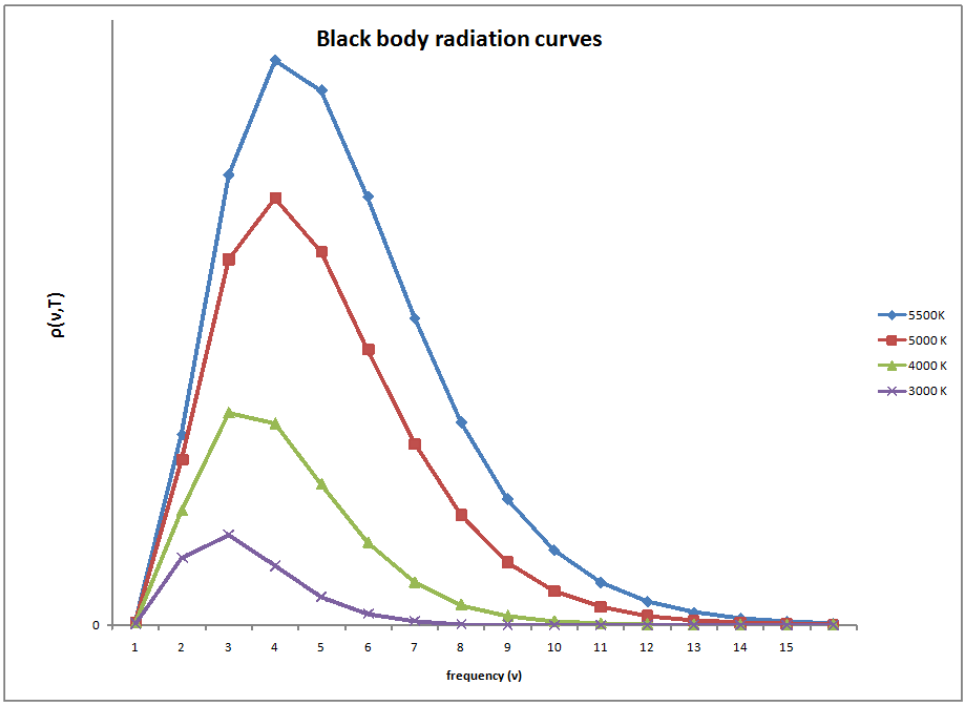
RADIAÇÃO DE CORPO NEGRO

Modelo de radiação eletromagnética em equilíbrio térmico em caixa perfeitamente refletora

- **desenvolvendo a matemática**
- **confrontando com o experimento**
- **ondas X fótons**

Proposta: (i) sigam o roteiro proposto; (ii) façam um pequeno dicionário de conceitos e símbolos matemáticos associados (comprimento de onda, vetor de onda, intensidade,...); (iii) anotem suas dúvidas e encaminhem pelo STOA – estaremos consultando periodicamente, 3 ou 4 vezes por dia, para responder; (iv) consultem, para auxílio, as notas de aula do Salinas, ou http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mod6.html#c4, ou http://phet.colorado.edu/en/simulation/blackbody-spectrum . (iv) entrega na 4ª-feira.



I. Considere as **ondas eletromagnéticas** dentro de uma caixa perfeitamente refletora.

1. Representação matemática de uma onda eletromagnética monocromática.
   a. Faça um desenho que represente o gráfico de uma onda eletromagnética monocromática (um único comprimento de onda), na direção do eixo x, em um determinado instante de tempo t_0.

b. Faça um segundo desenho que represente a mesma onda meio período T depois. Qual seria o período se esta onda representasse uma onda "azul"? e o comprimento de onda?
c. Escreva a função que representa esta onda, em função do comprimento de onda, do período T e da amplitude escolhida para a onda.
d. Escreva a função que representaria uma onda idêntica, mas na direção y. Faça o mesmo para a direção z.
e. Jutifique, a partir de sua resposta ao item d, a seguinte expressão para a função que descreve uma onda de campo elétrico monocromático:
$|f(r,t) = |Eo\ sen(|k.|r - wt)$
Identifique o vetor |k e explique seu significado físico. Explique também o que é w.

2. Energia média (**no tempo**) por unidade de volume em um ponto do espaço de **uma onda** eletromagnética monocromática.
   a. Escreva a função que descreva a oscilação no tempo do campo elétrico no ponto x=л/4. Calcule a amplitude média da onda neste ponto e a amplitude quadrática média.
   b. Escreva a expressão para a energia média por volume desta onda em um ponto qualquer do espaço e represente em um gráfico de energia/volume x posição no espaço x.
   c. Escreva duas funções que representem duas ondas eletromagnéticas com duas amplitudes diferentes (escolha a proporção entre as amplitudes). Qual é a diferença entre as energias médias por volume das duas ondas?

3. Média **térmica** da energia de ondas eletromagnéticas monocromáticas de mesmo comprimento de onda.
   a. Se tivermos duas ondas de mesma direção e comprimento de onda, mas com amplitudes diferentes, qual a probabilidade de cada uma delas, considerando o sistema a uma determinada temperatura?
   b. Represente em um gráfico a distribuição de probabilidades em função da energia total da onda dentro da caixa.
   c. Obtenha o valor médio da energia na caixa de todas as ondas que possuem essa mesma direção e mesmo comprimento de onda. Utilize o que você sabe sobre médias de energias quadráticas (consulte o apêndice).
   d. Considere agora ondas de mesmo comprimento de onda, mas direção perpendicular. O que muda em relação ao valor da média térmica da energia desta onda?
   e. Comente sobre a diferença entre a ***média no tempo*** e a ***média térmica***.

4. Quantas ondas de determinado comprimento de onda existem numa caixa perfeitamente refletora?
   a. Represente o corte de uma caixa cúbica perfeitamente refletora no plano x-y. No corte, represente as seguintes ondas com direção x: л/2=L, л=L, 3л/2=L, 2л=L,.... Verifique que podemos escrever uma expressão geral para o

comprimento de ondas estacionárias de campo elétrico (na caixa perfeitamente refletora) dada por: 1/ л =n/2L, para n=1, 2, 3,...

b. Represente o corte de uma caixa cúbica no plano x-y e desenhe três ondas estacionárias de mesmo comprimento de onda л, mas em ***direções*** diferentes. Escreva o vetor |k para cada uma delas (veja item 1d).

c. Discuta a expressão geral |k=π(nx, ny, nz)/L para o vetor de onda. Como podemos associar o vetor de onda |k e um determinado comprimento de onda ?

d. A energia total na caixa deverá ser dada pelo número de ondas com determinado número de onda k (independente da direção da onda) x energia média (sobre as diferentes amplitudes) da onda. Discuta esta afirmação e verifique se está de acordo com a expressão matemática
<energia total na caixa> =

$$< Energia\ das\ ondas\ eletromagnéticas\ na\ caixa > = \iiint_{-\infty}^{\infty} dnx\, dny\, dnz < energia\ térmica\ de\ uma\ onda\ k >$$

e. Desenvolva a expressão acima para obter, utilizando outros resultados dos itens acima a expressão

$$\frac{< Energia\ das\ ondas\ e-m >}{V} = \int_0^{\infty} d\nu\ 4\pi\nu^2 \frac{4\pi\nu^2}{c^3}\ k_B T$$

onde $V = L^3$ é o volume da caixa.

f. Compare a densidade de energia por unidade de volume por frequência, u(ν), obtida do modelo, com a distribuição de intensidades por frequência obtida em experimentos. Para comparar, verifique se consegue conectar a intensidade da luz de uma determinada frequência I(ν) e a densidade de energia por unidade de volume u(ν). Consulte seu livro de eletromagnetismo.

II. Considere os **fótons** dentro de uma caixa perfeitamente refletora.

1. Descrição matemática dos fótons
   a. Represente na caixa fótons de diferentes frequências propagando-se em diferentes direções. Quantos números você precisa utilizar para descrever um certo conjunto de fótons? Compare com os números necessários para descrever uma onda eletromagnética.
   b. A energia de um fóton é dada por uma constante X frequência da luz, então a energia de um fóton é e = C ν, e a energia contida na caixa deve ser dada por

$$< Energia\ dos\ fótons\ na\ caixa > = < \sum\ número\ de\ fótons\ de\ frequência\ \nu\ X\ C\nu >$$

Discuta essa expressão e como ela contém os fótons do “azul”, da rádio USP e de ultravioleta.

2. Médias térmicas para fótons
    a. Escreva a distribuição de probabilidades para a energia contida na caixa referente a um certo tipo de fóton com momento na direção |k. Represente em um gráfico P(e) x e.
    b. Obtenha a energia média dos fótons deste tipo (item 2). Reveja a matemática utilizada para as oscilações atômicas quantizadas no sólido – a matemática é perfeitamente equivalente. Compare com a expressão obtida para a energia média de uma onda de mesmo vetor de onda |k.

3. Quantas direções de fótons temos dentro da caixa?
    a. A quantidade de movimento de um fóton é dada por C|k. Represente em um desenho fótons de mesma frequência, mas com momentos em diferentes direções dentro da caixa. Temos que contar todos eles, como fizemos com as ondas!
    b. Verifique que agora a expressão da energia dos fótons dentro da caixa é dada por uma expressão semelhante à da energia das ondas eletromagnéticas:

$$< Energia\ dos\ fótons\ na\ caixa > = \iiint_{-\infty}^{\infty} dnx\, dny\, dnz < energia\ térmica\ dos\ fótons\ com\ vetor\ de\ onda\ |k >$$

    c. Utilize a expressão da energia média dos fótons de determinado comprimento de onda e de determinada direção de propagação e obtenha a expressão correspondente à 4e para o caso dos fótons.
    d. Utilize um programa gráfico para examinar a forma de u(ν) no caso dos fótons e compará-la com a experiência.