Mecanica dos Fluidos: 2^a prova (2011/diurno)

Exercício 1.

Consideramos o escoamento estacionário de um fluido incompressível e irrotacional num triedro (cunha) de eixo Oz e ângulo α.

Procuramos o potencial das velocidades na forma $\phi(r,\theta) = f(r)g(\theta)$.

a) Qual propriedade do fluido garante a existência da função potencial ϕ? Qual propriedade do fluido implica que ϕ é solução da equação de Laplace?
Quais são as condições de contorno obedecidas pela velocidade?

b) Mostrar que f e g satisfazem:

$$\frac{r}{f}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) = K \qquad \frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -K$$

com K constante.

c) Mostrar que $g(\theta) = A\cos(\frac{n\pi}{\alpha}\theta)$.

d) Procuramos $f(r)$ na forma $B\,r^\beta$. Mostrar que $\beta = \pm\frac{n\pi}{\alpha}$

e) Qual é a forma mais geral de $\phi(r,\theta)$?

f) Estudamos o caso $n = 1$, $\beta > 0$. Calcular $\phi(r,\theta)$ e $\vec{v}$. Esboçar as linhas de corrente nos casos $\alpha < \pi$ e $\alpha > \pi$ (sem calcular).

Para ambos casos, calcular $|\vec{v}|$ quando $r \to 0$. Se o escoamento fosse o de um rio, qual caso corresponderia a uma erosão e qual a uma sedimentação.

g) O fluxo ao longo de um plano localizado sobre o eixo real é Uz. Usar a transformação $w \to z = w^k$ para obter o potencial complexo do escoamento do triedro de ângulo α e verificar o resultado do f) para ϕ.

Exercício 2

Considere uma onda se propagando na direção x, num canal com lados em $y = 0$ e $y = a$ e fundo em $z = -h$. A água será tratada como um fluido irrotacional, perfeito, incompressível. Isto sugere que podemos usar a função potencial seguinte $\phi = B\cos(n\pi y/a)\cosh[k(z+h)]\cos(Kx - \omega t)$

a) Qual é a equação que as constantes k e K devem satisfazer para que ϕ seja solução da equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$?

b) Verifique que a condição de contorno no fundo é satisfeite.

c) Qual é a equação que as constantes k e ω devem satisfazer para que a condição de superfície livre seguinte seja satisfeita:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=0} = 0 \ .$$

d) Mostrar que ω e K satisfazem a seguinte relação de dispersão:

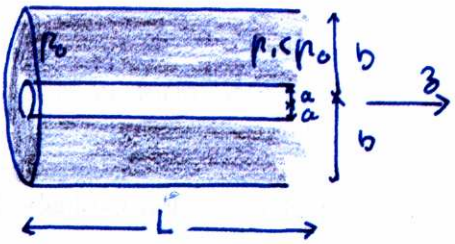
$$\omega^2 = g[K^2 + (n\pi/a)^2]^{1/2}\tanh[K^2h^2 + (n\pi/a)^2h^2]^{1/2}$$

e) Se a for muito grande, mostrar que $\phi = B\cosh[k(z+h)]\cos(kx-\omega t)$.

f) Se a for muito grande, calcular a velocidade do fluido e a trajetória das partículas de fluido (fazendo a aproximação usual).

Exercício 3

Um fluido incompressível circula entre dois cilindros respectivamente de raio a e b, devido a uma diferença de pressão. O escoamento é estacionário, incompressível, viscoso. A gravidade é desprezida. A velocidade é da forma $\vec{v} = v(r)\hat{z}$. O laplaciano de um vetor que so depende de r em coordenadas cilindricas é $\nabla^2\vec{V} = (1/r)d/dr(r\,dV/dr)\hat{z}$



a) Mostrar que $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = 0$ e escrever a equação de movimento satisfeita pelo fluido.

b) Quais são as condições de contorno que a velocidade deve satisfazer em $r = a$ e $r = b$?

c) Resolver a equação de Navier-Stokes para obter a velocidade e a pressão $p(z)$.

d) Verificar que a força de cisalhamento sobre as paredes equilibra a força devida à diferença de pressão.

Formulário

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$
$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g}$$
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho\, g\, z = cste$$
$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v}$$
$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$$
$$\nabla^2\phi = 0$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$
$$\nabla^2 f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$$
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
$$dF_i = \sigma_{ij}\,dS_j \;\; (sobre\;\; o\;\; fluido)$$
$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$
$$\sigma'_{r\,z} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

/ P2 d/2011

a) $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$

$v_\theta(r, \theta = 0) = 0$ e $v_\theta(r, \alpha) = 0$

b) $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 = \frac{g}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{f}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$

$\Rightarrow \frac{r}{f} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) = \kappa$ e $\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -\kappa$

c) $g(\theta) = A \cos \sqrt{\kappa}\theta + B \sin \sqrt{\kappa}\theta$

$v_\theta(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{f(r)}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{f(r)}{r}\left(-A\sqrt{\kappa} \sin \sqrt{\kappa}\theta + B\sqrt{\kappa} \cos \sqrt{\kappa}\theta\right) = 0$ para $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$

$\Rightarrow B = 0$ e $\sqrt{\kappa}\alpha = n\pi \Leftrightarrow \sqrt{\kappa} = n\pi/\alpha$

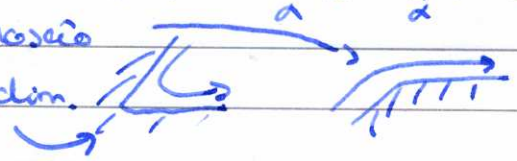
d) $\frac{r}{f} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{A r^{\beta-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(A r^\beta \beta\right) = \beta^2 = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow \beta = \pm \frac{n\pi}{\alpha}$

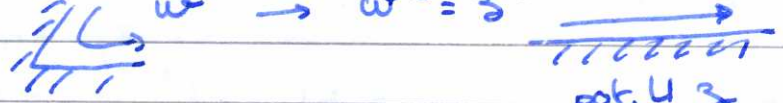
e) $\varphi(r, \theta) = \sum_n \left(A r^{\frac{n\pi}{\alpha}} + A' r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right) \cos \frac{n\pi}{\alpha}\theta$

f) $\varphi(r, \theta) = A r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi}{\alpha}\theta \Rightarrow \vec{v} = A \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha}\theta \, \hat{r} - A r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \frac{\pi}{\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha}\theta \, \hat{\theta}$

Se $\pi < \alpha$ $|\vec{v}(r=0, \theta)| \rightarrow \infty$ erosão

o sedim.



g) 

O potencial deve ser $U w^k = U r^k e^{ik\theta}$.

Queremos $k\alpha = \pi \Rightarrow$ o potencial complexo da fricção é $U r^{\frac{\pi}{\alpha}} e^{i\frac{\pi}{\alpha}\theta}$ e então $\varphi = U r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi}{\alpha}\theta$.

spiral

② a) $\nabla^2 \varphi = 0 = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2 + k^2$

b) $v_z(-h) = 0$?

$= \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=-h} = B \cos\frac{n\pi y}{a}\, k \sinh k(z+h) \cos(kx-\omega t)\Big|_{z=-h} = 0$

c) $\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow k \sinh kh - \frac{\omega^2}{g}\cosh kz = 0$

$\Leftrightarrow \omega^2 = kg \tanh kh$

d) $\omega^2 = g\sqrt{k^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\, \tanh\sqrt{k^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\, h$

e) $a \to \infty$: $\begin{cases} \varphi \to B \cosh k(z+h)\cos(kx-\omega t) \\ k = k \end{cases}$

f) $\begin{cases} v_x = -kB\cosh k(z+h)\sin(kx-\omega t) \\ v_z = kB\sinh k(z+h)\cos(kx-\omega t) \end{cases}$

$\begin{cases} v_x \sim -kB\cosh k(z_0+h)\sin(kx_0-\omega t) = \frac{dx}{dt} \\ v_z \sim kB\sinh k(z_0+h)\cos(kx_0-\omega t) = \frac{dz}{dt} \end{cases}$

$\begin{cases} x - x_0 = -kB\cosh k(z_0+h)\cos(kx_0-\omega t)/\omega \\ z - z_0 = -kB\sinh(z_0+h)\sin(kx_0-\omega t)/\omega \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\frac{x-x_0}{\cosh k(z_0+h)}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{\sinh k(z_0+h)}\right)^2 = \frac{k^2B^2}{\omega^2}$: elipse

③ a) $\vec{v} = v(r)\hat{z} \Rightarrow (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \left(v(r)\frac{\partial}{\partial z}\right)(v(r)\hat{z}) = 0$

$-\vec{\nabla}p + \eta\nabla^2\vec{v} = 0$

b) $\vec{v}(r=a) = \vec{v}(r=b) = 0$

c) $\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = \eta\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = G \Rightarrow p = Gz + G_0 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \frac{G}{\eta} \end{cases}$

$= \frac{p_1 - p_0}{L}z + p_0$

$\Rightarrow v = \frac{Gr^2}{4\eta} + C\ln r + D$

Usando ab) : $v = -\frac{1}{4\eta}\left(\frac{p_1-p_0}{L}\right)\left[a^2 - r^2 + (b^2-a^2)\frac{\ln r/a}{\ln b/a}\right]$

d) $\vec{F}_{pressão} = (p_0 - p_1)\pi(b^2-a^2)\hat{z}$

$\vec{F}_{cis.} = \hat{z}\left[-\int \sigma'_{zr}|_{r=a}\, a\,d\theta\,dz + \int \sigma'_{rz}|_{r=b}\, b\,d\theta\,dz\right] = 2\pi L\hat{z}\left(-a\eta\frac{dv}{dr}\Big|_{r=a} + b\eta\frac{dv}{dr}\Big|_{r=b}\right)$

$= \hat{z}\left(-G\right)(a^2-b^2)\pi L = +(p_0-p_1)(a^2-b^2)\pi\hat{z}$