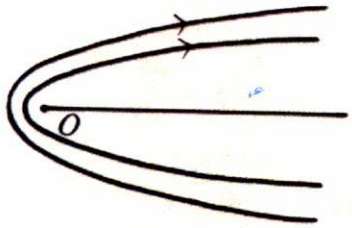
Mecanica dos Fluidos: 2ª prova (2011/noturno)

Exercício 1.

Um escoamento tem como função de corrente $\psi = \sqrt{r}\sin(\theta/2)$.
a) Calcular a velocidade do fluido.
b) Mostrar que as linhas de corrente são dadas por $y^2 = 4C^2(C^2 + x)$ com C uma constante.
c) Desenhar as linhas de corrente (inclusive com orientação). Qual tipo de escoamento isto pode modelizar?
d) O fluxo ao longo de um plano localizado sobre o eixo real é Uz. Usar a transformação $w \to w^k$ para obter o potencial complexo da figura. Qual é a função de corrente deste escoamento?



Exercício 2.

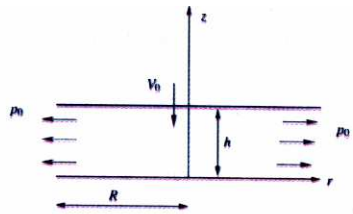
Considere uma onda se propagando na direção x, sobre a superfície de um lago cuja profundidade está em $z = -h$. A água será tratada como um fluido irrotacional, perfeito, incompressível. Isto sugere que podemos usar a função potencial seguinte $\phi = B\cosh[k(z+h)]\cos(kx - \omega t)$
a) Verificar que ϕ é solução da equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$.
b) Verifique que a condição de contorno no fundo é satisfeita.
c) Qual é a equação que as constantes k e ω devem satisfazer para que a condição de superfície livre seguinte seja satisfeita:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=0} = 0 \ .$$

d) Determine a velocidade do fluido e a trajetória das partículas de fluido (fazendo a aproximação usual).
e) Se kh for pequena, qual é a velocidade de propagação $v_f = \omega/k$ e a velocidade de grupo $v_g = \partial\omega/\partial k$? Como muda λ quando h decresce?
f) Se h for grande, qual é a velocidade de propagação $v_f = \omega/k$ e a velocidade de grupo $v_g = \partial\omega/\partial k$? Qual é a relação entre λ e T?

Exercício 3.

Um fluido incompressível, de densidade de massa ρ e viscosidade de cisalhamento η está localizado entre dois discos paralelos de raio R, localizados em $z = 0$ e $z = h << R$. Uma força é exercidade sobre o disco de cima para deslocar lateralemente o fluido, mantendo a velocidade do disco constante $\vec{V_0} = -V_0\hat{z}$.



1,5 a) Escrever as condições de contorno para as velocidades $\vec{v}(r, z = 0)$ e $\vec{v}(r, z = h)$ e a pressão $p(R, z)$.

2,0 b) Levando em conta a simetria do problema, escrever em coordenadas cilindricas as equações de conservação da massa e de Navier-Stokes (desprezando a gravitação), para $\vec{v}(r, z) = v_r(r, z)\hat{r} + v_z(r, z)\hat{z}$ e $p(r, z)$.

3,5 c) Usando argumentos de ordem de grandeza, pode-se escrever $v_r \sim R/T$ e $v_z \sim h/T$. Mostrar que $v_z << v_r$ e $\partial v_r/\partial r << \partial v_r/\partial z$.

d) Desprezando v_z e suas derivadas, bem como $\partial v_r/\partial r$ e v_r/r^2 na equação de Navier-Stokes, mostrar que as equações do b) se reduzem a:

1,5

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

e) Verificar que

1,5

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \tfrac{3\eta V_0}{h^3}(R^2 - r^2) \\ v_r &= -\tfrac{3V_0 r}{h^3} z(z-h) \\ v_z &= \tfrac{6V_0}{h^3}\left(\tfrac{z^3}{3} - \tfrac{z^2 h}{2}\right) \end{aligned}$$

são soluções das equações do a) e do d).

1,0 f) Calcular a força que deve ser aplicada ao disco para mante-lo em movimento com velocidade constante.

Formulário

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}$

$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho\, g\, z = cste$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 \vec{v}$

$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$

$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$

$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$

$\nabla^2 \vec{F} = \hat{r}(\nabla^2 F_r - \frac{1}{r^2}F_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}) + \hat{\theta}(\nabla^2 F_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2}F_\theta) + \hat{z}\nabla^2 F_z$

$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

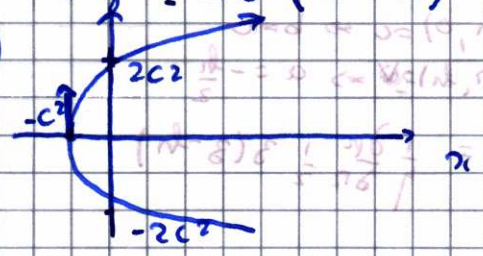
$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial r F_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

$\nabla^2 f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$

$\Rightarrow y^2 = 4c^2(c+x)$

c)



$x = c \Rightarrow y = \pm 2c^2$

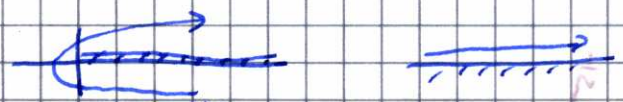
$y = 0 \Leftarrow x = -c^2$

$\vec{v}(\underset{x''}{-c^2}, \underset{y''}{0}) = \vec{v}(r = c^2, \theta = \pi) \Rightarrow v_r = 0$

$v_\theta = \frac{i}{2c}\hat{\theta}$

fluxo corrente do meio plano

d)



$w_{proc} = A z^k = A r^k e^{ik\theta}$
$= \varphi + i\psi$

$w = r e^{i\theta} \rightarrow w^k = z = r^k e^{ik\theta}$

$\theta = 2\pi \rightarrow k 2\pi = \pi \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ assim $\psi = A\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$

(2) a) $\nabla^2\varphi = k^2 - k^2 = 0$

b) $v_z|_{z=-h} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{-h} = B\sinh 0 \cos(kx - \omega t) = 0$

c) $k\sinh kh - \frac{\omega^2}{g}\cosh kh = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = gk\tanh kh$

d) $\begin{cases} v_x = -kB\cosh k(z+h)\sin(kx-\omega t) \\ v_z = kB\sinh k(z+h)\cos(kx-\omega t) \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{x-x_0}{\cosh k(z_0+h)}\right]^2 + \left[\frac{z-z_0}{\sinh k(z_0+h)}\right]^2 = \frac{k^2B^2}{\omega^2}$ elipse

e) $\omega^2 \sim gk^2h \Rightarrow \omega/k = \sqrt{gh}$

$2\omega\frac{d\omega}{dk} = g\tanh kh + \frac{gkh}{\cosh kh} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} \sim \frac{ghk + gkh}{2k\sqrt{gh}} = \sqrt{gh} = \omega/k = \lambda/T$

$\Rightarrow$ se $d\lambda$, $\lambda \gg$ pois $T \ll k$

f) $\frac{\omega}{k} \sim \sqrt{gh}$ $\quad \frac{d\omega}{dk} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k}\right)$

$\lambda = (g/2\pi)T^2$

(3) a) $p(R, z) = p_0$ $\quad \vec{v}(r, z=0) = 0$ (disco de baixo parado)

$\vec{v}(r, z=h) = -V_0\hat{z}$ (disco descendo em mov.)

b) $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v}$

com

$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = (v_r\partial_r v_r + v_z\partial_z v_r)\hat{r} + (v_r\partial_r v_z + v_z\partial_z v_z)\hat{z}$

$\vec{\nabla}p = \frac{\partial p}{\partial r}\hat{r} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}$

$\vec{\nabla}^2\vec{v} = (\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2})\hat{r} + (\nabla^2 v_z)\hat{z} = \hat{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2}\right]$

$+ \hat{z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{v_z}{r^2}\right]$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

c) $h \ll R \Rightarrow v_z \ll v_r$ $\quad \frac{\partial v_r}{\partial r} \sim \frac{v_r}{r}$ e $\frac{\partial v_r}{\partial z} \sim \frac{v_r}{h} \Rightarrow \frac{\partial v_r}{\partial r} \ll \frac{\partial v_r}{\partial z}$

d) $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \sim 0$ $\quad \nabla^2\vec{v} \sim \hat{r}\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$

eq. de cont. continua sendo: $\frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

e) $\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{6\eta V_0}{h^3}r$ e $\eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = -\frac{6\eta V_0}{h^3}r$ são iguais; $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$

$\frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{6V_0}{h^3}z(z-h)$ e $-\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{6V_0}{h^3}z(z-h)$ são iguais.

$p(R, z) = p_0$ $\quad \vec{v}(r, z=0) = 0$ $\quad \vec{v}(r, z=h) = -\frac{\partial z}{\partial z}$

$p(R,z) = p_0 \qquad \vec{v}(r,0) = 0 \qquad \vec{v}(r,h) = -v_0\vec{z}$

b) $$\int_0^R \int_0^{2\pi} \left[p_0 + \frac{3\eta V_0}{h^3}(R^2 - r^2) - p_0\right] r \, dr \, d\theta = \frac{3\pi\eta V_0 R^4}{2h^3}$$