9. Binômio de Newton

Introdução

Antes de entrarmos propriamente nas expressões binomiais, trataremos rapidamente sobre o *triângulo de Pascal* (Blaise Pascal, 1623-1662), que é um triângulo aritmético, isto é, uma porção de números que se arranjam na forma de um triângulo e que têm uma regra para sua construção. Pascal não inventou esse triângulo aritmético, mas estudou muitas de suas propriedades. Uma propriedade curiosa é que "as somas dos números dispostos ao longo das diagonais do triângulo geram a Sucessão de Fibonacci" (veja, por exemplo, http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm31/pascal.htm, que explica como encontrar as diagonais que dão essa propriedade).

O topo do Triângulo de Pascal é o seguinte:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
...

Figura 1. Primeiras linhas do triângulo de Pascal.

Note as propriedades:

- O Triângulo de Pascal se estende indefinidamente.
- Cada *linha* inicia e termina com o número 1.
- Os elementos internos de cada linha são obtidos a partir da soma de dois elementos da linha anterior, os mais próximos, um à esquerda e outro à direita.

O esquema da Figura 2 abaixo mostra essa última propriedade, que é usada para construir o triângulo na prática.

1
1 1
1 (1+1) 1
1 (2+1) (2+1) 1
1 (3+1) (3+3) (3+1) 1

Figura 2. Esquema que mostra o critério de construção do triângulo de Pascal.

Exercício. A partir da última linha da parte do triângulo que está na figura 1, construa mais duas linhas do de Pascal.

Outra propriedade interessante é que a soma dos elementos da linha n é igual a 2^n , desde que iniciemos a contar as linhas com $n = 0$.

1	$\rightarrow 1=2^0$ (linha 0)
1 1	$\rightarrow 2=2^1$ (linha 1)
1 2 1	$\rightarrow 4=2^2$ (linha 2)
1 3 3 1	$\rightarrow 8=2^3$ (linha 3)
1 4 6 4 1	$\rightarrow 16=2^4$ (linha 4)
1 5 10 10 5 1	$\rightarrow 32=2^5$ (linha 5)
1 6 15 20 15 6 1	$\rightarrow 64=2^6$ (linha 6)

Figura 3. Esquema que mostra o critério de numeração das linhas do triângulo de Pascal e mostra que a soma dos elementos da linha n é igual a 2^n.

Aplicação ao Binômio de Newton

O binômio de Newton é a expressão que permite calcular a potência de um binômio

$$(a+b)^n$$

onde a, $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Conhecemos bem a expansão dessa expressão quando $n = 2$, uma vez que o resultado é o produto notável

$$a^2+2ab+b^2$$

A situação fica um pouco mais complicada quando $n \geq 3$. Vamos calcular (da maneira mais longa) a expansão do binômio para $n=5$,

$$(a+b)^5$$

$$(a+b)^2(a+b)^2(a+b)$$

$$(a^2+2ab+b^2)\ (a^2+2ab+b^2)\ (a+b)$$

$$a^5+ 5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

É importante que você faça esse desenvolvimento passo a passo e confira que ele está correto. Agora, observe os coeficientes da expressão acima:

$$\mathbf{1}a^5+ \mathbf{5}a^4b+\mathbf{10}a^3b^2+\mathbf{10}a^2b^3+\mathbf{5}ab^4+\mathbf{1}\mathrm{b}^5$$

Compare esta expressão com a linha de número 5 do triângulo de Pascal – lembre-se de que a contagem começa em 0 – e verifique que os coeficientes da expressão são os valores dessa linha. De forma geral, a linha n do triângulo de Pascal fornece os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$.

Como nem sempre teremos um triangulo de pascal a nossa disposição, porém, precisaremos de uma maneira geral de determinar o desenvolvimento do binômio de Newton para qualquer potência n. Vamos voltar ao exemplo anterior, $(a+b)^5$, e olhemos para os expoentes de a e b na expressão desenvolvida. Perceba que tanto a quanto b estão em todos os fatores, sendo que no primeiro o expoente de a é 5 e o de b é 0, e a cada fator o expoente de a diminui uma unidade e o de b aumenta uma, assim:

$$a^5b^0$$

$$a^4b^1$$

$$a^3b^2$$

$$a^2b^3$$

$$a^1b^4$$

$$a^0b^5$$

Então, sempre existirá um número $(n + 1)$ de fatores no desenvolvimento de $(a+b)^n$. Podemos então generalizar essa operação por $a^{n-p}b^p$ onde p varia de 0 até n. Verifique que essa generalização é verdadeira no exemplo anterior.

Agora, veremos como determinar o coeficiente de cada termo do desenvolvimento. O valor do coeficiente é denominado *número binomial* e é representado por $\binom{n}{p}$, o qual é calculado através da expressão:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

onde p varia da mesma forma que na determinação dos expoentes, ou seja, ele é um inteiro que vale 0, 1, 2, ..., até n. Vamos mostrar o cálculo para o primeiro e o segundo coeficientes de nosso exemplo.

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!\,(5-0)!} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} = 5$$

Verifique o resultado para o terceiro coeficiente.

Atenção; é bastante importante que você compreenda bem o cálculo do número binomial, em breve ele será muito importante para o cálculo de número de arranjos em estatística, laboratórios e outras aplicações.

Assim, juntando o calculo binomial com a determinação dos expoentes de cada termo, temos a expressão geral de desenvolvimento para $(a+b)^n$:

$$\binom{n}{p} \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

onde n é um número inteiro positivo.

Exercício

1) Desenvolva $(a+b)^9$, utilize o desenvolvimento do triângulo de pascal e depois a fórmula geral para o binômio de Newton.
2) Determine $\binom{0}{0}$
3) Escreva o valor do vigésimo sexto termo de $(r+s)^{30}$