10. Fatorial e Análise combinatória

1. Definição e propriedades básicas.

Seja n um número natural, $n \geq 2$. Então, designamos o produto 1·2·3· ... ·(n-1)·n como n!, que se lê "n fatorial". Dessa definição, deduzimos a primeira propriedade importante:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots\ldots 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)! \qquad (1.1)$$

Adotamos ainda 0! = 1 e 1! = 1, pois, aplicando a relação (1.1) para n=2, teremos:

$$se\ 2! = 2 \cdot 1 = 2 \quad e \quad 2! = 2 \cdot (2-1)! = 2 \cdot 1! = 2$$

de onde podemos afirmar que 1! = 1 (1.2)

Da mesma forma, então, agora usando n = 1 na relação (1.1),

$$1! = 1 \cdot (1-1)! = 1 \cdot 0! = 1$$

deduzimos que 0! = 1 (1.3)

Alguns exemplos diretos:

10! = 10·9·8·7·6·5·4·3·2·1 = 3.628.800
6! = 6·5·4·3·2·1 = 720
5! = 5·4·3·2·1 = 120

e agora uns exemplos de fatorações com fatoriais

6! · 5! = (6·5·4·3·2·1) · (5·4·3·2·1) = 6 · $(5!)^2$ = 6 · $(120)^2$ = 86.400

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$$

Exercícios:

1) Calcule

a) $\frac{52!}{50!}$

b) $\frac{5! + 6!}{4!}$

c) $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)! + n!}$

d) Encontre a fórmula mais simples da expressão $\frac{(n+2)! + (n+1) \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot (n-1)!}$

2. NÚMERO BINOMIAL

Sejam *n* e *p* números naturais tais que $n \geq p \geq 0$. Chama-se coeficiente binomial, cujo símbolo é $\binom{n}{p}$, ao número dado por

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad (2.1)$$

Esse é o número de combinações de *p* objetos num conjunto de *n* objetos distintos, que coincide com o fator que multiplica o termo de ordem *p* na expansão do binômio de Newton à potência *n*, veja o capítulo 9 desta revisão de matemática.

Exemplos (todos eles podem também ser obtidos do triângulo de pascal):

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$$

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{5!\cdot 4!} = \frac{4!(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5)}{5\cdot (4!)^2} = \frac{15120}{120} = 126$$

Casos Particulares;

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!\cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = \frac{n}{1!} = n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Concluímos que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$

Exercício:

2) Calcule $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

NÚMEROS BINOMIAIS COMPLEMENTARES.

Os números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são *complementares* quando $p + q = n$. Quando esta condição é satisfeita, temos:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-q)!(q)!} = \frac{n!}{p!\,q!} = \frac{n!}{(n-q)!\,q!} = \binom{n}{q} \qquad (2.2)$$

Exercícios:

3) A soma das soluções da equação $\binom{18}{6} = \binom{18}{4x-1}$ é

a) 8 b) 7/4 c) 6 d) 5

4) Se $n = \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^3$, então o número binomial $\binom{n}{3}$ é igual a:

a) 20 b) 35 c) 48 d) 56

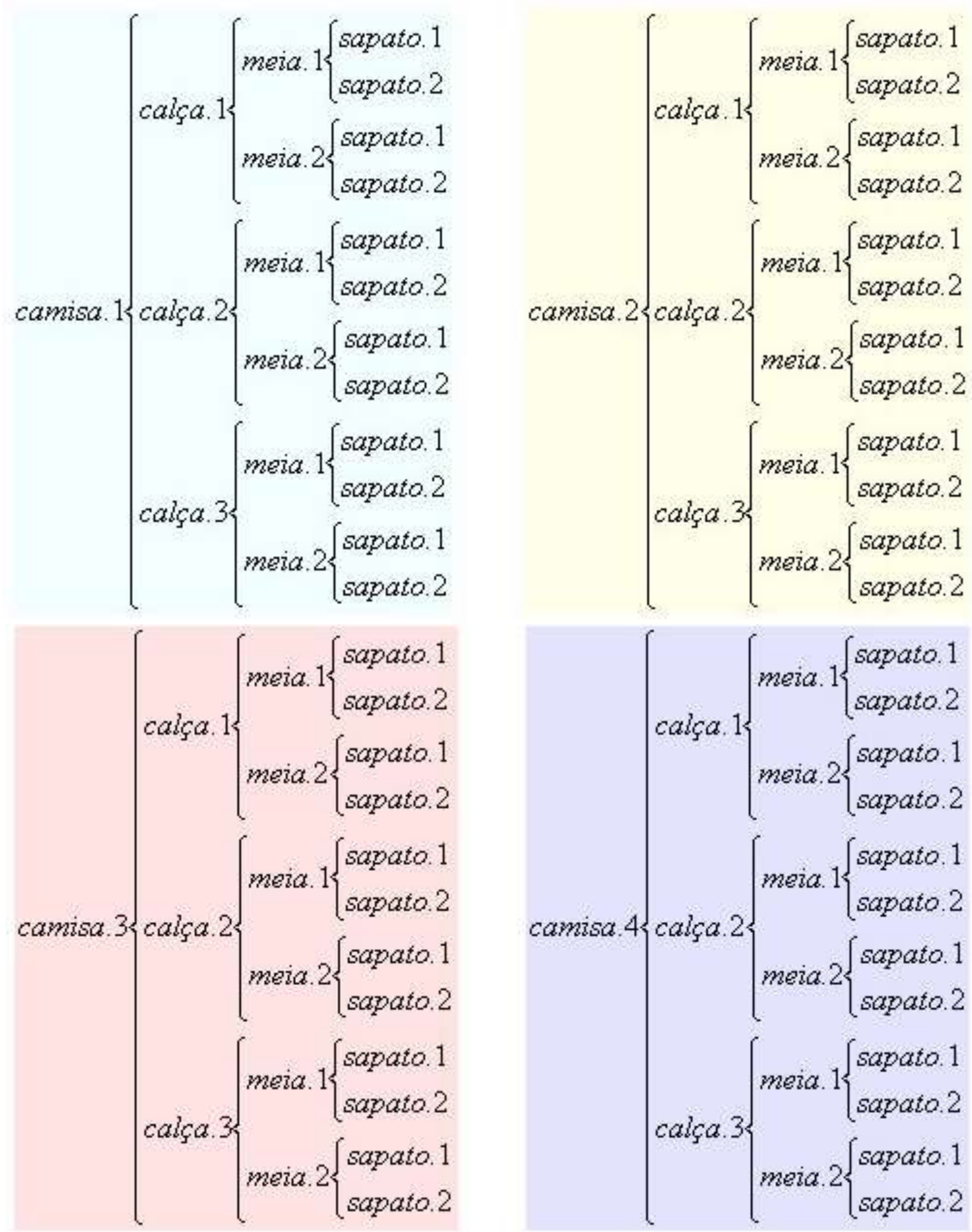
3. ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória estuda métodos para contagem do número de possibilidades de um evento, sem necessariamente enumerar cada caso particular.

Regra do Produto

Imaginemos que um homem tenha em seu guarda-roupas 4 camisas, 3 calças, 2 pares de meia e dois pares de sapato. Com quantas combinações distintas ele poderia se vestir?

Veja, o esquema abaixo:



Agora imagine se, para toda combinação, fosse necessário montar um esquema desses, não seria muito trabalhoso? Agora, imagine essa quantidade de combinações somada à quantidade de variações que uma pessoa pode fazer durante um dia. O indivíduo iria precisar de muito tempo para montar um esquema parecido com o apresentado acima.

Assim, com o passar do tempo, o homem percebeu que a quantidade final de possibilidades era igual à multiplicação de todas as possibilidades que a possibilidade anterior tinha vezes esta quantidade anterior.

Utilizando o caso acima, o homem não precisaria de todo este esquema apresentado, bastaria fazer:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$$

Ou seja, o homem tem 48 combinações diferentes de usar suas roupas.

Na análise combinatória, encontramos com freqüência situações parecidas com a descrita acima. A obtenção de certo resultado depende de duas ou mais etapas de escolha. Nestes casos, o número total de possibilidades será igual ao produto dos números de possibilidades de cada etapa. Tal procedimento para a contagem desse total de possibilidades é conhecido como Regra do Produto.

Regra do Produto: Se um evento A pode ocorrer de *m* maneiras diferentes e, se para cada uma dessas *m* maneiras possíveis de ocorrer A, outro evento B pode ocorrer de *n* maneiras diferentes, independentemente do evento A, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$.

Exercícios:

5) Se uma sala tem 8 portas, então o número de maneiras distintas de se entrar e sair dela por uma porta diferente é:

a) 6 b)16 c) 40 d) 48 c)56

6) Utilizando os dígitos 4, 5, 6, 7 e 8:

a) quantos números de 3 algarismos posso formar?

b) quantos números de 3 algarismos distintos posso formar?

7) Se 5 moedas diferentes forem lançadas simultaneamente, o número de maneiras possíveis que elas podem cair é dado por:

a) 5^2 b) 2 . 5 c) 2^5 d) 5! e) (2 . 5)!

4. PERMUTAÇÃO

Uma permutação de *n* objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses *n* objetos. Indicando o número de permutações de *n* objetos distintos por P_n, temos:

$$P_n = n! \qquad (4.1)$$

Exercícios:

8) De quantas maneiras diferentes uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?

9) Uma bibliotecária recebeu uma doação de 3 livros diferentes de Matemática, 4 livros diferentes de Física e 3 livros diferentes de Química.
a) De quantas maneiras diferentes ela poderá arrumá-los em uma prateleira de livros?

b) Se a bibliotecária tivesse que colocar os livros de uma mesma disciplina juntos, quantas maneiras ela poderia arranjá-los?

PERMUTAÇÃO COM OBJETOS REPETIDOS

É comum desejarmos conhecer o número de permutações de *n* objetos, alguns dos quais são iguais entre si.

Por exemplo, suponhamos que se queira formar todas as palavras de 5 letras, usando as letras da palavra ABADA. Ora, existem 5! = 120 permutações dos objetos A_1, B, A_2, D e A_3, quando os 3 “A”s são considerados distintos. Observemos, entretanto, que as permutações seguintes,

$A_1A_2A_3BD$
$A_1A_3A_2BD$
$A_2A_1A_3BD$
$A_2A_3A_1BD$
$A_3A_1A_2BD$
$A_3A_2A_3BD$

produzem a mesma palavra quando os índices são removidos: AAABD. O número 6, das permutações acima, provém do fato de existirem 3! = 6 modos diferentes de colocarmos os três “A”s nas primeiras posições das permutações. Isto se repete para cada uma das três posições em que os “A”s podem aparecer. Como conseqüência, existem:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$$

diferentes palavras de 5 letras que podem ser formadas usando as letras da palavra ABADA.

Exemplo: As permutações com as 5 letras A, A, B, B, B são:

AABBB	ABABB	ABBAB	ABBBA	BBABA
BAABB	BABAB	BABBA	BBAAB	BBBAA

Teorema: Indicando com $P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_p)}$ o número de permutações de um objeto, dos quais n_1 são iguais entre si, n_2 são iguais entre si, ..., n_p são iguais entre si, mas cada grupo pode ser diferenciado dos demais, temos:

$$P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_p)} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_p!} \qquad (4.2)$$

Exemplo: Qual é o número possível de anagramas que se pode montar com as letras da palavra ARARUNA?

Utilizando 4.2, teremos $\begin{cases} n_1 \rightarrow A = 3! \\ n_2 \rightarrow R = 2! \\ n_3 \rightarrow U = 1! \\ n_4 \rightarrow N = 1! \end{cases}$

Assim, $P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_p)} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 420$ possíveis anagramas.

Exercícios:

11) Quantos são os anagramas possíveis para a palavra: ULYSSES?

12) Quantos são os anagramas possíveis para a palavra: ULYSSES começando por U?

13) Quantos são os anagramas possíveis para a palavra: ULYSSES terminando por S?

14) Quantos são os anagramas possíveis para a palavra: ULYSSES começando por U e terminando com S?

15) DESAFIO: Seja um conjunto de 10 cientistas. De quantos modos distintos estes cientistas podem sentar-se junto a uma mesa circular para realizar uma experiência sem que haja repetição das posições?

5. COMBINAÇÃO SIMPLES

Combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, onde $1 \leq p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de *p* desses *n* elementos.

Exemplo: As combinações das letras a, b, c, d tomadas 3 a 3 são:

$$\{a, b, c\}$$
$$\{a, b, d\}$$
$$\{a, c, d\}$$
$$\{b, c, d\}$$

Ou, simplesmente

abc
abd
acd
bcd

Note que as combinações

abc
acb
bac
bca
cab
cba

são iguais; cada uma delas indica o mesmo conjunto de três letras, {a, b, c}.

Teorema: O número de combinações simples de n elementos tomados p a p é indicado com $C_{n.p}$; temos

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \tag{5.1}$$

Os exercícios em relação a este assunto possuem o mesmo contexto dos exercícios postados no item NÚMERO BINOMIAL.