2 CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA

2.1 INTRODUÇÃO

Apesar da maioria das instalações elétricas, hoje em dia, não serem em corrente contínua, a teoria a ser vista neste capítulo constitui uma base para as demais aplicações que são utilizadas em eletricidade.

Para estudar os circuitos em corrente contínua parte-se de conceitos básicos da eletrostática e da eletrodinâmica. São definidas, basicamente, as grandezas: corrente, diferença de potencial, potência e energia elétrica.

Em seguida definem-se os elementos básicos dos circuitos de corrente contínua, quais sejam, as fontes ideais e a resistência, que constituirão os bipolos. A associação de bipolos será analisada a partir da Lei de Ohm.

Apresentam-se, então, as redes de corrente contínua (C.C.) e as leis, conceitos e teoremas para sua resolução. São apresentadas as aplicações das Leis de Kirchhoff e do Método das Correntes Fictícias de Maxwell.

2.2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste item serão apresentadas, sucintamente, as leis e definições que constituirão a base dos estudos de redes em corrente contínua.

2.2.1 Lei de Coulomb e Potencial Elétrico

As leis da eletricidade originaram-se a partir do final do século XVIII. Inicialmente foi identificada a existência de cargas elétricas com polaridade positiva ou negativa e, foi verificado, ainda, que cargas elétricas de polaridades iguais se repelem e, cargas elétricas de polaridades diferentes se atraem. Em 1785, Coulomb avaliou a força de atração, ou repulsão, entre duas cargas pontuais como sendo:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{2.1}$$

onde:
F - força em N (Newton);
q_1, q_2 - cargas elétricas em C (Coulomb);
r - distância entre as cargas em m;
ε - constante que depende do meio, em F/m (Faraday/m). Para o vácuo $\varepsilon = \varepsilon_o = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m.

Pode-se escrever que:

$$F = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2} q_2 = E_1 . q_2$$

onde $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2}$ constitui o campo elétrico provocado pela carga q_1, e é dado em V/m (Volt/m). Na realidade, tanto o campo elétrico E_1 como a força F são grandezas vetoriais, conforme apresentado na Fig. 2.1, para cargas positivas e negativas.

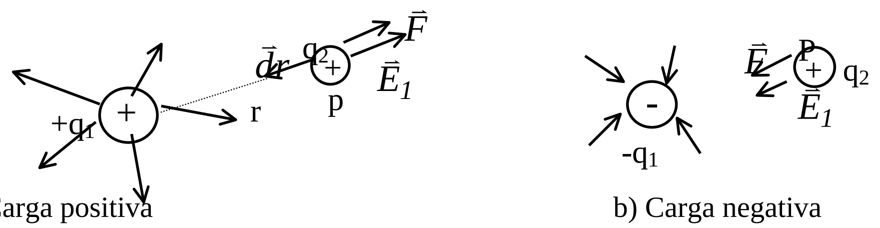


Figura 2.1 - Vetores de campo elétrico e força

Pode-se definir, também, o trabalho, W, realizado pela carga q_2 ao ser deslocada desde um ponto muito distante (∞) até a distância r de q_1 como sendo:

$$W = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} q_2 \vec{E}_1 d\vec{r} = -q_2 \int_{\infty}^{r} \vec{E}_1 d\vec{r} \qquad (2.2)$$

O potencial elétrico, V_r, é uma grandeza escalar, definida como sendo o trabalho W por unidade de carga (q_2), ou seja:

$$V_r = \frac{W}{q_2} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_1 \, d\,\vec{r} \qquad V \qquad (2.3)$$

Nota-se que o potencial elétrico independe da carga q_2 . Pode-se, a partir deste conceito, calcular o trabalho para deslocar a carga q_2 de A até B, como sendo:

$$W_{AB} = -\int_A^\infty q_2 \vec{E}_1 d\vec{r} - \int_\infty^B q_2 \vec{E}_1 d\vec{r} = -\int_A^B q_2 \vec{E}_1 d\vec{r}$$

$$W_{AB} = -q_2 V_A - (-q_2 V_B) = q_2 (V_B - V_A) \tag{2.4}$$

ou seja, a diferença de potencial (d.d.p. ou tensão) $V_{BA} = V_B - V_A$ entre os pontos A e B, consiste no trabalho (por unidade de carga) para se deslocar uma carga de A até B..

2.2.2 Corrente Elétrica

Define-se a intensidade de corrente elétrica (i) que atravessa uma superfície, Fig. 2.2, como a quantidade de carga elétrica que atravessa a superfície por unidade de tempo. Assim a corrente será dada por:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad \text{em} \quad \frac{C}{s} = A \ \text{(Ampère)} \tag{2.5}$$

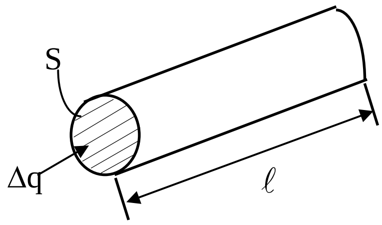


Figura 2.2 - Corrente Elétrica

O sentido convencional da corrente elétrica é o correspondente à circulação de cargas positivas. Logo, em condutores metálicos, o fluxo de elétrons, que são cargas negativas, é em sentido contrário ao sentido convencional da corrente.

2.2.3 Lei de Joule e Resistência Elétrica

A circulação de corrente elétrica em um condutor provoca o seu aquecimento, pela sua "resistência" à passagem da corrente elétrica.

A Lei de Joule estabelece que a energia, W, transformada em calor, ou dissipada, é dada por:

$$W = R\,I^2\,t \tag{2.6}$$

onde:
W - é a energia dissipada no condutor em J (Joule);
I - é a corrente elétrica em A;
R - é a resistência elétrica do condutor em Ω (Ohm).

Assim, a potência dissipada por efeito Joule pode ser dada por $P = \frac{W}{t} = RI^2$ e é medida em J/s ou W (Watt). Se a corrente for função do tempo $i = i(t)$, então a potência instantânea será $p(t) = R\,i^2(t)$ e, para um tempo t, a energia dissipada será

$$W = \int_0^t R\,i^2(t)\,dt\,.$$

A resistência elétrica R depende, basicamente, das características geométricas e do material do condutor. Para um condutor cilíndrico, como o da Fig. 2.2, tem-se:

$$R = \rho\,\frac{\ell}{S} \tag{2.7}$$

onde:
ℓ é o comprimento do condutor em m;
S é a área da secção transversal em m^2;
ρ é a resistividade elétrica do material em Ω×m
Quando a área do condutor é medida em mm^2 a resistividade passa a ser medida em Ω×mm^2 / m.

Pode-se definir, ainda, a condutância, G, e a condutividade do material, σ, como sendo o inverso da resistência e da resistividade, respectivamente. Formalmente:

$$G = \frac{1}{R} \quad \text{(em mho ou S = Siemens)} \qquad \text{e} \qquad \sigma = \frac{1}{\rho} \quad \text{(em mho/m ou S/m)}$$

2.2.4 Lei de Ohm

Pela Lei de Joule, eq. (2.5), a energia dissipada num condutor percorrido por uma corrente constante I é dada por $W = RI^2 t = RI\,It$. Sendo $I\,t = q$, tem-se $W = RIq$. Ora, a energia pode ser também avaliada como sendo o trabalho para levar a carga q entre os dois pontos extremos do condutor, que pode ser dada por $W = Vq$ onde V é a diferença de potencial entre esses pontos. Igualando as expressões para cálculo da energia dissipada no condutor:

$$W = RIq = Vq$$

resulta para a diferença de potencial o valor:

$$V = R \times I \tag{2.8}$$

onde V é a d.d.p. (ou tensão) entre os extremos do condutor; a expressão será válida sempre que a resistência R for constante.

2.2.5 Variação da Resistência com a Temperatura

A resistência elétrica de um condutor é variável com sua temperatura. O mesmo, obviamente, acontece para a resistividade elétrica do material, conforme a Fig. 2.3:

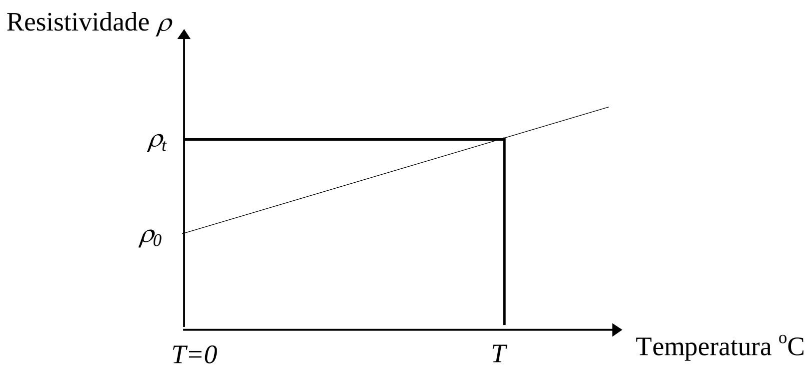


Figura 2.3 - Variação da resistividade com a temperatura

A resistividade de um material em função da temperatura é dada por: $\rho_T = \rho_0(1 + \alpha_0 T)$. Para o caso do cobre tem-se $\rho_{20^0C} = 0{,}0174\ \Omega mm^2/m$ e $\alpha_{20^0C} = 0{,}00393\ {}^oC^{-1}$, para o alumínio $\rho_{20^0C} = 0{,}0283\Omega\, mm^2/m$ e $\alpha_{20^0C} = 0{,}00403\ {}^oC^{-1}$.

2.2.6 Força Eletromotriz (f.e.m.)

A força eletromotriz consiste na energia convertida em energia elétrica por unidade de carga, isto é:

$$E = \frac{dW}{dq} .$$

Sabe-se que um gerador elétrico converte energia de alguma forma para energia elétrica; uma pilha, por exemplo, converte energia química em energia elétrica. A força eletromotriz E nos terminais do gerador, constitui a tensão ou d.d.p. necessária à circulação de corrente, suprindo a energia que o circuito requerer. A potência fornecida pelo gerador ao circuito pode ser calculada por:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq}\,\frac{dq}{dt} = E.i$$

2.3 BIPOLOS

2.3.1 Curvas Características de Bipolos

Bipolo elétrico é qualquer dispositivo elétrico com dois terminais acessíveis, mediante os quais pode ser feita a sua ligação a um circuito.

O comportamento elétrico de um bipolo pode ser obtido a partir de sua característica externa, ou curva característica, que é representada pela função $V = f(I)$. A característica externa representa a tensão nos terminais do bipolo em função da corrente que o atravessa, conforme a Fig. 2.4.

Os bipolos classificam-se em lineares e não lineares, conforme sua curva característica, seja uma reta ou não, respectivamente. Pode-se, ainda, classificá-los em passivos e ativos, conforme sua curva característica cruze a origem ou corte o eixo dos coordenadas cartesianas em dois pontos, conforme mostra a Fig. 2.4.b, respectivamente.

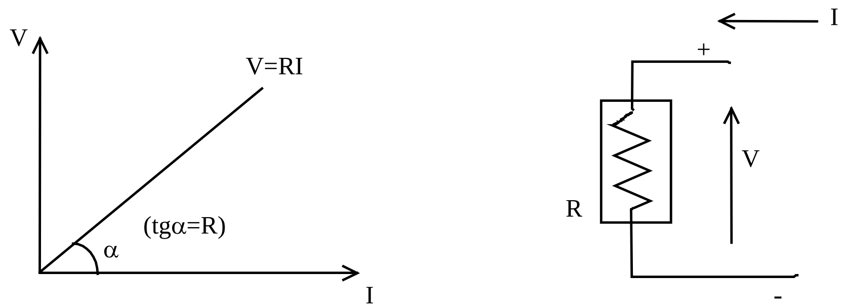
Um resistor com resistência constante, por exemplo, é um bipolo passivo linear pois sua função V=RI é representada por uma reta passando pela origem, com coeficiente angular R.

Uma bateria pode ser representada pela associação de um gerador ideal com f.e.m. E, em série com uma resistência, que representa a resistência interna da bateria. A diferença de potencial entre os terminais da bateria (A e B) é igual à soma das d.d.ps. entre os pontos A e B e, entre os pontos C e B, que é dada por:

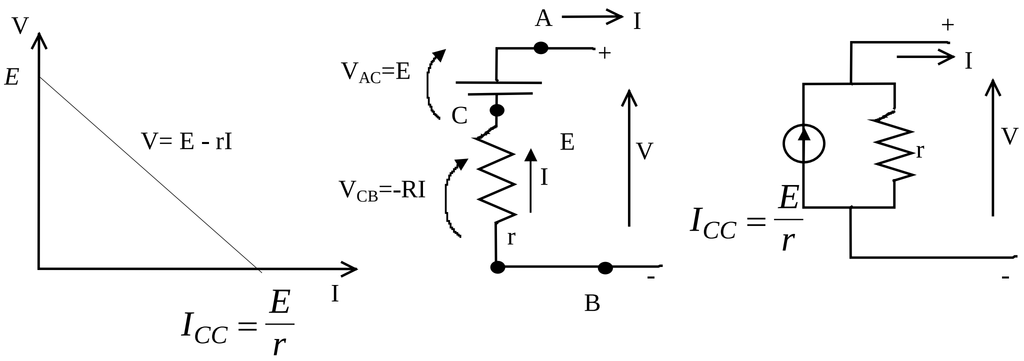
$$V_{AB} = V_{AC} + V_{CB} = E - r\,I$$

Conforme Fig. 2.4.b, a reta cruza os eixos nos pontos de coordenadas (0,E) e (I_{CC},0), e representa um bipolo ativo linear.

O valor de I_{CC}, também chamado de corrente de curto circuito do bipolo ativo, representa o valor da corrente quando a tensão no terminais do bipolo é nula, ou seja, quando os terminais do bipolo estão ligados em curto circuito.



a - bipolo passivo



b - bipolos ativos

Figura 2.4 - Características externas de bipolos elétricos

A f.e.m. E é chamada de tensão em vazio, pois representa o valor da tensão nos terminais do bipolo quando a corrente é nula, isto é, quando seus terminais estão em circuito aberto.

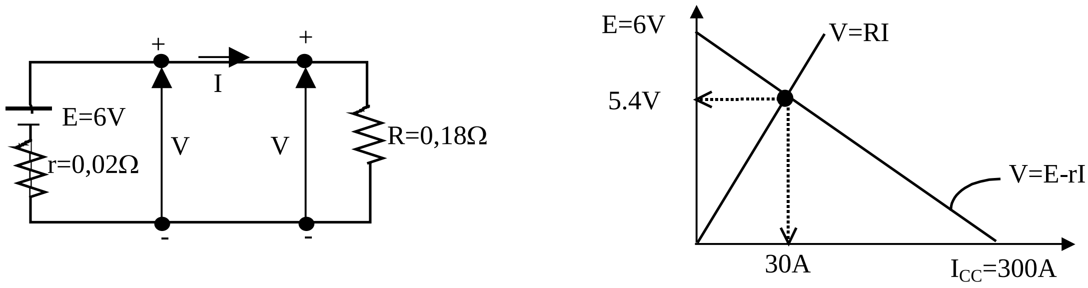
Normalmente assinalam-se os terminais com os símbolos: + para o terminal positivo e - para o terminal negativo. Convenciona-se que o potencial do primeiro é maior que o do segundo.

Utilizam-se duas convenções para a representação de correntes e tensões em bipolos:

- Convenção do receptor: a corrente positiva entra no terminal positivo do bipolo; usualmente utilizada para bipolos passivos.
- Convenção do gerador: a corrente positiva sai pelo terminal positivo; usualmente utilizada para bipolos ativos.

Exemplo 2.1

Para o circuito da Fig. 2.5 pede-se determinar a tensão nos terminais do bipolo ativo e a corrente elétrica que circula no circuito.



a) Circuito do Exemplo b) Resolução Gráfica

Figura 2.5 Circuito para o Ex. 2.1

Resolução analítica: Como se pode notar na Fig 2.5a, os valores de tensão nos terminais e corrente, para os dois bipolos, são iguais. Sendo:

- Para o bipolo ativo V = E - r.I = 6 - 0,02.I;
- Para o bipolo passivo V = R.I = 0,18.I;

Igualando as duas expressões temos:

$$6 - 0{,}02I = 0{,}18I \rightarrow I = \frac{6}{0{,}2} = 30A$$

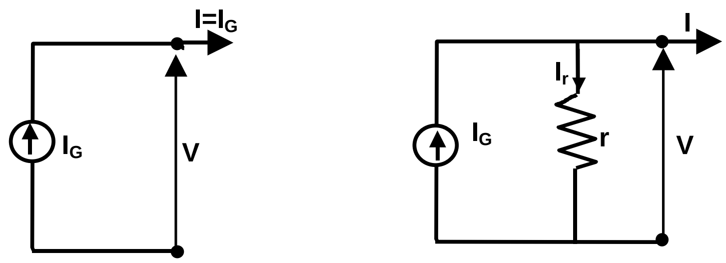
e

$$V = 0{,}18 \times 30 = 5{,}4 \ \text{V}$$

Resolução gráfica: Na Fig. 2.5b apresenta-se o método gráfico de resolução, no qual o ponto de intersecção das duas curvas características dos bipolos representa a solução ou o ponto de operação do circuito.

2.3.2 Gerador de Corrente

Um gerador de corrente ideal é aquele que mantém uma dada corrente, I_G , independente do valor da tensão nos seus terminais. É representado conforme a Fig. 2.6 a.



a) Gerador de corrente ideal   b) gerador de corrente real

Figura 2.6 - Gerador de Corrente

Um gerador de corrente real pode ser representado pela associação em paralelo de um gerador de corrente ideal com uma resistência, Fig. 2.6.b. A curva característica deste bipolo pode ser obtida observando-se que a corrente de saída, I, é igual à corrente do gerador, I_G, menos corrente, I_r, que flui pela resistência r. Assim sendo resulta:

$$I = I_G - I_r = I_G - \frac{V}{r} \quad \text{ou} \quad V = r\,I_G - r\,I \tag{2.9}$$

Note-se que a curva característica de um gerador de corrente real, eq. (2.9), é idêntica à de um gerador de tensão (ou bateria) que tenha resistência interna r e corrente de curto circuito dada por $I_G = E / r$. Assim, um gerador de corrente real pode ser substituído por um gerador de tensão equivalente e vice-versa. É comum, para geradores de corrente, utilizar-se a condutância ao invés da resistência. Sendo $g = 1/r$, a equação do bipolo torna-se:

$$I = I_G - g\,V \quad \text{ou} \quad V = (I_G - I)/g$$

2.3.3 Associação de Bipolos

É comum desejar-se obter um bipolo equivalente a uma associação de bipolos, ou seja, a curva característica do bipolo equivalente deve ser igual à curva da associação dos bipolos. A seguir será analisado como se pode obter a curva característica da associação de bipolos em série e da associação de bipolos em paralelo.

A - Associação em série

A Fig. 2.7a representa a associação em série de n bipolos que apresentam forças eletromotrizes E_i e resistências internas R_i, com i = 1, 2, ..., n.

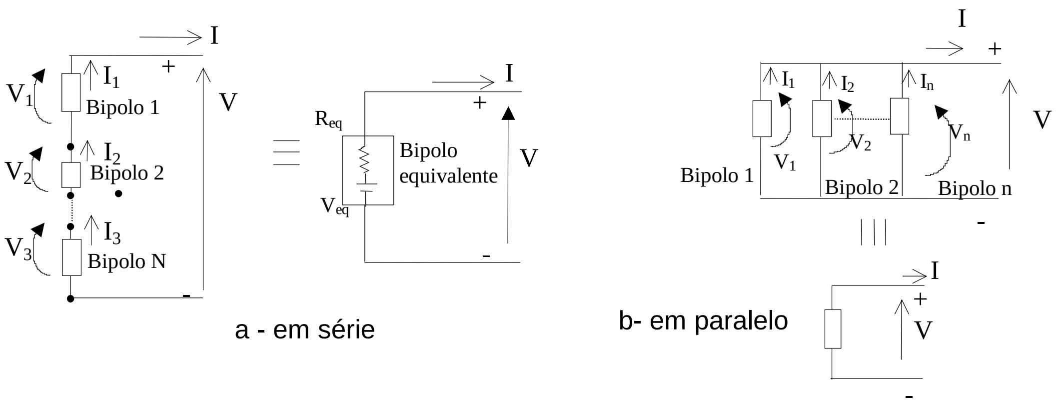


Figura 2.7 - Associação de Bipolos

Observa-se que bipolos associados em série são percorridos pela mesma corrente e sua tensão resultante é dada pela soma das tensões individuais, Fig. 2.7.a. Formalmente resulta:

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$$
$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = V$$

Para o caso de bipolos ativos e lineares (o caso de bipolo passivo é um caso particular de bipolo ativo com f.e.m. nula), resulta:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \dots + V_n = [E_1 - R_1 I_1] + [E_2 - R_2 I_2] + \dots + [E_n - R_n I_n] = \\ &= \sum_{i=1,n} E_i - \sum_{i=1,n} R_i I = \sum_{i=1,n} E_i - I \sum_{i=1,n} R_i = E_{eq} - R_{eq} I \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Ou seja, da eq. (2.10) obtém-se que a f.e.m. do bipolo equivalente é dada pela soma das f.e.m.s. individuais de cada um dos bipolos e a resistência equivalente é dada pela soma das resistências individuais.

B - Associação em paralelo

Na associação em paralelo de bipolos, Figura. 2.7.b, a tensão terminal dos bipolos é igual e a corrente total é dada pela soma das correntes individuais. A determinação do bipolo equivalente é levada a efeito com maior simplicidade pela substituição dos bipolos individuais de tensão por bipolos de corrente real. Resultam as seguintes relações:

$$V_1 = V_2 = \ldots = V_n = V$$
$$I_1 + I_2 + \ldots + I_n = I$$

Para cada bipolo tem-se $I_i = Icc_i - g_i V_i$, logo para a associação resulta:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = \sum_{i=1,n} I_{CC,i} - \sum_{i=1,n} g_i V_i = \sum_{i=1,n} I_{CC,i} - V \sum_{i=1,n} g_i \qquad (2.11)$$

Ou seja, da Equação. (2.11) conclui-se que o gerador de corrente real equivalente à associação apresenta corrente constante igual à soma das correntes individuais e sua condutância é a soma das condutâncias individuais. Finalmente o bipolo equivalente em termos de gerador de tensão é dado por:

$$V = E_{eq} - R_{eq} I$$

onde:

$$E_{eq} = \frac{\sum_{i=1,n} I_{CC,i}}{\sum_{i=1,n} g_i} \quad \text{e} \quad R_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1,n} g_i}$$

Exemplo 2.2

Para o circuito da Figura. 2.8, em que se tem dois bipolos ativos e um passivo, sendo R_1=0,02 Ω; R_2=0,08 Ω, R_3= 0,20 Ω, E_1= 5 V e E_2= 10 V. Pede-se:

a) O bipolo equivalente da associação série-paralelo dos três bipolos.

b) A corrente I e a tensão nos terminais V, do bipolo equivalente quando alimentar, entre seus terminais A e B, uma resistência R de 10Ω.

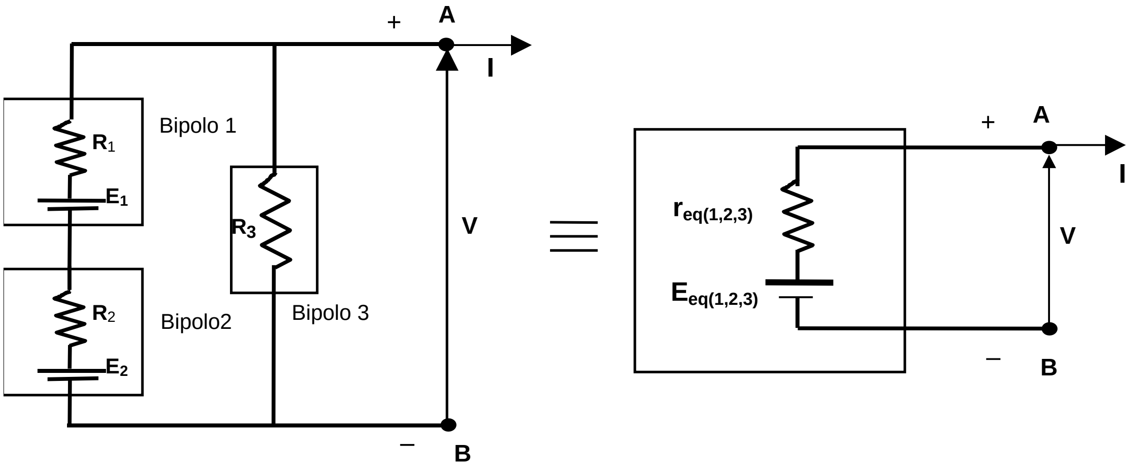


Figura 2.8 - Associação de bipolos do exemplo 2.2

a) O bipolo equivalente da associação dos bipolos 1 e 2, conta com:

$$E_{eq(1+2)} = E_1 + E_2 = 5 + 10 = 15\,V$$
$$R_{eq(1+2)} = R_1 + R_2 = 0{,}02 + 0{,}08 = 0{,}10\,\Omega$$

Em termos de gerador de corrente, temos:

$$I_{CCeq(1+2)} = \frac{15}{0{,}10} = 150\,A \quad \text{e} \quad g_{eq(1+2)} = \frac{1}{0{,}10} = 10\,S$$

Associando este ao bipolo 3, resulta:

$$I_{CCeq(1,2,3)} = I_{CCeq(1+2)} + I_{CC1} = 150 + 0 = 150\ \ A$$
$$g_{eq(1+2+3)} = g_{eq(1+2)} + g_{eq(3)} = 10 + \frac{1}{0{,}2} = 10 + 5 = 15\ \ S$$

logo

$$E_{eq(1,2,3)} = \frac{1}{15} \times 150 = 10\,V$$
$$r_{eq(1,2,3)} = \frac{1}{15} = 0{,}0667\ \ \Omega$$

b) A corrente na resistência ligada aos terminais A e B, pode ser calculada por:

$$I = \frac{E_{eq(1,2,3)}}{r_{eq(1,2,3)} + R_{AB}} = \frac{10}{0{,}0667 + 10} = 0{,}9934A$$

e a tensão entre A e B, pode ser calculada por:

$$V = R_{AB}\, I = 10 \times 0{,}9934 = 9{,}934V$$

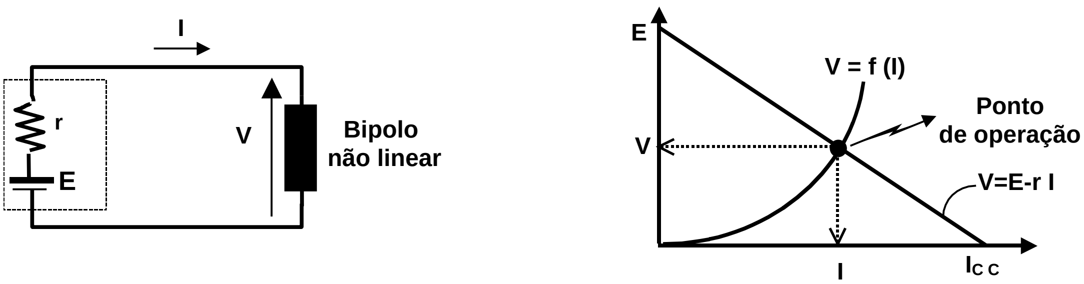
2.3.4 Bipolos não Lineares

A resolução analítica de redes que contam com bipolos não lineares geralmente é obtida através de processo iterativo. Por outro lado, a resolução é bastante simplificada utilizando-se procedimentos gráficos.

Na Figura 2.9 apresenta-se um bipolo ativo linear, bipolo 1, que supre um bipolo passivo não linear, bipolo 2, caracterizado por característica externa V=f(I). A solução analítica dessa rede poderia ser feita fixando-se um valor arbitrário $I^{(0)}$ da corrente impressa no bipolo passivo. A partir dessa corrente determina-se, através da curva $V^{(1)} = f(I^{(0)})$, a tensão em seus terminais. A partir dessa tensão calcula-se a corrente fornecida pelo bipolo ativo:

$$I^{(1)} = \frac{E - V^{(1)}}{r} \quad .$$

Repete-se o procedimento até que diferença entre os valores das correntes em duas iterações sucessivas seja não maior que uma tolerância pré-estabelecida.



a) Circuito b) Resolução Gráfica

Figura 2.9 - Bipolos Não Lineares

Para a solução gráfica destaca-se que, em operação em regime permanente, as tensões nos terminais dos dois bipolos e suas correntes devem ser iguais. Logo, o ponto de operação será dado pela interseção das duas curvas. Na Figura 2.9.a apresenta-se o método de resolução gráfica deste circuito.

2.3.5 Redes de Bipolos

Uma rede de bipolos é um conjunto de bipolos ligados entre si. Pode-se definir, ainda, para uma rede :

- Nó - um ponto qualquer da rede no qual se reúnem dois ou mais bipolos distintos;
- Ramo (ou lado) - qualquer dos bipolos da rede cujos terminais estão ligados a dois nós distintos;
- Malha - qualquer circuito fechado da rede.
-

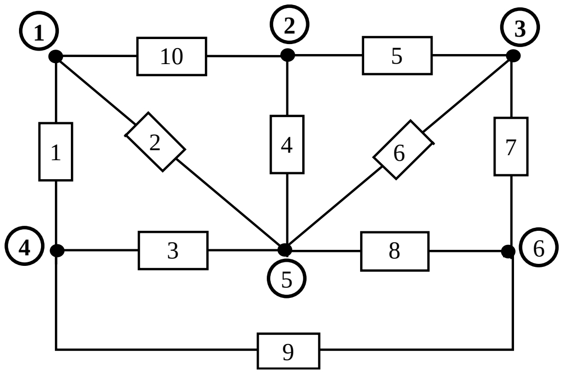


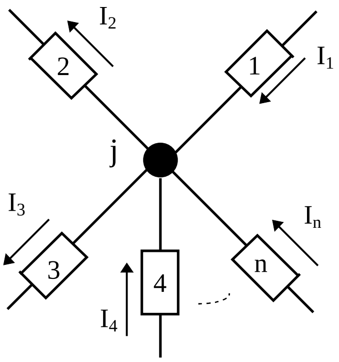
Figura 2.10 - Exemplo de rede de bipolos

A rede de bipolos da Figura. 2.10 é um exemplo que conta com 6 nós, 10 ramos e várias malhas (por exemplo: ramos 1-2-3, ramos 4-5-7-8, ramos 1-10-5-7-9, etc.).

2.3.6 Leis de Kirchhoff

As duas leis de Kirchhoff são apresentadas a seguir:

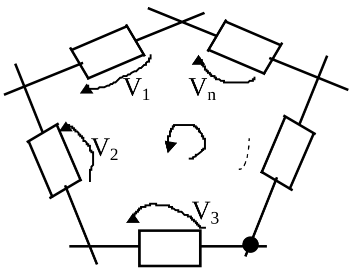
1ª Lei de Kirchhoff: A soma algébrica das correntes aferentes a um nó qualquer de uma rede de bipolos é nula. Para tanto, deve-se atribuir às correntes que “entram” no nó sinal contrário às que “saem” do nó (vide Figura. 2.11). A justificativa desta lei é evidente em se considerando que num nó não pode haver acúmulo de cargas elétricas.



$$\Sigma I_i=0$$
$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 +...+I_n = 0$$

Figura 2.11 - 1ª Lei de Kirchhoff aplicada ao nó j

<u>2ª Lei de Kirchhoff</u>: A soma algébrica das tensões, medidas ordenadamente nos ramos de uma malha, é nula (conforme a Figura. 2.12).



$$\Sigma V_i=0$$
$$V_1 - V_2 - V_3 +...V_n = 0$$

Figura 2.12 - 2ª Lei de Kirchhoff aplicada a uma malha genérica da rede

A forma prática de se utilizar a 2ª Lei é a de escolher um circuito de percurso para a malha, anti-horário, por exemplo, e observar-se que todos os ramos com tensão concorde ao sentido de percurso convencionado entram como parcelas positivas e todos os ramos com tensão discorde ao sentido entram como parcelas negativas.

2.4 RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA (CC)

2.4.1 Aplicação das Leis de Kirchhoff

As Leis de Kirchhoff são basicamente utilizadas para a solução de circuitos, ou seja, determinação de tensões e correntes em cada um dos bipolos de uma rede elétrica.

A aplicação da 1ª Lei de Kirchhoff numa rede de bipolos com *n* nós, resulta num sistema com *n-1* equações independentes, de vez que, ao aplicá-la ao enésimo nó, determinar-se-á uma equação que é combinação linear das demais equações.

Para o caso geral de um circuito com *r* ramos e *n* nós, deve-se determinar *r* correntes e *r* tensões, isto é, tem-se *2r* incógnitas. Da aplicação da Lei de Ohm aos ramos da rede obtem-se *r* equações independentes. Da aplicação da 1ª Lei de Kirchhoff obtem-se mais *n-1* equações. Portanto devemos aplicar a 2ª Lei de Kirchhoff a um número *m* de malhas dado por:

$$m = 2r - (n-1) - r = r - n + 1$$

Qualquer circuito elétrico CC composto por bipolos lineares, pode ser resolvido pelo emprego das leis de Ohm e de Kirchhoff, resultando em sistemas de *2r* equações e *2r* incógnitas. Neste texto veremos outros métodos mais simples de resolução de circuitos.

Exemplo 2.3

Resolva a rede da Figura. 2.13 sem associar os bipolos.

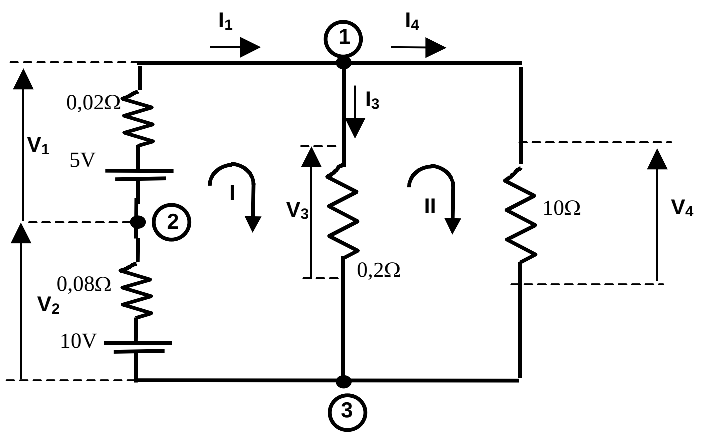


Figura. 2.13 – Rede para o exemplo 2.3

A rede conta com 4 ramos e 3 nós e tem-se 8 incógnitas (V_1, V_2, V_3, V_4 e I_1, I_2, I_3, I_4):

Aplicando-se a lei de Ohm aos quatro bipolos resultam as equações:

$$V_1 = 5 - 0{,}02 \times I_1$$
$$V_2 = 10 - 0{,}08 \times I_2$$
$$V_3 = 0{,}2\, I_3$$
$$V_4 = 10\, I_4$$

Aplicando-se a 1ª Lei de Kirchhoff, a dois nós, resultam as equações:

$$I_1 - I_3 - I_4 = 0 \quad \text{(nó 1)}$$
$$I_1 - I_2 = 0 \quad \text{(nó 2)}$$

Aplicação da 2ª Lei de Kirchhoff a (r - n +1 = 2) malhas:

$$V_1 + V_2 - V_3 = 0 \quad \text{(malha I)}$$
$$V_3 - V_4 = 0 \quad \text{(malha II)}$$

Obtém-se, assim, um sistema de 8 equações a 8 incógnitas. Substituindo-se as equações da Lei de Ohm nas equações referentes à 2ª Lei de Kirchhoff, tem-se o seguinte sistema de equações equivalente:

$$I_1 - I_3 - I_4 = 0$$
$$I_1 - I_2 = 0$$
$$5 - 0{,}02 \times I_1 + 10 - 0{,}08 \times I_2 - 0{,}2 \times I_3 = 0$$
$$0{,}2 \times I_3 - 10 \times I_4 = 0$$

que resolvidas fornecem:

$$I_1 = I_2 = 50{,}662 \text{ A}$$
$$I_3 = 49{,}668 \text{ A}$$
$$I_4 = 0{,}9934 \text{ A}$$

Pelas leis de Ohm, resultam as tensões:

$$V_1 = 5 - 0{,}02 \times 50{,}662 = 3{,}987 \text{ V}$$
$$V_2 = 10 - 0{,}08 \times 50{,}662 = 5{,}497 \text{ V}$$
$$V_3 = V_4 = 0{,}2 \times 49{,}668 = 9{,}934 \text{ V}$$

Destaca-se que I_4 e V_4 são os mesmos valores obtidos para o exemplo 2.2 resolvido por associação de bipolos.

2.4.2 Método das Correntes Fictícias de Maxwell

Este método é uma simplificação das leis de Kirchhoff. O procedimento utilizado no método é o de se fixar, para cada uma das $m = r - n + 1$ malhas independentes da rede, uma corrente fictícia para a qual adota-se um sentido de circulação. A 1ª Lei de Kirchhoff resulta automaticamente verificada pois cada corrente fictícia atravessa todos os nós da malha correspondente. A corrente em cada ramo é a soma algébrica das correntes fictícias que o percorrem. Aplicando-se a 2ª Lei de Kirchhoff para as *m* malhas, determina-se um sistema com *m* equações e *m* incógnitas, que são as correntes fictícias para cada malha.

Exemplo 2.4

Resolver a rede da Figura. 2.14 pelo método das correntes fictícias de Maxwell.

Adotam-se as correntes fictícias α e β para as malhas independentes I e II, respectivamente.

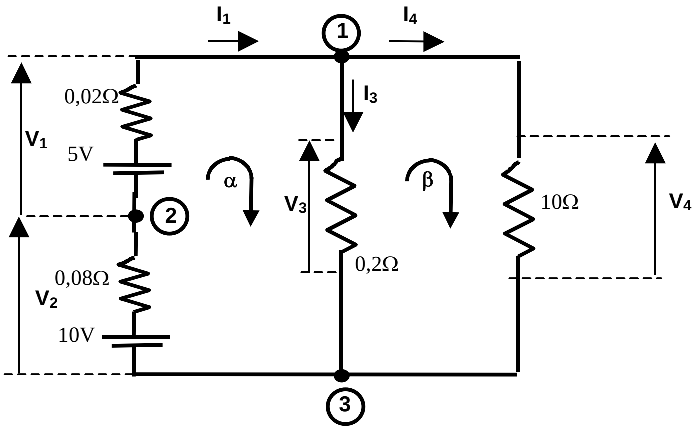


Figura 2.14 – Rede para o exemplo 2.3

Aplicando a 2ª Lei de Kirchhoff para as duas malhas, tem-se:

$$5 - 0{,}02\, I_1 + 10 - 0{,}08\, I_2 - 0{,}2\, I_3 = 0$$
$$0{,}2\, I_3 - 10\, I_4 = 0$$

Substituindo-se os valores das correntes de ramos pelo das de malha, isto é: $I_1 = I_2 = \alpha$, $I_3 = \alpha - \beta$ e $I_4 = \beta$, resulta:

$$5 - 0{,}02\, \alpha + 10 - 0{,}08\, \alpha - 0{,}2\, (\alpha - \beta) = 0$$
$$0{,}2\, (\alpha - \beta) - 10\, \beta = 0$$

ou seja:

$$0{,}3\, \alpha - 0{,}2\, \beta = 15$$
$$- 0{,}2\alpha + 10{,}2\beta = 0$$

Resolvendo-se o sistema de equações obtém-se: α = 50,662 A e β = 0,9934 A. Logo as correntes nos ramos são: $I_1 = I_2$ = 50,662 A; I_3 = 49,668 A e I_4 = 0,9934 A.

2.4.3 PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

O princípio da superposição de efeitos pode ser descrito da seguinte forma: "A corrente (ou tensão) num dos ramos de uma rede de bipolo lineares é igual à soma das correntes (ou tensões) produzidas nesse ramo por cada um dos geradores, considerado, separadamente, com os outros geradores inativos".
Gerador inativado significa:

- Tratando-se de gerador de tensão, sua f.e.m. é curto-circuitada, permanecendo no circuito, somente a resistência interna;
- Tratando-se de gerador de corrente, o gerador ideal é aberto, permanecendo no circuito somente a condutância interna do mesmo.

A demonstração do princípio da superposição de efeitos decorre da linearidade das equações de Kirchhoff .

Exemplo 2.5

Determinar, pelo método da superposição, a corrente no resistor R da rede da Figura 2.15.

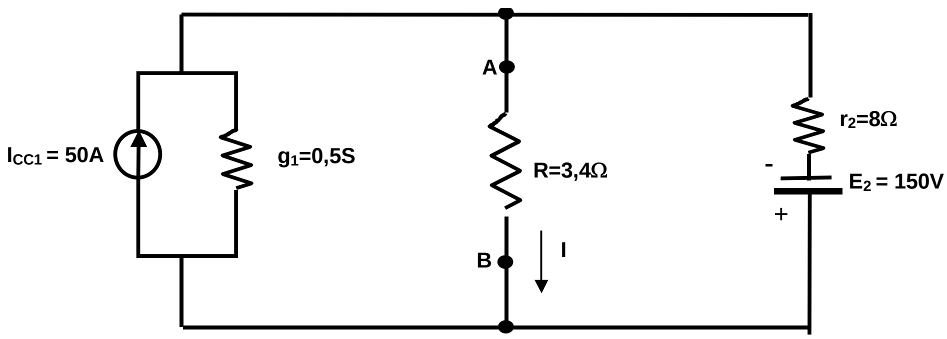


Figura 2.15 - Circuito para o Exemplo 2.5

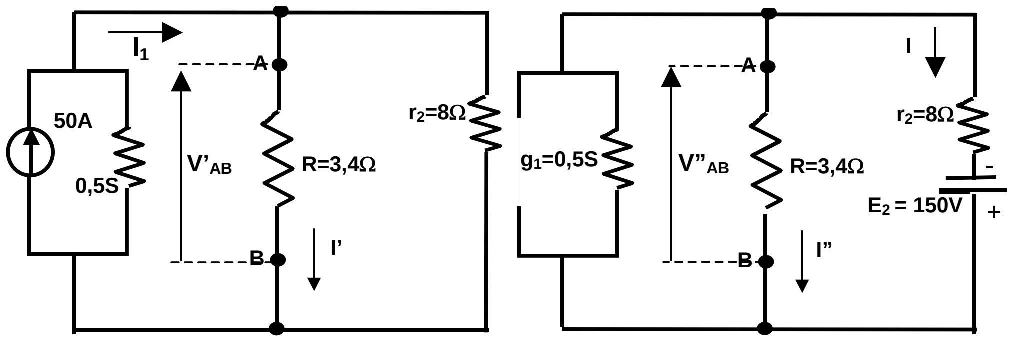


Figura 2.16 - Superposição de Efeitos

Aplicando-se o princípio da superposição de efeitos, Figura. 2.16, deve-se determinar as correntes, I' e I", que fluem pelo resistor R com o gerador 1 ativado e o gerador 2 desativado, e com o gerador 2 ativado e o gerador 1 desativado, respectivamente. A corrente total pela resistência R é dada pela soma das duas correntes, isto é: I = I' + I".

a) Cálculo de I'

Transformando-se o gerador 1 de corrente em gerador de tensão e, associando-se as resistências R e r_2 em paralelo, a corrente I_1 pode ser facilmente calculada. O gerador de tensão equivalente terá f.e.m. $E_1 = \frac{50}{0{,}5} = 100V$ e $r_1 = \frac{1}{0{,}5} = 2\,\Omega$. A associação em paralelo de R com r_2 é dada por $\frac{3{,}4 \times 8}{3{,}4 + 8} = 2{,}38956\,\Omega$. Logo:

$$I_1 = \frac{E_1}{r_1 + 2{,}38596} = \frac{100}{2 + 2{,}38596} = 22{,}8A$$

Logo:

$$V_1 = 22{,}8 \times 2{,}38596 = 54{,}4V \qquad \text{e} \qquad I' = \frac{54{,}4}{3{,}4} = 16A$$

b) Cálculo de I"

Associando-se, em paralelo, R com $r_1 = 1/g_1 = 1/0{,}5 = 2{,}0\ \Omega$ resulta resistência equivalente dada por $\frac{3{,}4 \times 2}{3{,}4 + 2} = 1{,}25926\ \Omega$. Portanto a corrente I_2 vale:

$$I_2 = \frac{150}{8 + 1{,}25926} = 16{,}2A \quad \text{e} \quad V_2 = -150 + 16{,}2 \times 8 = -20{,}4V\,.$$

Logo

$$I'' = \frac{V_2}{R} = \frac{-20{,}4}{3{,}4} = -6A$$

c) Cálculo de I = I' + I"

A corrente I é obtida da soma das duas parcelas I' e I", ou seja, I = 16 - 6 = 10A.

2.4.4 GERADORES EQUIVALENTES DE THÉVENIN E NORTON

O princípio do gerador equivalente de Thévenin consiste, basicamente, em substituir-se uma parte de uma rede de bipolos lineares por um gerador de tensão ideal em série com uma resistência. Este gerador é o "Gerador Equivalente de Thévenin" da parte da rede substituída.
Seja uma rede genérica, Figura. 2.17, que alimenta por seus terminais A e B um outro bipolo *Z*. Deseja-se determinar um gerador equivalente de Thévenin que substitua a rede do lado esquerdo dos pontos A e B. O bipolo *Z* não necessitar ser linear, entretanto, os bipolos a serem substituídos obrigatoriamente deverão ser lineares.

A tensão entre os terminais A e B quando o bipolo Z foi removido corresponderá à tensão de vazio do gerador equivalente de Thévenin, Figura. 2.17.b, isto é $V_0 = V_{AB}$. Por outro lado, ligando-se os terminais A e B em curto circuito determina-se a corrente de curto circuito, I_0, do gerador equivalente de Thévenin, Figura. 2.17.c.

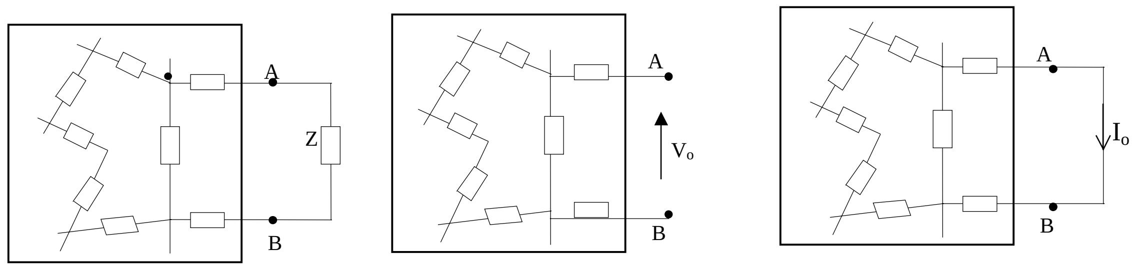
Em se tratando de bipolos lineares, a curva característica do bipolo equivalente à rede, visto dos terminais A e B, deve ser uma reta passando pelos pontos $(0, V_0)$ e $(I_0, 0)$.

Logo a rede pode ser substituída por um gerador linear de f.e.m. $E = V_0$ e resistência interna $r = V_0 / I_0$. Tal gerador é denominado gerador equivalente de Thévenin, Figura.2.17.d

A rede também pode ser substituída por um gerador de corrente, com corrente de curto $I_{CC} = I_0$ e condutância interna $g = 1/r = I_0 / V_0$. Nesse caso, denominar-se o gerador de gerador equivalente de Norton, conforme a figura 1.14e.

Para a determinação da resistência, ou da condutância, interna, pode-se também proceder da seguinte forma:

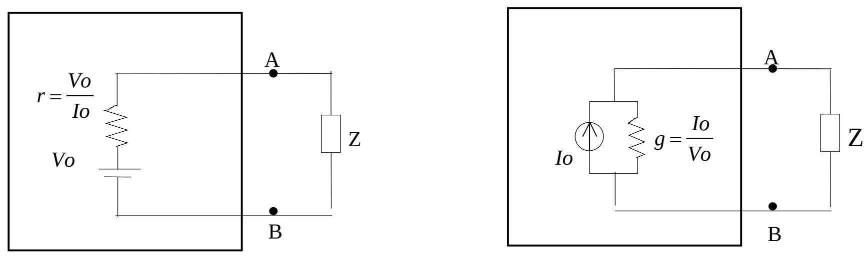
- Desativam-se os geradores internos;
- A rede resultante é composta, então, somente por bipolos passivos. A resistência desta rede, vista dos terminais A e B, é a resistência do gerador equivalente de Thévenin.



a) rede de bipolos lineares + bipolo Z

b) determinação da f.e.m. equivalente

c) determinação da corrente de curto circuito equivalente



d) gerador equivalente de Thévenin

e) gerador equivalente de Norton

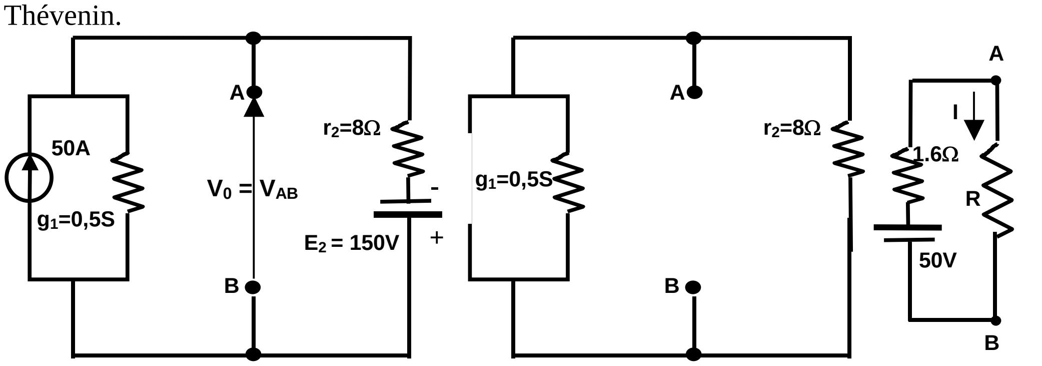
Figura 2.17 - Determinação dos geradores de Thévenin e Norton

---

Exemplo 2.6

Para a rede do Exemplo 2.5 determinar o gerador equivalente de Thévenin, visto dos pontos A e B, que fornecerá a corrente I para a resistência R.

As figuras 2.15 a e b ilustram a determinação da tensão em vazio e da resistência de Thévenin.



a.Tensão de vazio

b. Resistência equivalente

c.Ger.eq.

Figura 2.18 - Circuito do exemplo 2.6

A tensão V_0 pode ser facilmente calculada transformando-se o gerador 1 em gerador de tensão (E_1=100V e r_1=2Ω). A corrente I_1 de circulação, Figura.2.18.a, e, de conseqüência, a tensão V_o são:

$$I_1 = \frac{100+150}{8+2} = 25\,\text{A} \quad \text{e} \quad V_0 = 8\times 25 - 150 = 50\,\text{V}$$

A resistência de Thévenin é obtida pelo paralelo das resistências, Figura.2.18.b:

$$r_0 = \frac{2\times 8}{2+8} = 1{,}6\,\Omega$$

Substituindo-se a parte da rede vista dos pontos A e B pelo gerador equivalente de Thévenin, resulta o circuito da Figura.2.18.c, onde o valor da corrente I é dado por:

$$I = \frac{50}{1{,}6+3{,}4} = 10\,\text{A}$$

que é o mesmo valor obtido no exemplo anterior, onde foi aplicado o princípio da superposição de efeitos.