Física Moderna I
Aula 03

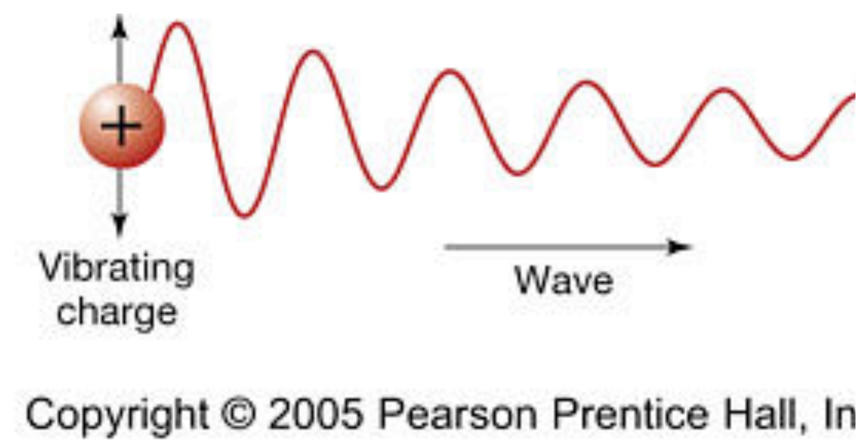
Marcelo G Munhoz
Pelletron, sala 245, ramal 6940
munhoz@if.usp.br

Radiação Térmica

- Ondas eletromagnéticas emitidas por todos os objetos com temperatura acima do zero absoluto
- **Importância**: um dos grandes problemas em aberto da física clássica no final do século XIX
- Animação

Radiação Térmica

- Isso ocorre devido ao movimento térmico de cargas elétricas que existem no interior dos corpos

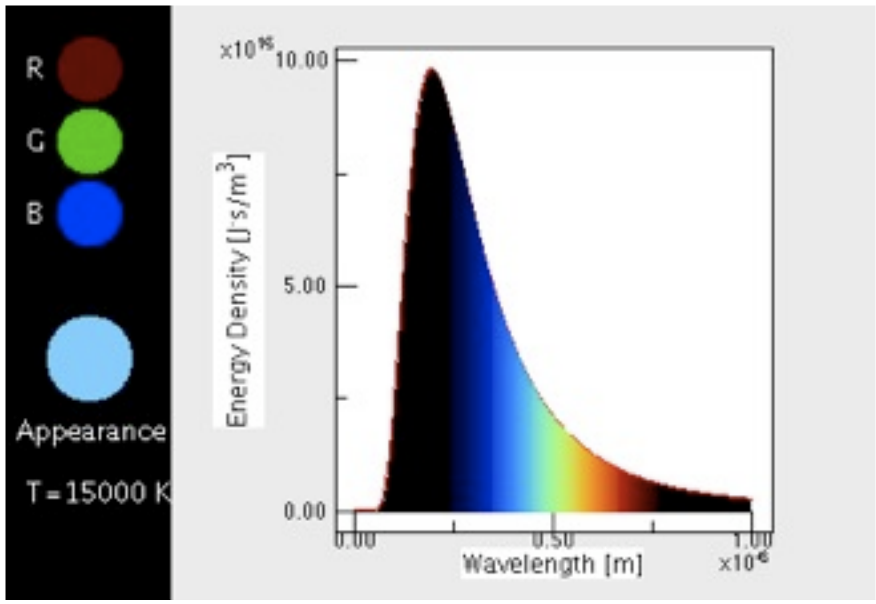


Espectro de frequência da radiação

- A radiação emitida por um objeto com temperatura T> 0 K não apresenta apenas uma frequência (lembre-se das ondas eletromagnéticas), mas uma **distribuição** de frequências

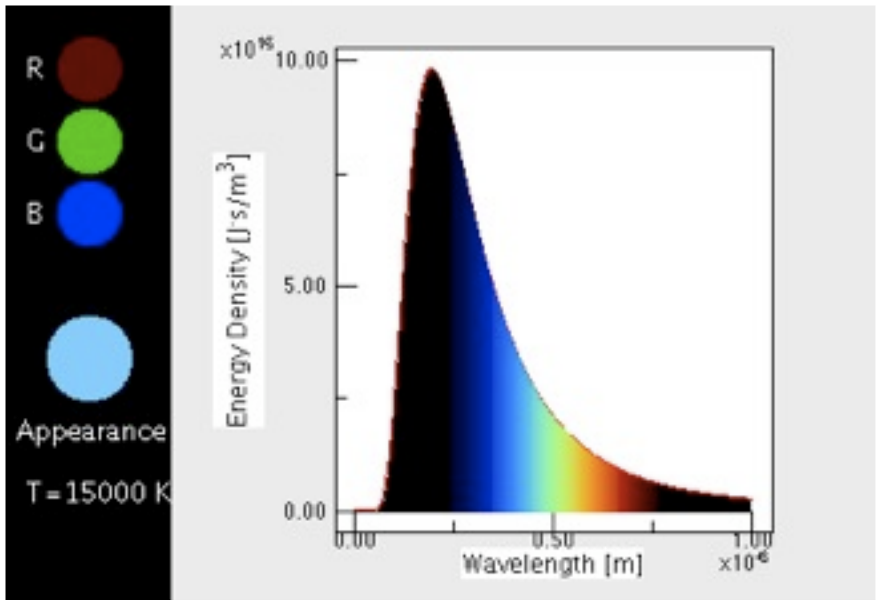
- A "quantidade" de radiação emitida com cada valor de frequência é medida em energia por unidade de tempo (potência) por unidade de área, chamada de radiância espectral $R_T(\nu)$

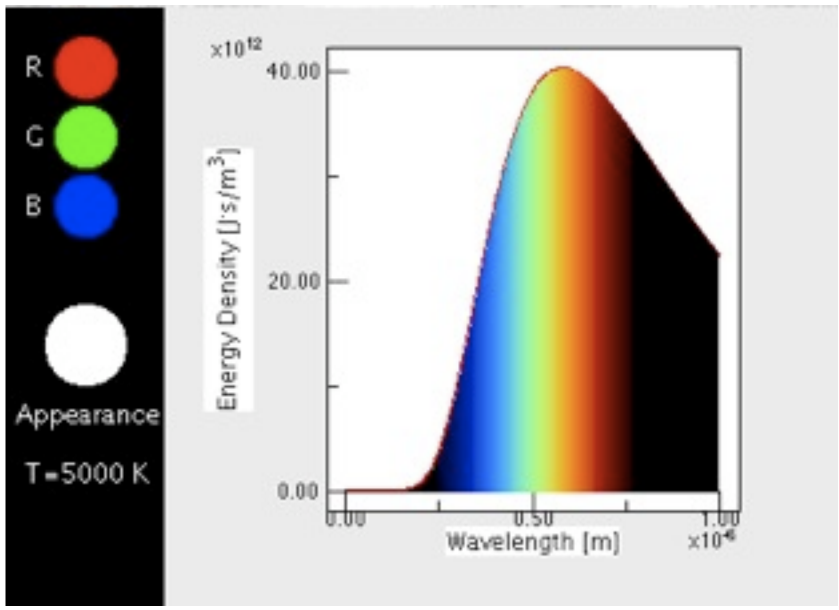
Espectro de frequência da radiação



- A "quantidade" de radiação emitida com cada valor de frequência é medida em energia por unidade de tempo (potência) por unidade de área, chamada de radiância espectral $R_T(\nu)$
- Animação

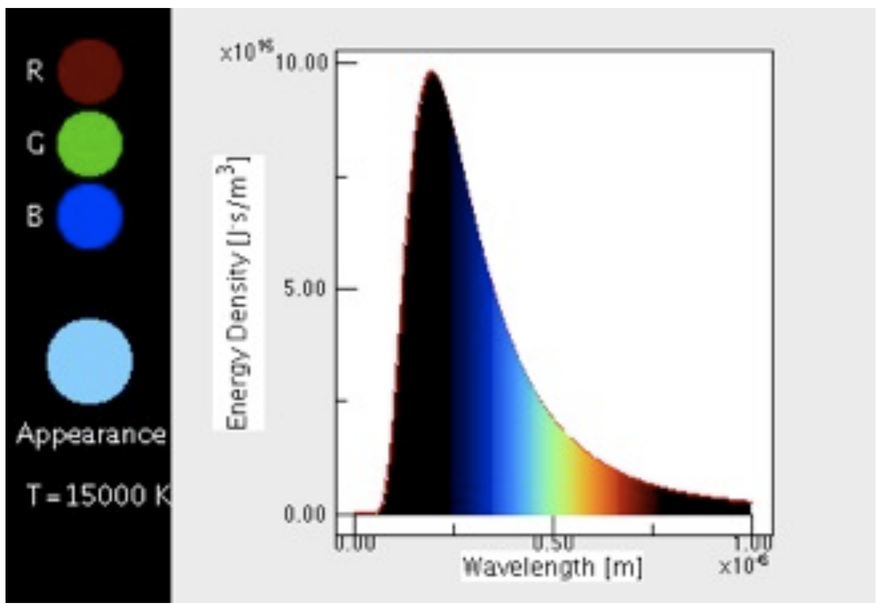
Espectro de frequência da radiação

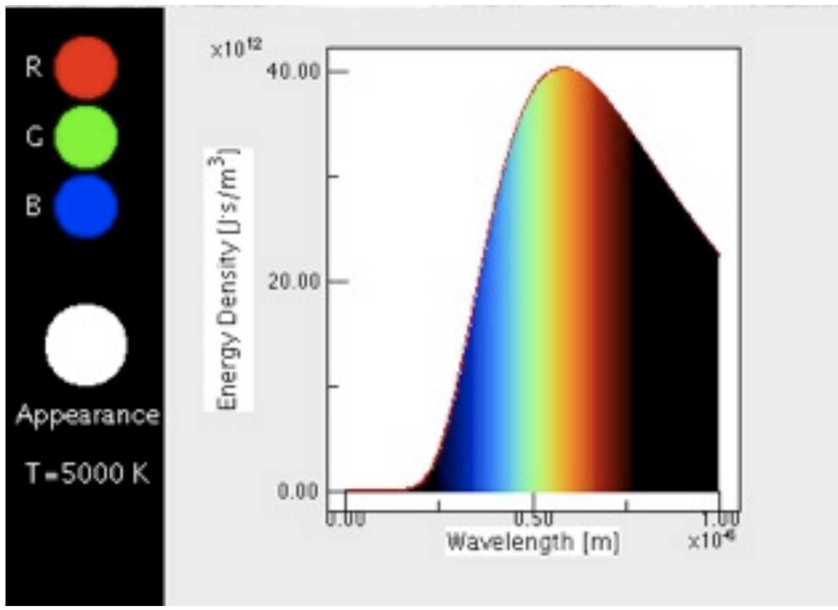


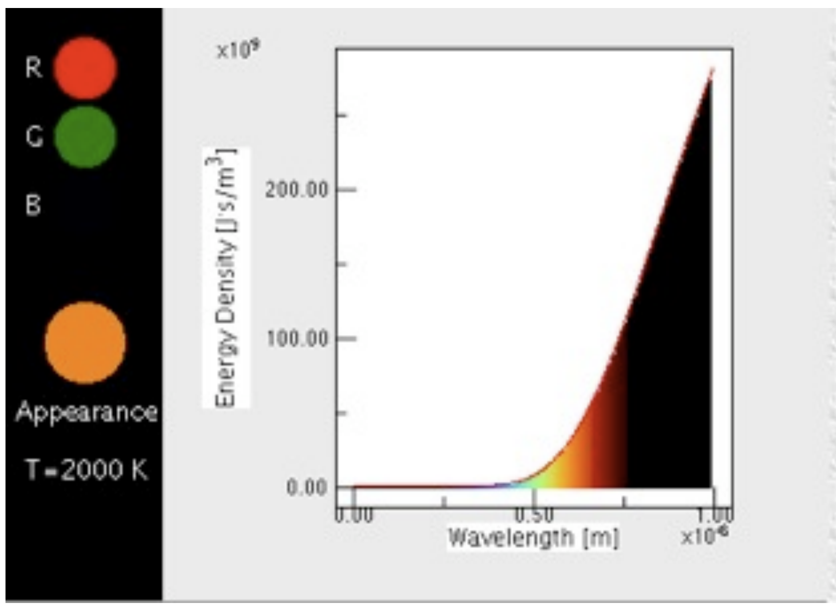


- A “quantidade” de radiação emitida com cada valor de frequência é medida em energia por unidade de tempo (potência) por unidade de área, chamada de radiância spectral $R_T(\nu)$
- <u>Animação</u>

Espectro de frequência da radiação

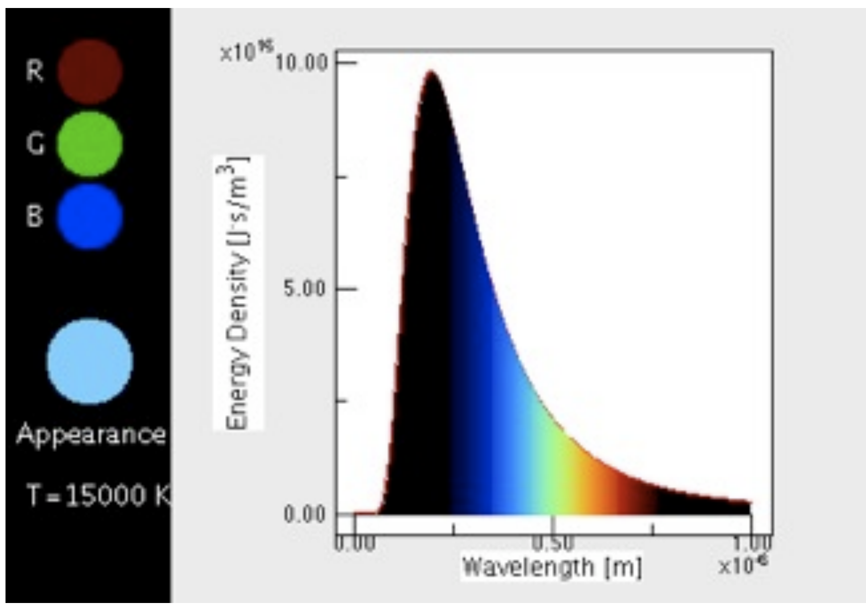


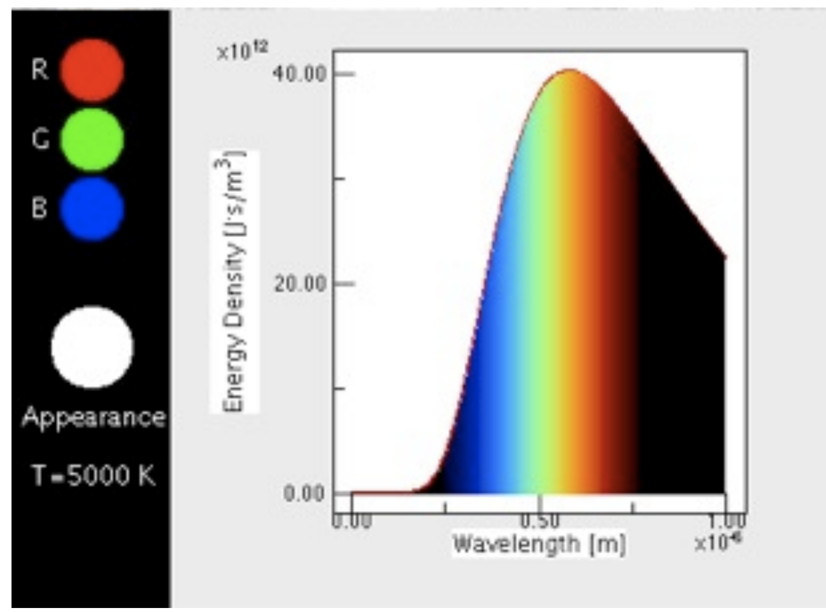


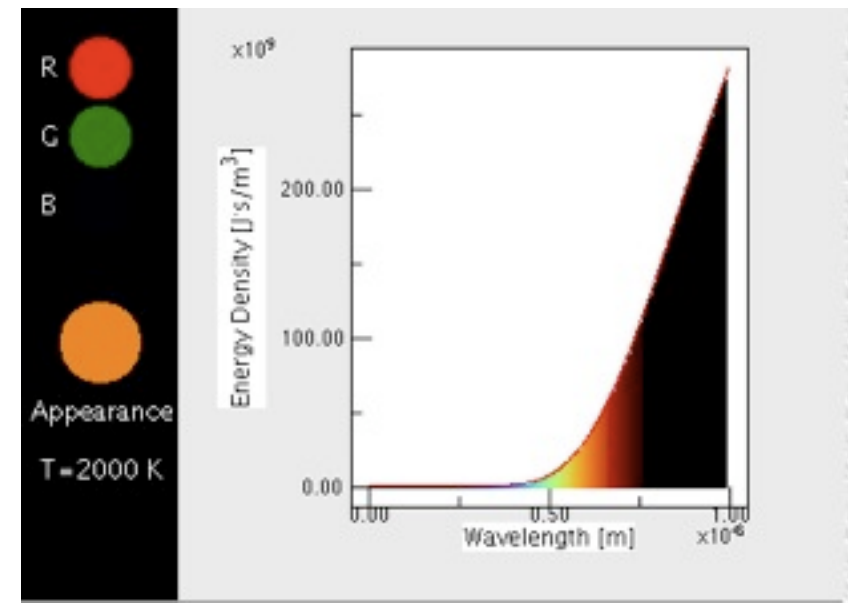


- A "quantidade" de radiação emitida com cada valor de frequência é medida em energia por unidade de tempo (potência) por unidade de área, chamada de radiância espectral $R_T(\nu)$
- Animação

Espectro de frequência da radiação





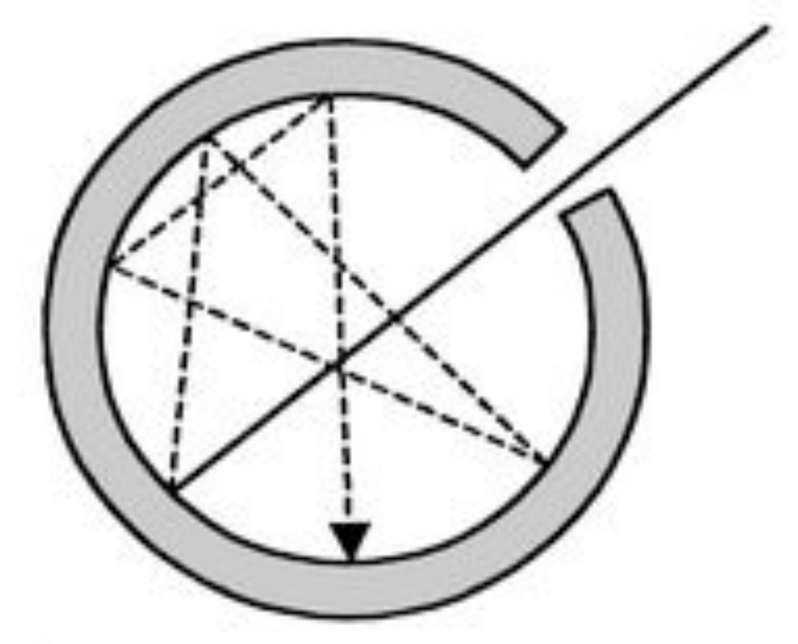


- A "quantidade" de radiação emitida com cada valor de frequência é medida em energia por unidade de tempo (potência) por unidade de área, chamada de radiância espectral $R_T(\nu)$
- <u>Animação</u>

Corpo Negro

- Objetos cuja superfície absorve toda a radiação incidente

- **Importância**: Todos os objetos que se comportam como um corpo negro emitem a mesma radiância espectral (universalidade) que depende da temperatura e não do material de que é feito



Leis empíricas

- Lei de Stefan (1879)

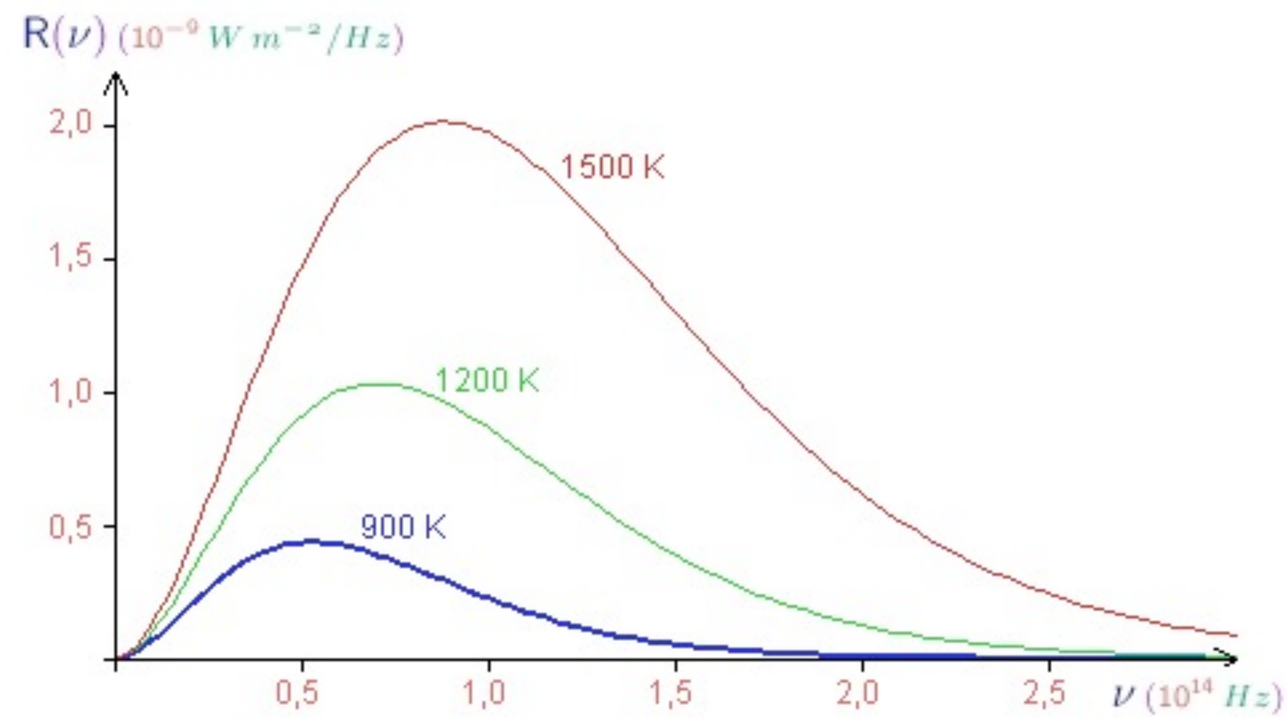
$$R_T = \sigma \cdot T^4$$

onde: $R_T = \int_0^\infty R_T(\nu) d\nu$

- Lei do deslocamento de Wien

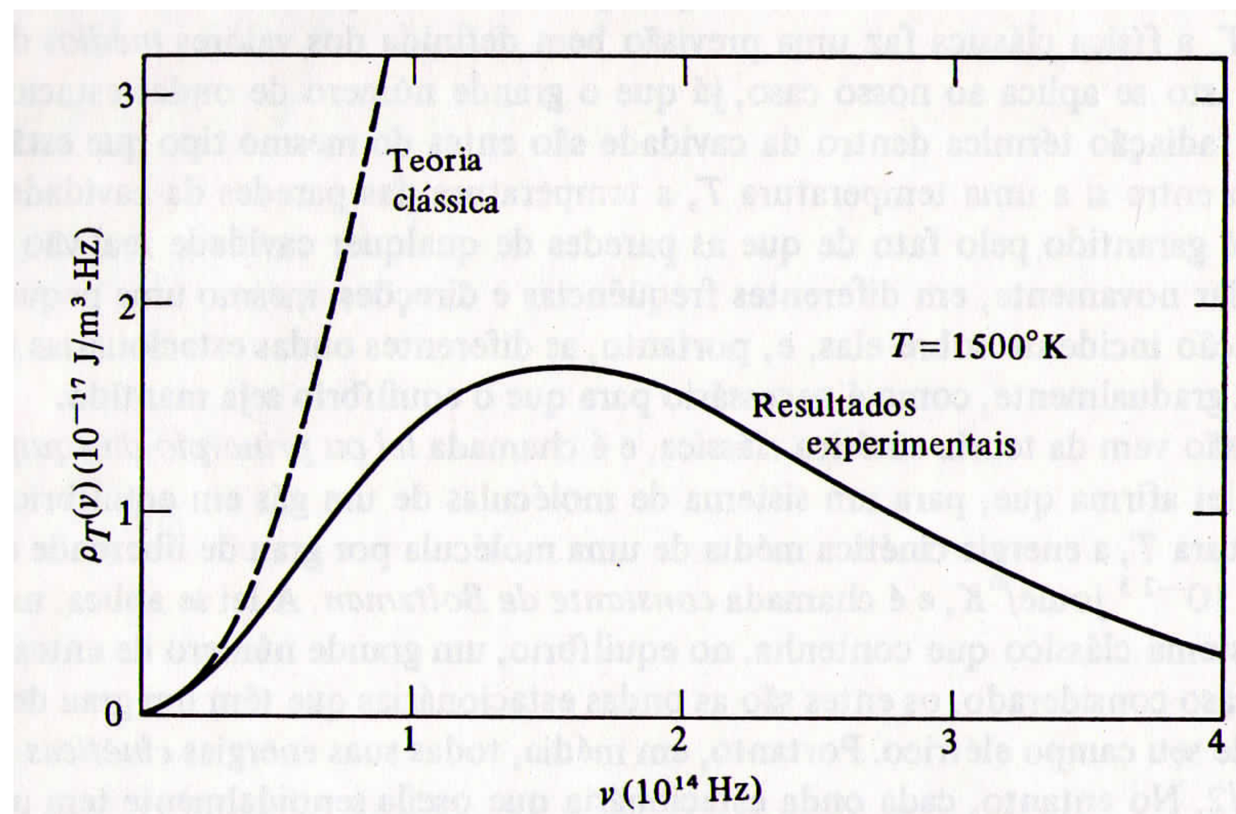
$$\nu_{max} \propto T$$

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,898 \times 10^{-3} m \cdot K$$



Nós compreendemos esses espectros?

- Através da física clássica não é possível descrever esses espectros !
- Vamos examinar um modelo baseado na física clássica que tenta descrever esses espectros



Lei de Rayleigh-Jeans

- **Objetivo**: queremos calcular a radiância espectral $R_T(\nu)$ de um corpo negro
- Para facilitar nosso trabalho, vamos calcular a quantidade de energia por unidade de volume dentro da cavidade do corpo negro devido a radiações com frequência entre ν e $\nu + d\nu$, que chamamos de $\rho_T(\nu)$
- Não é difícil perceber que $\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu)$

Ondas eletromagnéticas em uma cavidade

- Vamos tratar um corpo negro que corresponde a uma cavidade cúbica de superfícies metálicas
- Ondas eletromagnéticas só podem existir no interior dessa cavidade como ondas estacionárias, com nós nas paredes da cavidade

Ondas estacionárias

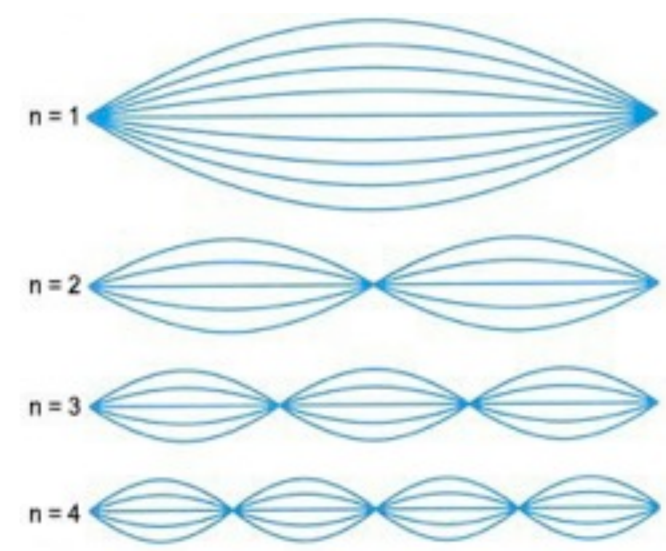
- Relembrando: são ondas que possuem um perfil estacionário, que não se propagam, resultado da interferência de duas ondas idênticas viajando em sentidos opostos

- Possuem pontos estáticos, chamados de “nós” (A, B e C na figura)

Ondas estacionárias

- Relembrando: são ondas que possuem um perfil estacionário, que não se propagam, resultado da interferência de duas ondas idênticas viajando em sentidos opostos

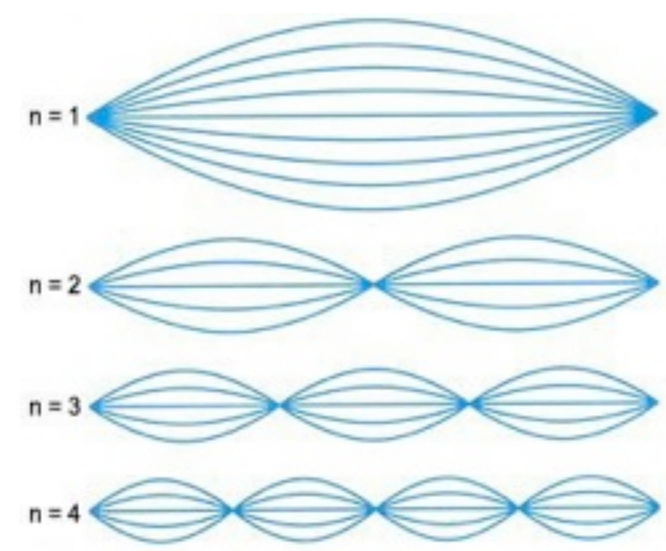
- Possuem pontos estáticos, chamados de “nós” (A, B e C na figura)

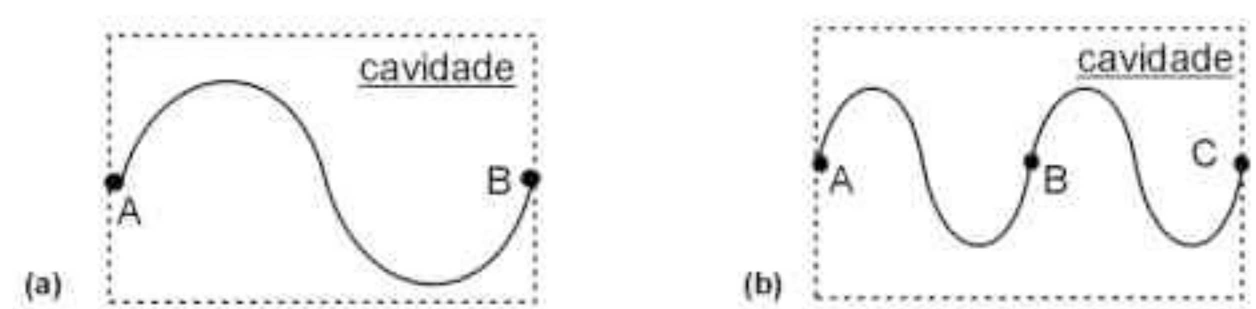


Ondas estacionárias

- Relembrando: são ondas que possuem um perfil estacionário, que não se propagam, resultado da interferência de duas ondas idênticas viajando em sentidos opostos

- Possuem pontos estáticos, chamados de "nós" (A, B e C na figura)





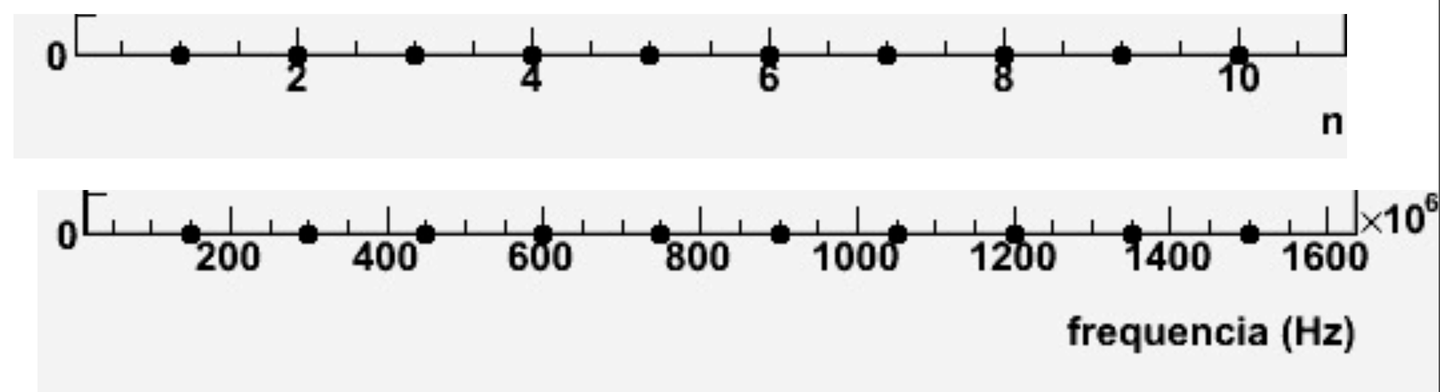
Ondas eletromagnéticas estacionárias dentro da cavidade

- O próximo passo consiste em contar o número de ondas estacionárias que "cabem" dentro da cavidade com os diferentes valores de frequência ν: $N(\nu)d\nu$
- Em seguida, multiplicamos esse valor pela energia média de cada onda estacionária e dividimos pelo volume da cavidade para obter $\rho_T(\nu)$, ou seja:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \langle E \rangle \frac{N(\nu)d\nu}{V}$$

Número de ondas estacionárias dentro da cavidade

- Caso unidimensional:



- Queremos saber o número de modos de oscilação possíveis em termos da frequência

- Como $\nu = \dfrac{c}{2a} \cdot n$, tem-se que: $N(\nu)d\nu = 2 \cdot \dfrac{2a}{c} d\nu$

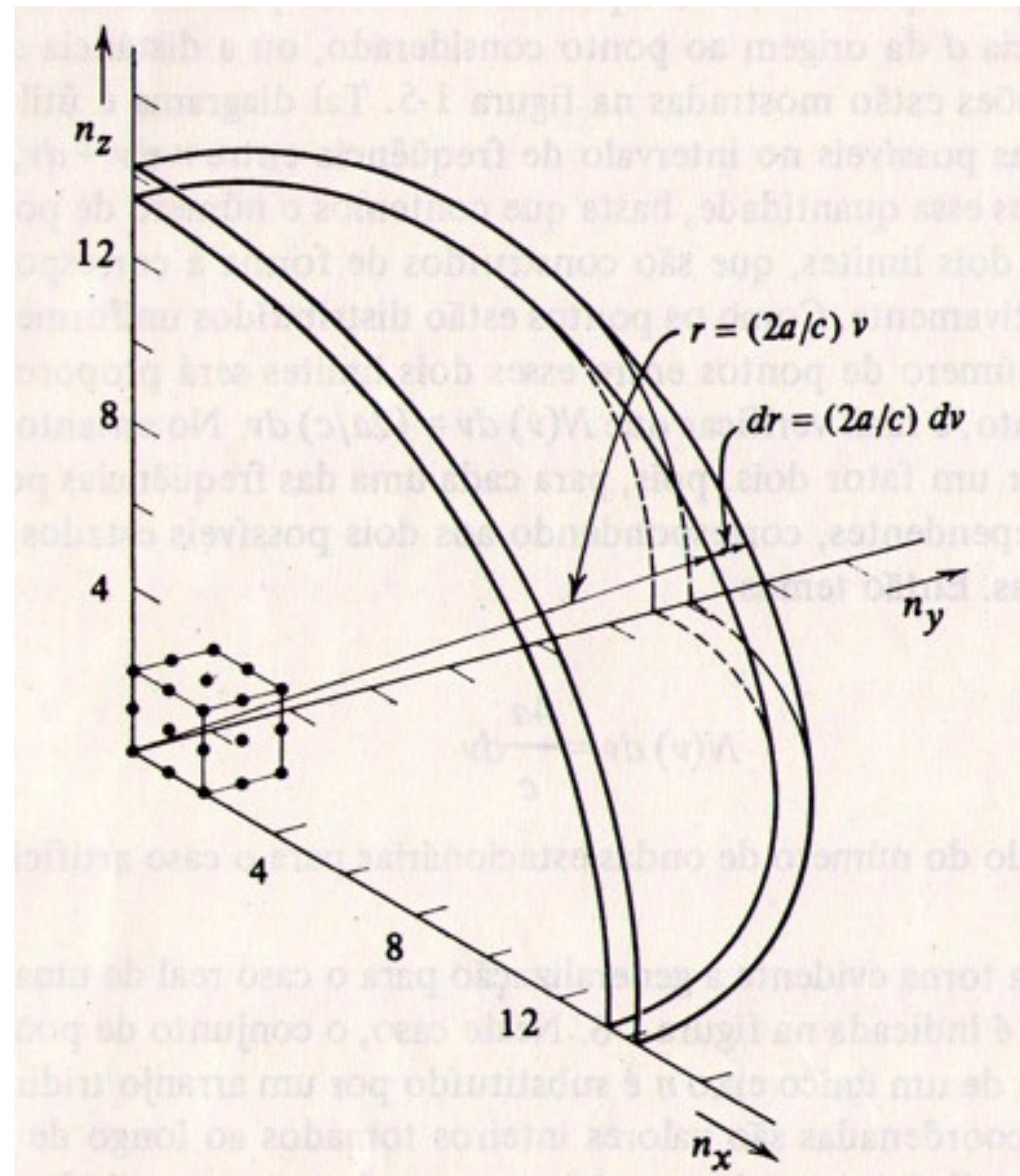
Número de ondas estacionárias dentro da cavidade

- Caso tridimensional:
- Neste caso

$$\nu = \frac{c}{2a} \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

- e:

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot V \cdot \nu^2 d\nu$$



Energia média de cada onda estacionária

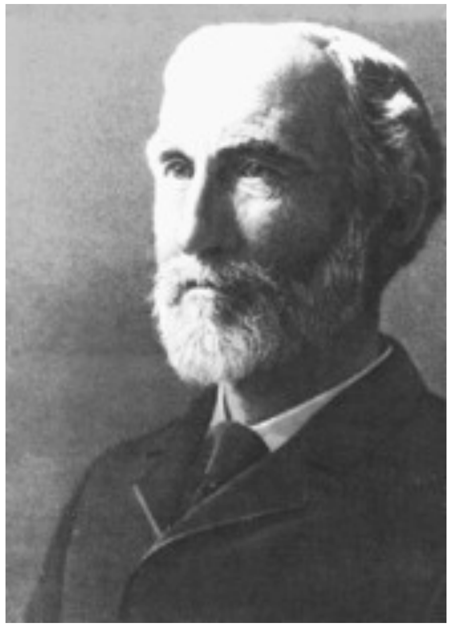
- Vamos utilizar uma abordagem estatística para obter a energia média de cada onda estacionária
- Essa abordagem é válida pois estamos tratando de um sistema (corpo negro) que possui uma temperatura (T) bem definida

Abordagem estatística

- Em meados do século XIX, assumindo que um gás é formado por pequenas unidades (moléculas), Maxwell calculou a distribuição de velocidades dessas moléculas no estado de equilíbrio
- Em seguida, ele correlacionou essa distribuição com propriedades macroscópicas do gás, como temperatura e pressão

Abordagem estatística

- Boltzmann e Gibbs deram continuidade ao trabalho de Maxwell, estabelecendo as bases da interpretação microscópica para propriedades macroscópicas de sistemas físicos



Distribuição de Maxwell-Boltzmann

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Como se distribuem os constituintes de um sistema físico entre os vários valores de energia (ou outra grandeza) que eles podem assumir?

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Como se distribuem os constituintes de um sistema físico entre os vários valores de energia (ou outra grandeza) que eles podem assumir?
- Precisamos fazer algumas hipóteses:

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Como se distribuem os constituintes de um sistema físico entre os vários valores de energia (ou outra grandeza) que eles podem assumir?
- Precisamos fazer algumas hipóteses:
  - Os constituintes são distinguíveis

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Como se distribuem os constituintes de um sistema físico entre os vários valores de energia (ou outra grandeza) que eles podem assumir?
- Precisamos fazer algumas hipóteses:
  - Os constituintes são distinguíveis
  - O estado de equilíbrio é a forma mais provável de distribuir os constituintes entre os vários valores de energia possíveis mantendo o número de constituintes e energia total do sistema fixos

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Como se distribuem os constituintes de um sistema físico entre os vários valores de energia (ou outra grandeza) que eles podem assumir?
- Precisamos fazer algumas hipóteses:
  - Os constituintes são distinguíveis
  - O estado de equilíbrio é a forma mais provável de distribuir os constituintes entre os vários valores de energia possíveis mantendo o número de constituintes e energia total do sistema fixos
  - Existe apenas um constituinte por estado (baixa densidade)

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

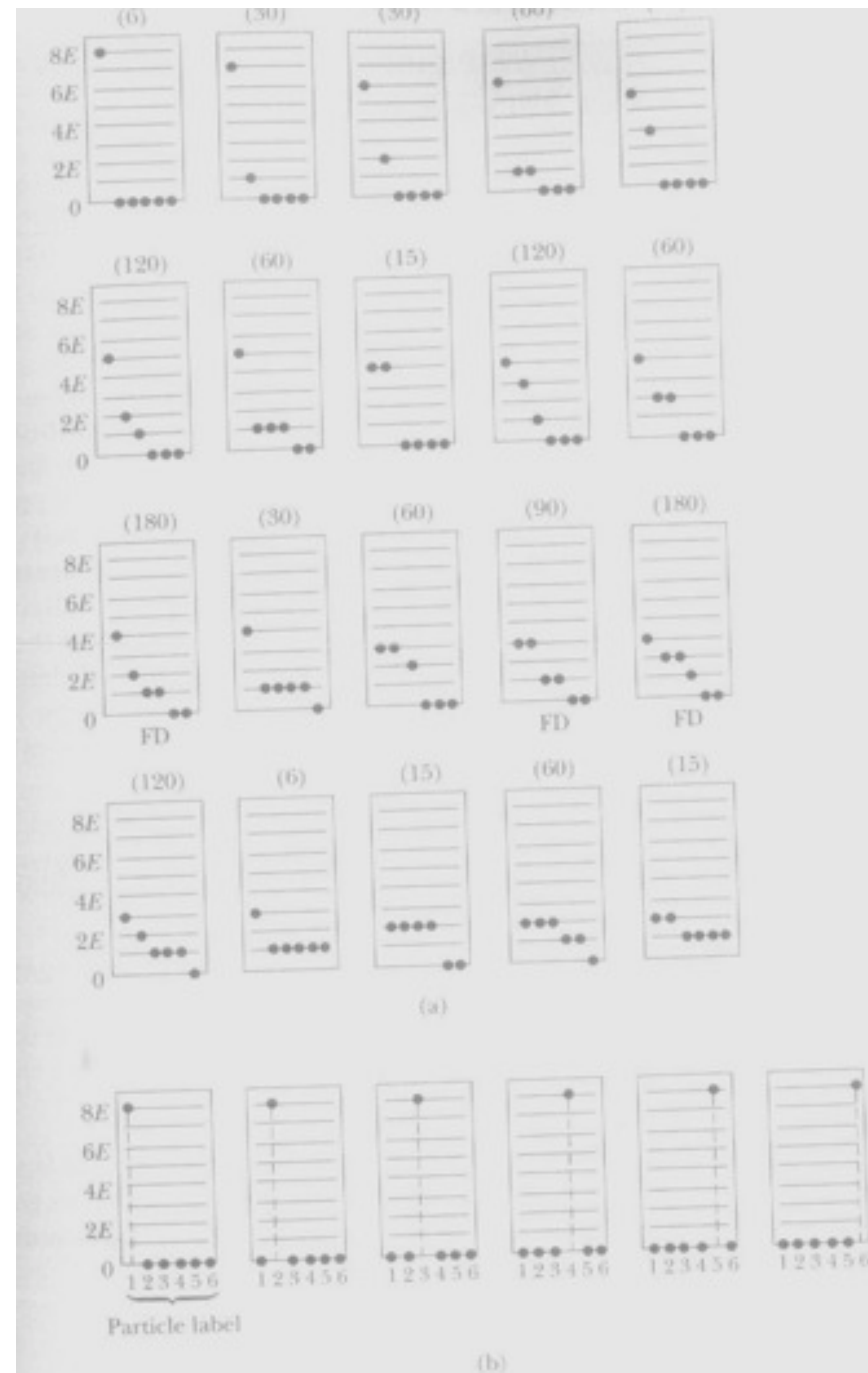
- Vamos tomar um exemplo concreto simplificado (Serway, Moses, Moyer, pag 336)
- Seja um sistema composto de 6 partículas constituintes, cuja energia total é 8E (E=unidade arbitrária de energia indivisível)
- Existem 20 configurações diferentes possíveis que permitem que essas 6 partículas tenham uma energia total de 8E

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Como as partículas são distinguíveis, cada configuração permite um certo número de "microestados" (m_j) que é dado por:

$$m_j = \frac{N!}{n_{1j}!n_{2j}!n_{3j}!\ldots}$$

- onde n_{ij} ($i = 1, 2, 3, \ldots$) é o número de partículas com energia E_i na configuração j

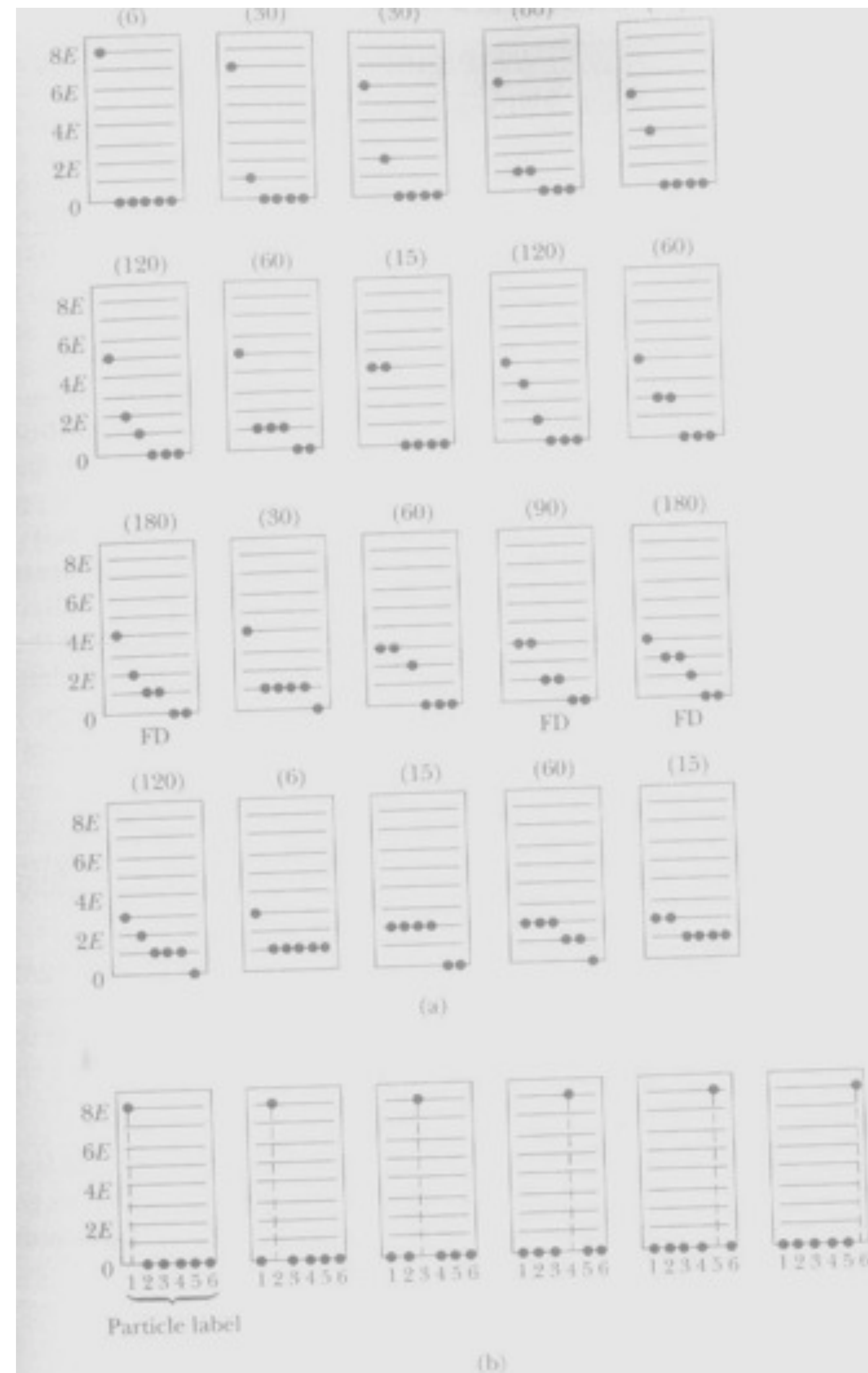


Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- O número médio de partículas com uma dada energia E_i (n_i) é:

$$\langle n_i \rangle = \sum_{j=1}^{20} n_{ij} p_j$$

- onde n_{ij} é o número de partículas encontradas com energia E_i na configuração j e p_j é a probabilidade de se observar a configuração j (entre as 20 possíveis)

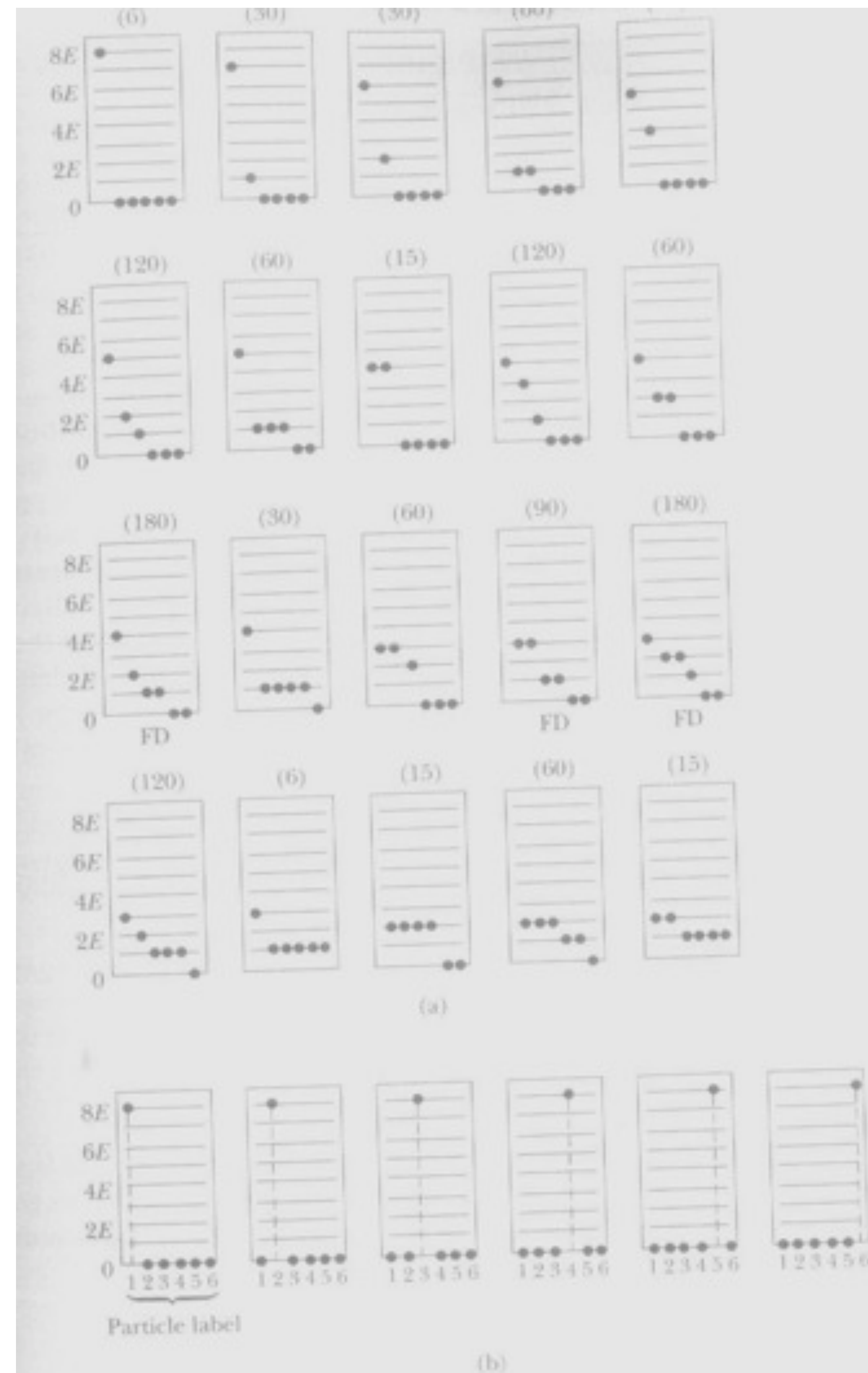


Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Usando o postulado básico da abordagem estatística de que **cada microestado é igualmente provável** de ocorrer, tem-se que:

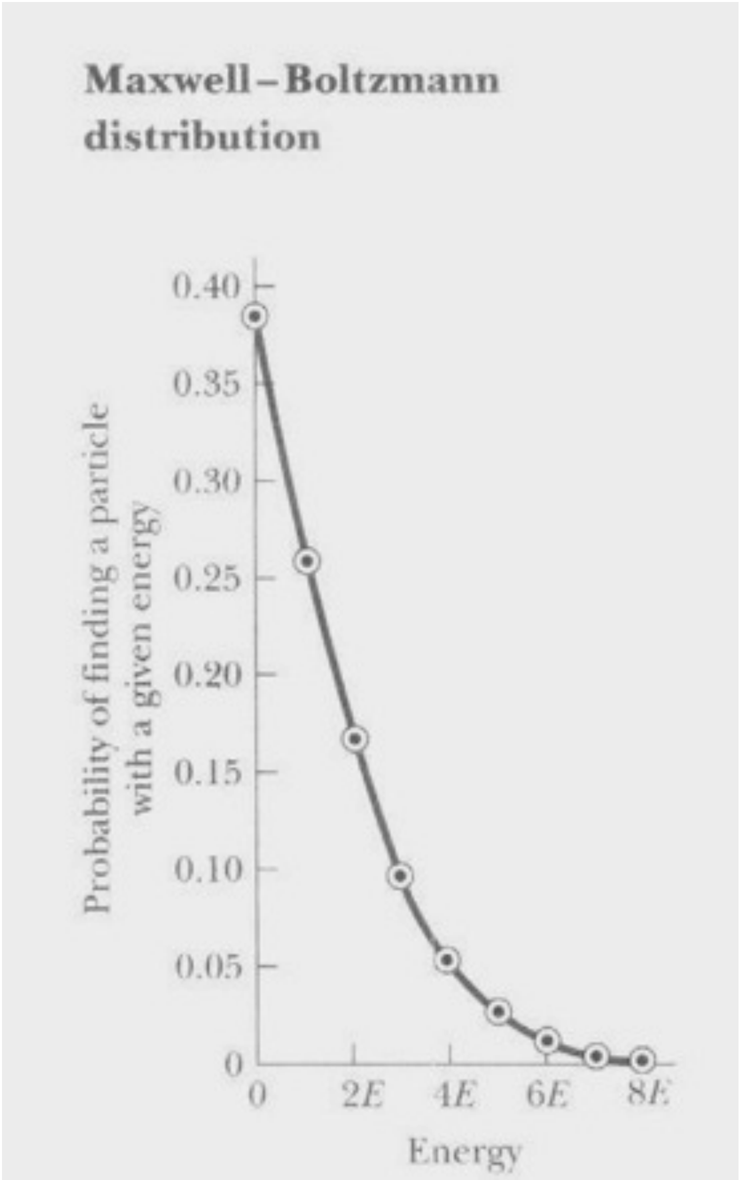
$$p_j = \frac{m_j}{N_{ME}}$$

- onde m_j é o número de microestados com a configuração j e N_{ME} é o número total de microestados possíveis



Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Calculando-se p_j e n_i para este exemplo simplificado obtém-se uma distribuição que pode ser descrita por uma função exponencial

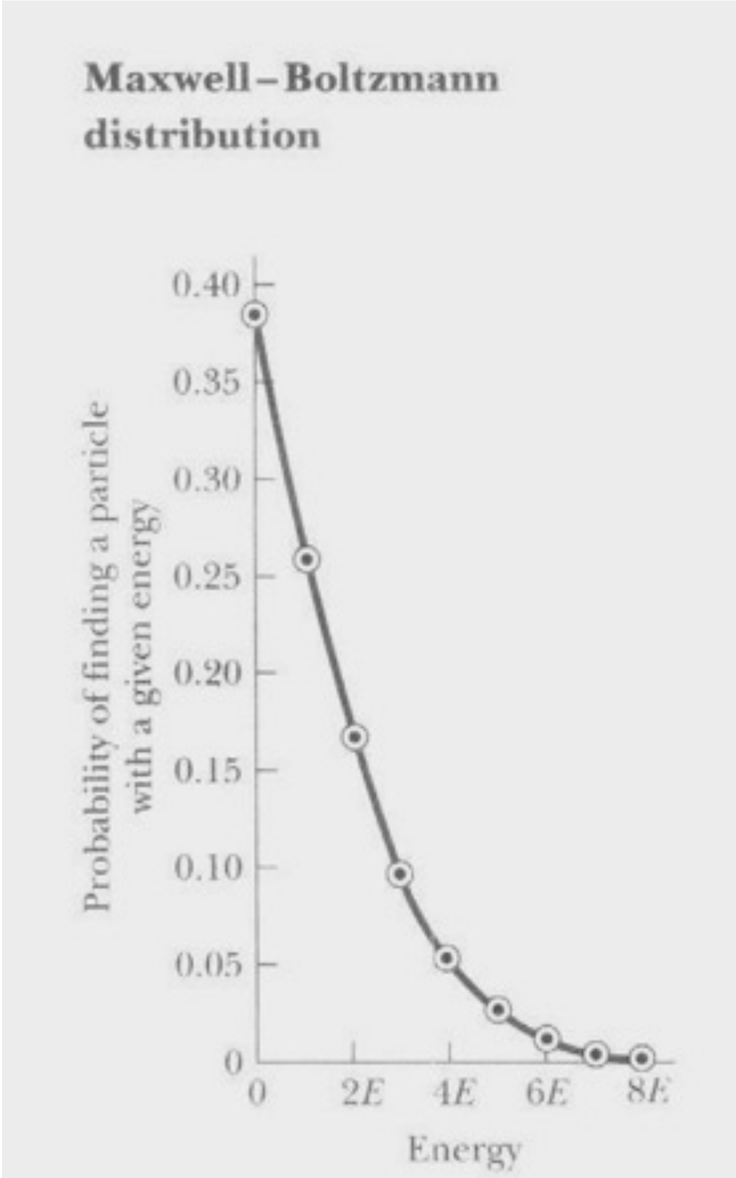


Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Isso pode ser generalizado e chega-se a distribuição de Maxwell-Boltzmann que é dada por:

$$P_{MB}(E) = Ae^{-E_i/k_B T}$$

- onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema



Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- A partir desse resultado, podemos calcular a energia média das partículas que compõem o sistema que é dada por:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E \cdot P_{MB}(E) dE}{\int_0^\infty P_{MB}(E) dE}$$

- onde *P(E)* é a distribuição de Maxwell-Boltzmann

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Utilizando uma distribuição de Maxwell-Boltzmann normalizada, isto é, com:

$$\int_0^\infty P_{MB}(E)dE = 1$$

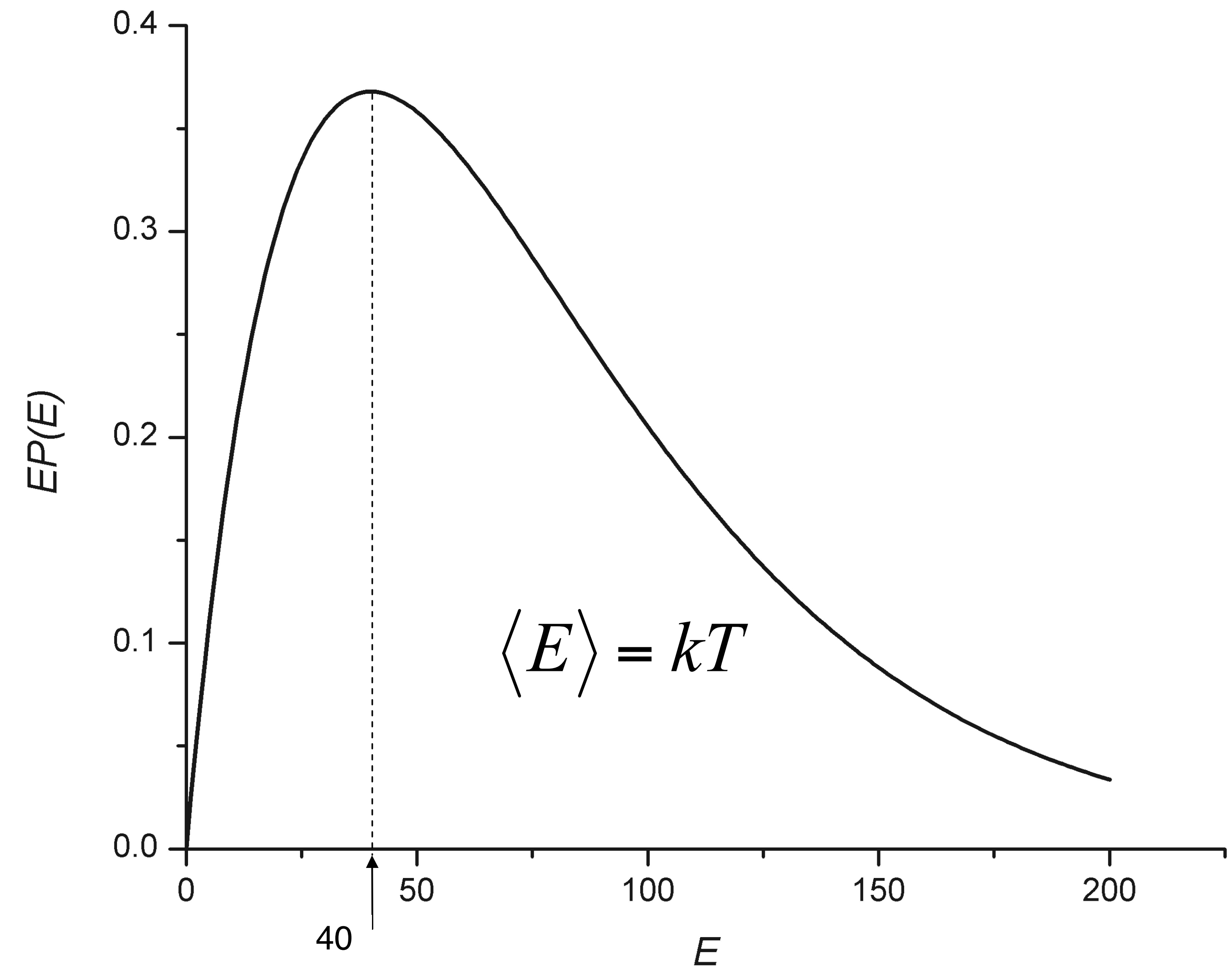
- tem-se:

$$P_{MB}(E) = \frac{e^{-E/kT}}{kT}$$

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Com isso, a energia média dos constituintes do sistema é:

$$\langle E \rangle = kT$$



Ondas eletromagnéticas estacionárias dentro da cavidade

- Finalmente podemos voltar ao nosso objetivo original que é obter a densidade de energia dentro do corpo negro devido às ondas eletromagnéticas, que é dada por:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \langle E \rangle \frac{N(\nu)d\nu}{V}$$

Lei de Rayleigh-Jeans

- Substituindo:

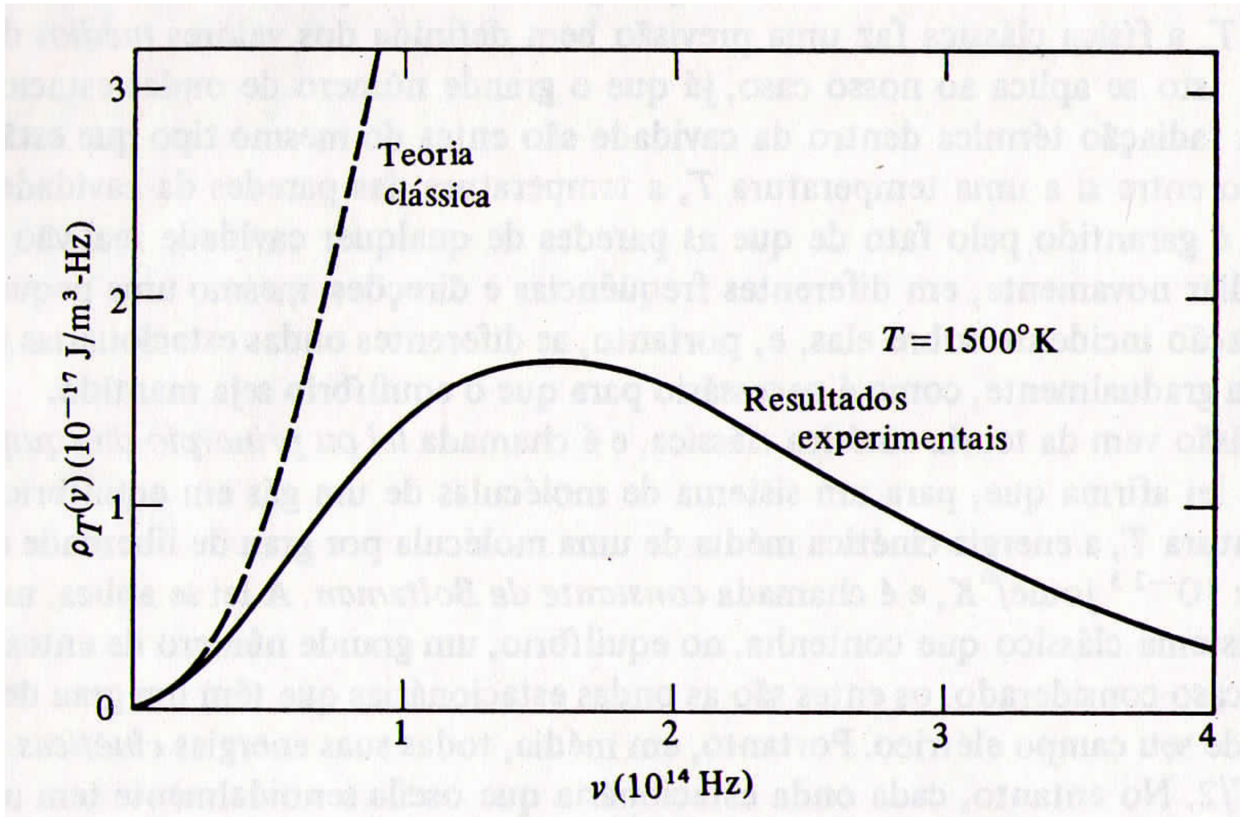
$$\langle E \rangle = kT$$

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot V \cdot \nu^2 d\nu$$

- tem-se que:

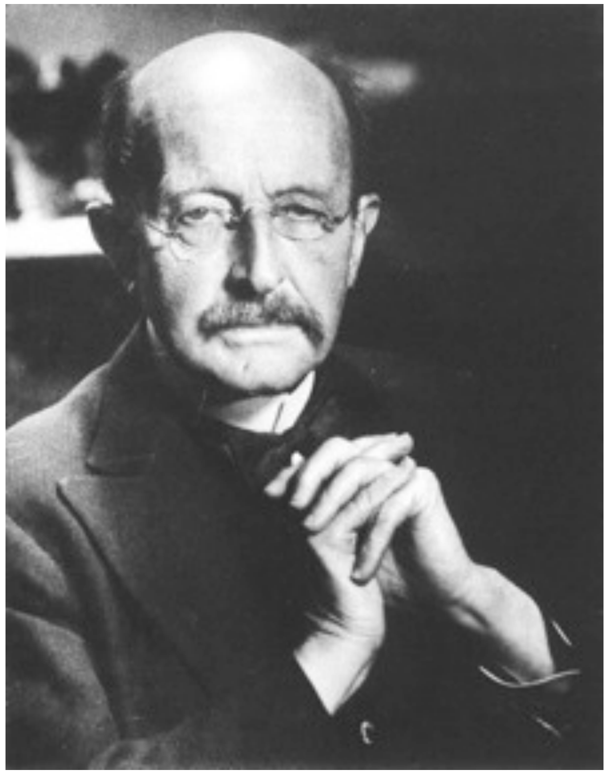
$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} d\nu$$

- que é a chamada lei de Rayleigh-Jeans



Como resolver essa discrepância?

- Em 1900, Max Planck, que tinha contato com físicos experimentais que estudavam o problema da radiação do corpo negro, propõe um equação que descreve perfeitamente os dados...



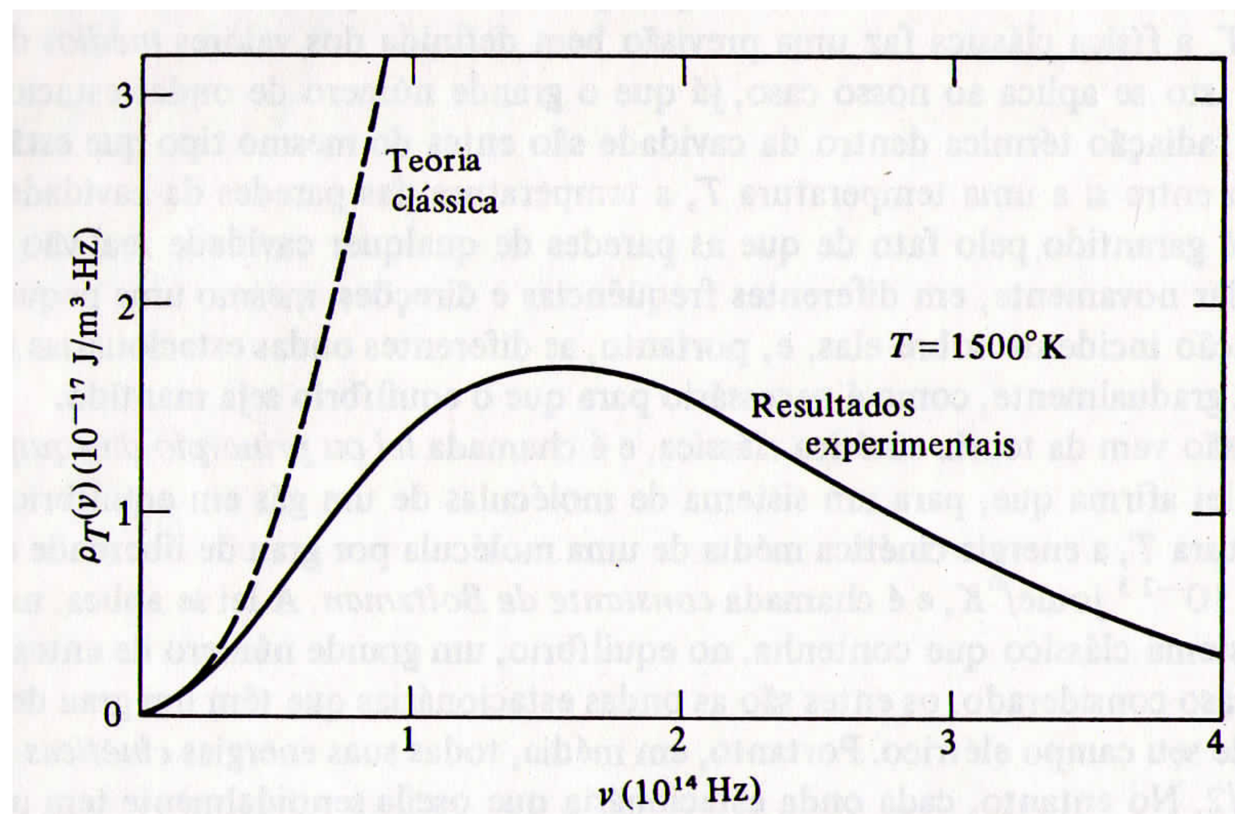
Como resolver essa discrepância?

- Planck notou que para ν →0, a solução clássica é admissível:

$$\langle E \rangle = kT$$

- Porém, para ν →∞, deve-se ter:

$$\langle E \rangle \rightarrow 0$$



Proposta de Planck

- Planck inicialmente supôs que as paredes da cavidade eram constituídas de "pequenos osciladores" que trocam energia com a radiação mantendo o equilíbrio térmico

Proposta de Planck

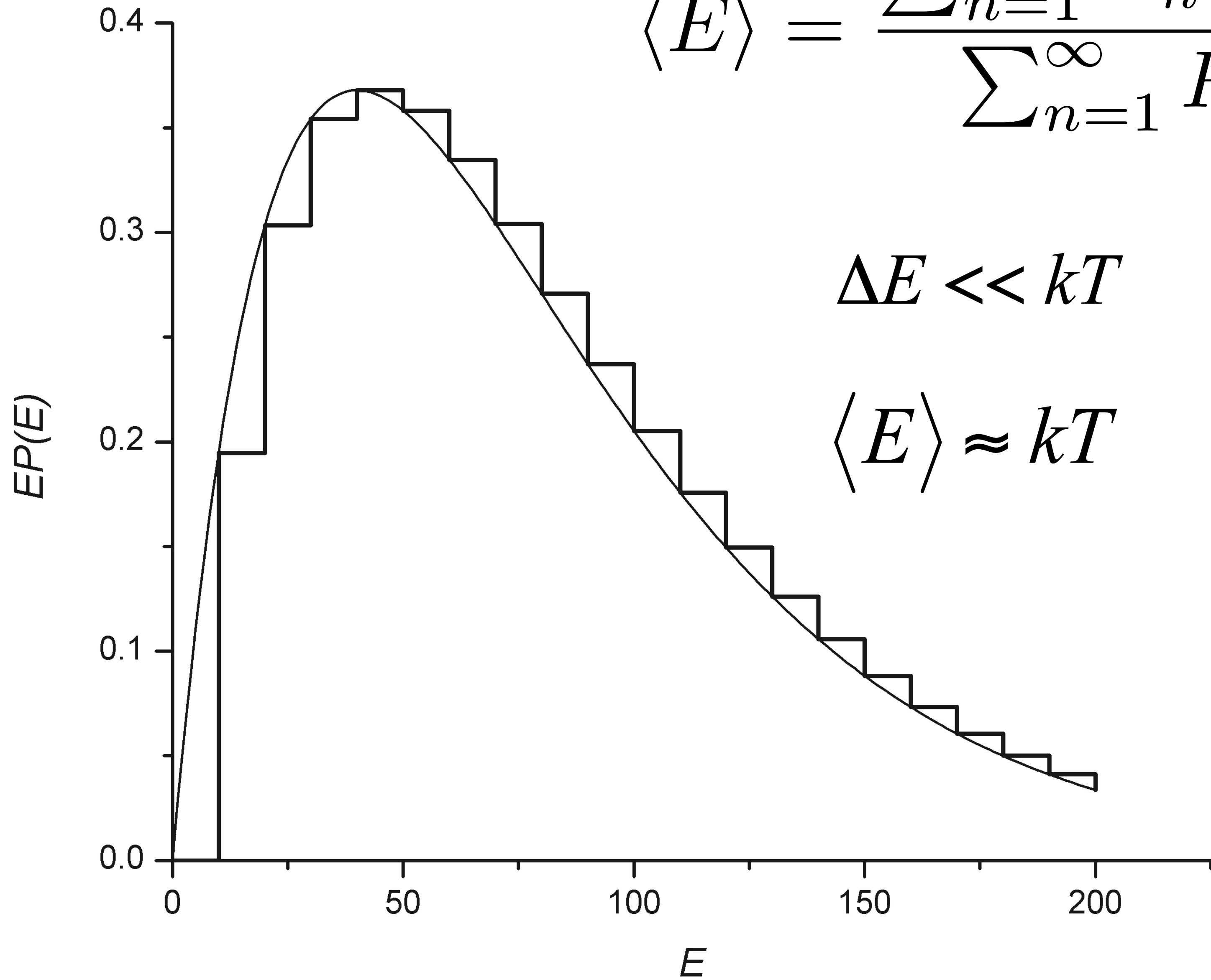
- Utilizando uma estratégia parecida à aquela usada na dedução da distribuição de Maxwell-Boltzmann, Planck fez a suposição que esses osciladores poderiam assumir apenas alguns valores específicos de energia:

$$E_1 = 0,\ E_2 = \Delta E,\ E_3 = 2 \cdot \Delta E,\ E_4 = 3 \cdot \Delta E, ...$$

- Sua intenção era fazer com que $\Delta E \rightarrow 0$ para recuperar a distribuição contínua de energia da física clássica

Proposta de Planck

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_{MB}(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P_{MB}(E_n)}$$



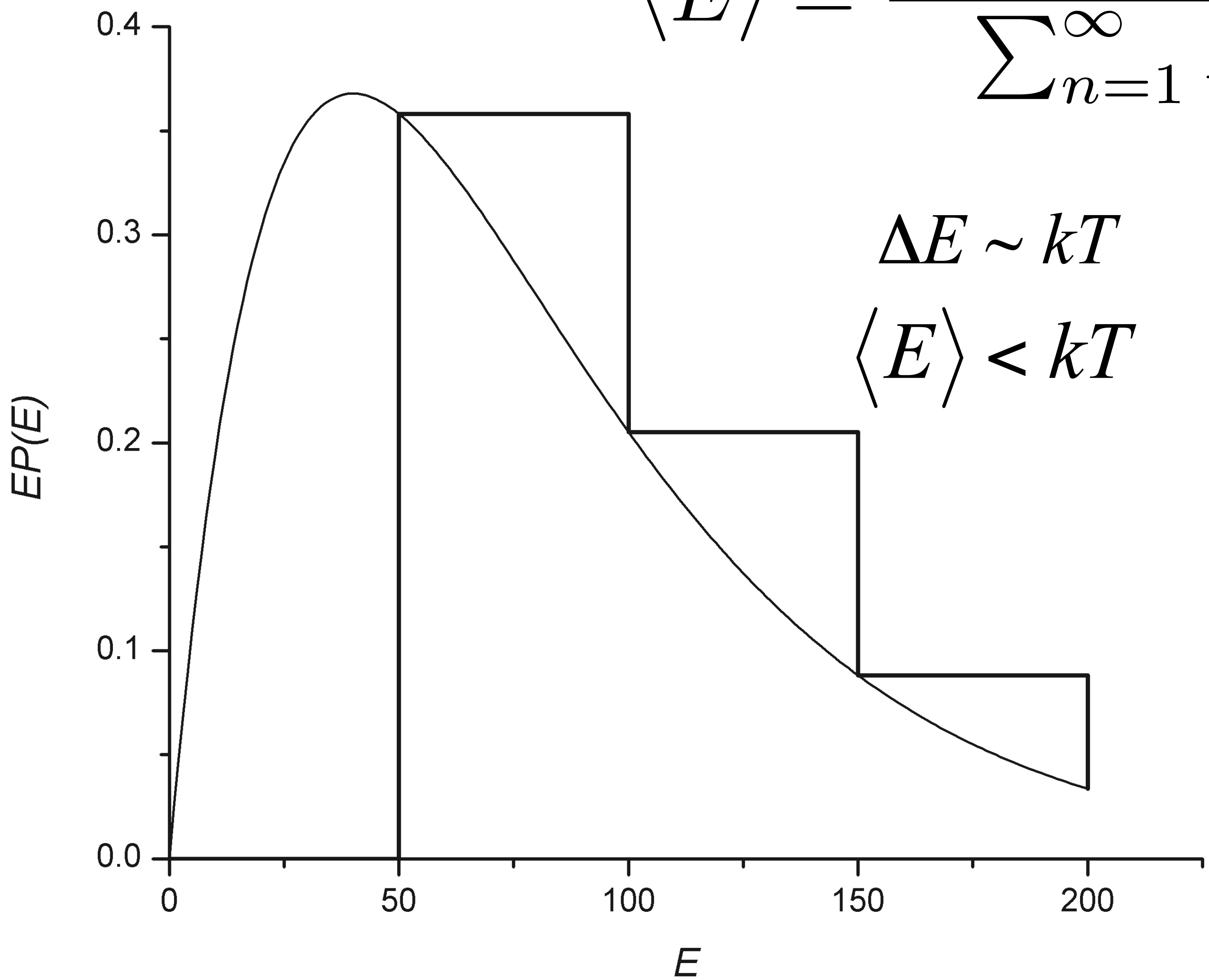
$$\Delta E << kT$$

$$\langle E \rangle \approx kT$$

$$E_1 = 0,\ E_2 = \Delta E,\ E_3 = 2 \cdot \Delta E,\ E_4 = 3 \cdot \Delta E, ...$$

Proposta de Planck

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_{MB}(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P_{MB}(E_n)}$$



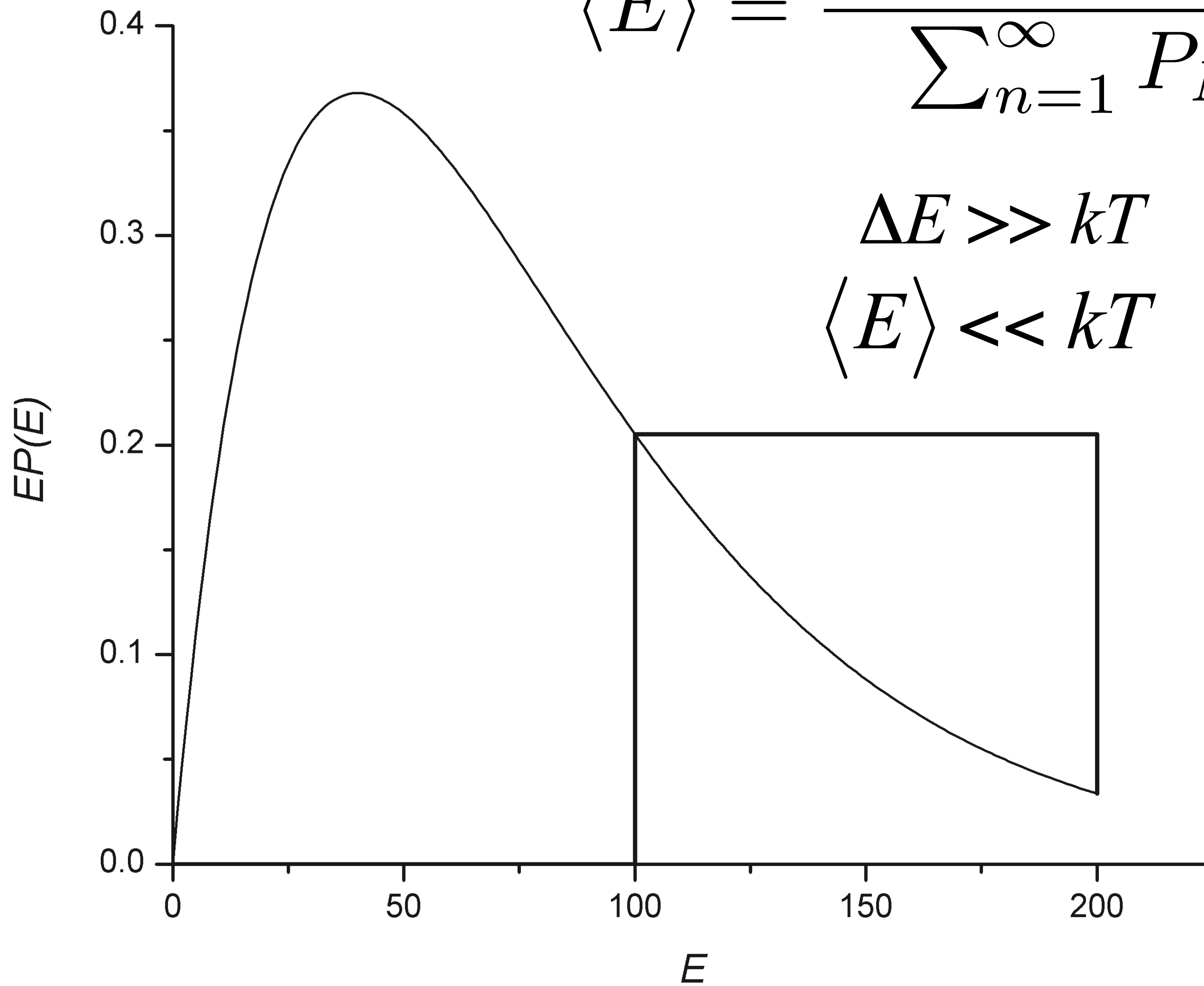
$$\Delta E \sim kT$$

$$\langle E \rangle < kT$$

$$E_1 = 0,\ E_2 = \Delta E,\ E_3 = 2 \cdot \Delta E,\ E_4 = 3 \cdot \Delta E, ...$$

Proposta de Planck

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_{MB}(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P_{MB}(E_n)}$$



$$\Delta E >> kT$$

$$\langle E \rangle << kT$$

$$E_1 = 0,\ E_2 = \Delta E,\ E_3 = 2 \cdot \Delta E,\ E_4 = 3 \cdot \Delta E, ...$$

Proposta de Planck

- Portanto, para se reproduzir os dados é preciso que
  $$\Delta E \propto \nu$$

- ou seja,
  $$\Delta E = h\nu$$

- onde *h* é a chamada constante de Planck

Fórmula de Planck

- Calculando-se a energia média a partir dessa hipótese, tem-se que:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_{MB}(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P_{MB}(E_n)} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

- E substituindo em

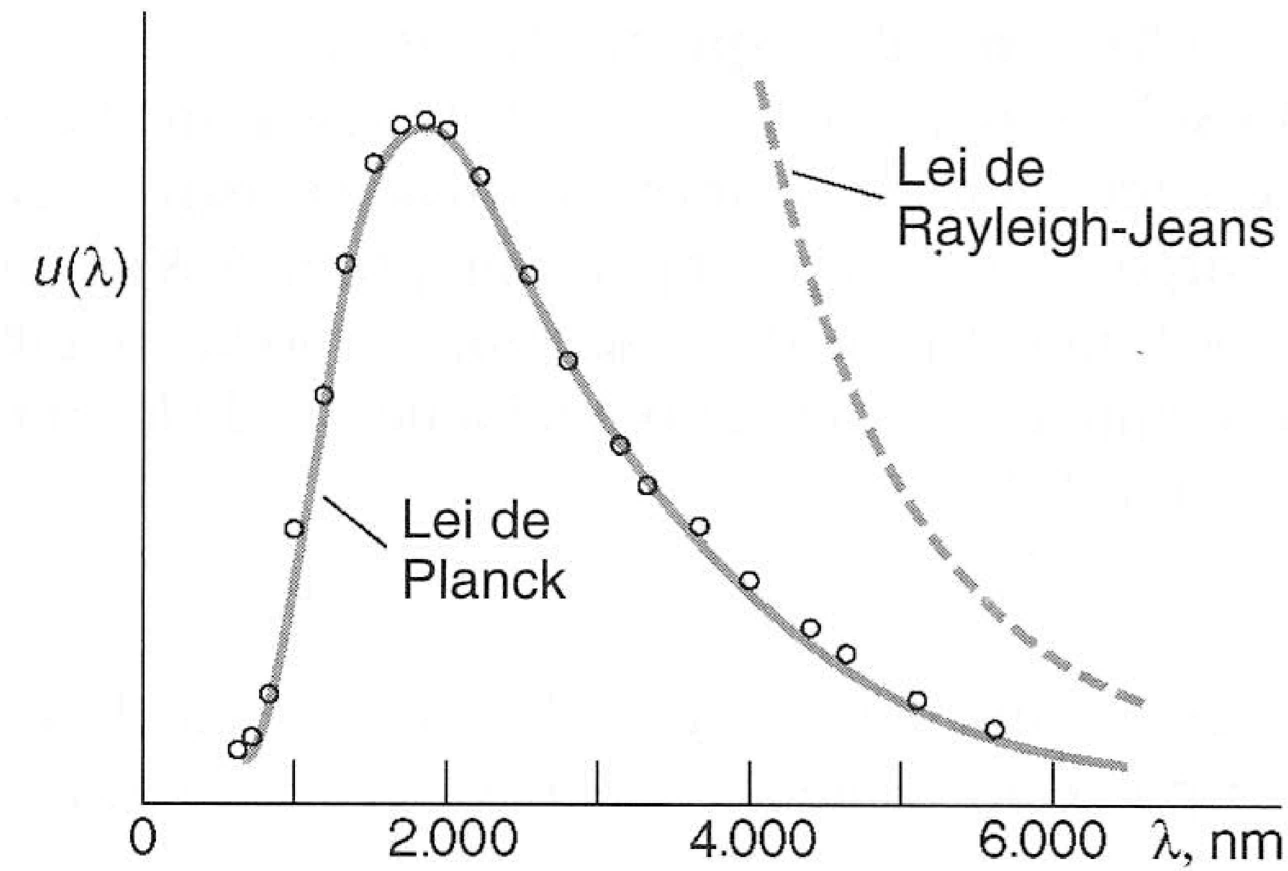
$$\rho_T(\nu) d\nu = \langle E \rangle \frac{N(\nu) d\nu}{V}$$

- tem-se que:

$$\rho_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

Fórmula de Planck

- Que reproduz os dados com grande precisão quando:
  h = 6,63 × 10⁻³⁴ J ·s



$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu$$

Implicações do resultado de Planck

- Qual o significado físico da hipótese de Planck?

- Ela impõem que os pequenos osciladores que constituem as paredes da cavidade e estão em equilíbrio com a radiação, só podem assumir certos valores discretos de energia:

$$E = nh\nu$$