1-ESPAÇO, COORDENADAS E REFERENCIAIS GENERALIZADOS

ESPAÇO

O conceito de espaço ainda suscita discussões. A dificuldade muitas vezes reside no pouco interesse por conceitos básicos, ou nos fundamentos da ciência. Na apresentação do livro "Espaço" Einstein afirma a propósito desse e de outros conceitos que o cientista "*Raras vezes ou mesmo nunca tem consciência do caráter eternamente problemático de seus conceitos . No entanto, a bem da ciência, é preciso nos empenharmos repetidas vezes na crítica desses conceitos fundamentais, para não sermos governados inconscientemente por eles*".

Nossa atitude corriqueira é de afirmar que tal conceito pode ser adquirido por meio da nossa experiência sensorial, e que o essencial é entender que ele tem propriedades e que, a partir delas, temos como caracterizá-lo. Dentre elas podemos destacar a tridimensionalidade do mesmo (traduzida por meio de conceitos como altura, largura e profundidade), a homogeneidade (o espaço exibe as mesmas característica em cada ponto dele) e a isotropia. (o espaço se apresenta como sendo o mesmo em qualquer direção que consideremos).

É importante ressaltar que o espaço é também caracterizado por um conjunto de relações entre os pontos do mesmo . A essas relações (como a distância entre dois pontos) damos o nome de estrutura do espaço.=

Conquanto não pareça óbvio, o fato é que a discussão sobre o conceito de espaço surge na elaboração da primeira lei de Newton, ou lei da inércia. Einstein chama a atenção para duas concepções ter duas concepções de espaço.

A- o espaço como propriedade posicional, do mundo dos objetos materiais

B- o espaço como continente de todos os objetos materiais.

As duas concepções de espaço são denominadas, respectivamente, geométrica e cinemática.

De acordo com a concepção B, o espaço adquire um caráter absoluto. Ele seria independente dos corpos materiais que nele existe. Assim, nessa visão, a primeira lei seria uma propriedade do espaço absoluto.

Na concepção A o espaço é relativo. Nesse caso não faria sentido falarmos em espaço sem a presença de objetos materiais. Nessa concepção o espaço seria aquilo em que todos os corpos são colocados, ou, aquilo em que têm seu *ubi*; Espaço como a soma de todos os lugares. É a concepção adotada na física moderna.

No caso do espaço relativo, pode-se adotar o ponto de vista de Ernst Mach como explicação para a inércia. Nessa concepção o movimento uniforme, não acelerado, previsto na primeira lei seria uma propriedade não do espaço como tal, mas uma consequencia da própria matéria nele existente. A primeira lei refletiria o fato de estarmos no centro de todas as massas do Universo.

Em outras palavras, Mach defendia a idéia de que massad existentes em outras partes do Universo afeta a Inércia no nosso mundo. O principio de Mach pode ser formulado como " as leis fisicas locais são determinadas pela estrutura em larga escala do Universo" . Para Einstein a Inércia tem origem nas interações entre os vários corpos do Universo.

O ESPAÇO ABSOLUTO

Uma vez que o espaço do tipo B, de acordo com a classificação de Einstein, pode existir independentemente da matéria ele adquire, nessa concepção de espaço, uma realidade. De acordo com Einstein, nesse caso, *o espaço passa a ser uma realidade, em certo sentido, superior ao mundo material.* Os objetos materiais são agora concebidos como sendo inseridos no Espaço. É o conceito de espaço continente Faria sentido, nesse caso, falar em espaço vazio, mas não faria sentido falar em objetos materiais fora dele .

Os atomistas gregos foram os primeiros a pensar o espaço como sendo dissociado da matéria. Foram, assim, os precursores da teoria do espaço absoluto.

A primeira lei requer que haja um sistema de referência, dito inercial, para que nele tenhamos tal situação como sendo possivel. O espaço absoluto seria, na prática, o sistema inercial por excelência. Assim, a proposta de que o espaço seria absoluto foi a forma encontrada por Newton para que a primeira lei fizesse sentido. Seria assim, uma questão de coerência da formulação das leis da mecânica. *O espaço absoluto, sem nenhuma relação com algo externo, como diria Newton, é concebido como sendo imutável e imóvel.*

SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Em 1885, Ludwig Lange propôs uma forma de eliminar o conceito de espaço absoluto dos fundamentos da mecânica assim como de toda a física. Lange propôs a substituição desse conceito pelo de "sistema inercial".

Analisemos a seguir o conceito de sistema de referência. Sabe-se que no estudo dos fenomenos, é essencial que se adote um sistema de objetos materiais como referência . Nesse sentido estamos tratando o conceito de espaço como sendo intimamente ligado ao de matéria. Indissociável, mesmo. Objetos materiais, como um marco de quilômetro numa rodovia ou uma estrela no céu, podem ser usados como referência. Esta é uma possibilidade concreta, real. No entanto, em geral fazemos uso de conceitos abstratos que, no entanto, só fazem sentido se houver objetos como aqueles aos quais nos referimos antes. Assim, em geral não especificamos a matéria que, em última análise, é utilizada como referência. A matéria referência fica apenas implícita.

A necessidade de se adotar um sistema de referência resulta de dois aspectos, interligados, do estudo da Mecânica. O primeiro é que o estudo sistemático e analítico do movimento requer o uso de conceitos (como posição), os quais só fazem sentido uma vez definido o sistema de referência.

O segundo aspecto é que muitos conceitos utilizados na mecânica são relativos, isto é, dependem do referencial. Esse é o caso da posição de um objeto. Dizer-se que algo está à direita, à esquerda, em cima ou em baixo só faz sentido quando adotamos um sistema de referência.

O conceito de movimento por exemplo, é também relativo, ou seja, um objeto pode estar em movimento em relação a um outro mas pode estar em repouso em relação a um terceiro.

Entende-se por escolher um sistema de referencia a escolha arbitrária de um ponto de origem (o ponto O) e um conjunto de três eixos passando por esse ponto. Assim, um referencial exige pelo menos quatro objetos não alinhados no espaço. Estes objetos se constituem num referencial. Por esses objetos podemos passar três eixos tendo como ponto comum um dos objetos, adotados agora como a origem do sistema de referencia. Nesse sentido, não se pode falar em espaço absoluto, uma vez que, pelo menos para efeito de referência, ele depende da existência de matéria no espaço.

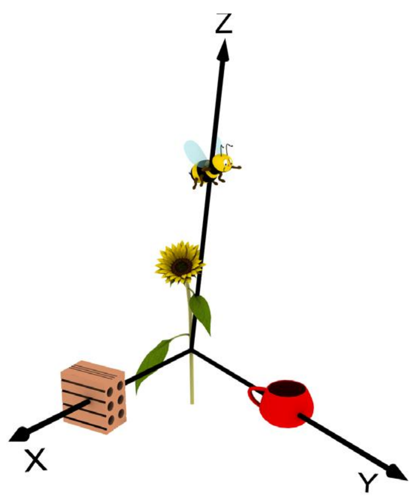


Fig. 24-1 - Três eixos passando por um

ponto, se constituem num referencial.

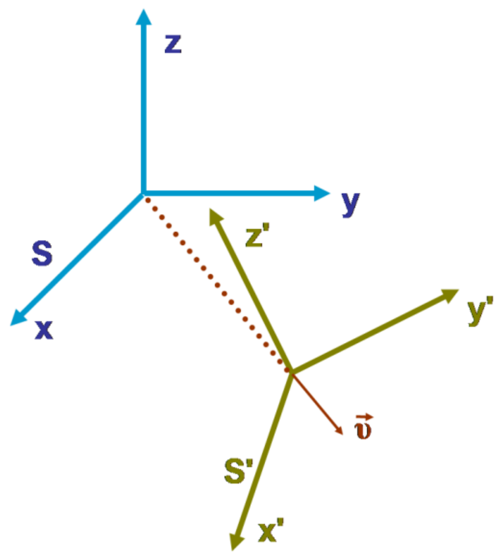
REFERENCIAIS INERCIAIS

Como a escolha de sistema de referência é arbitrária, sempre nos perguntamos se faz alguma diferença escolher um sistema em repouso ou escolher outro que se movimente em relação ao primeiro. Os físicos estiveram ao longo de anos analisando a questão da equivalência de tais escolhas.

Sistemas de referências nos quais os pontos de origem – O e O' – se deslocam com velocidade constante um em relação ao outro, são ditos sistemas inerciais. Os referenciais da figura 2.4 são inerciais. Toda a mecânica pressupõe o uso de sistemas inerciais. Quando esse não for o caso, é preciso modificar as equações da mecânica.

Desde os tempos de Galileu se sabe que os sistemas inerciais são equivalentes entre si. No entanto, o conceito de equivalência de dois sistemas era objeto de discussão. Por exemplo, que grandezas físicas são absolutas? Grandezas absolutas são aquelas que assumem o mesmo valor nos dois sistemas. Por exemplo, tanto Galileu quanto Newton partiam do pressuposto de que intervalos de tempo medidos num sistema e no outro, deveriam ser iguais nos dois sistemas. Entendiam que o tempo seria absoluto.

Einstein baseou toda a sua teoria da relatividade na idéia de a velocidade da luz seria igual num sistema e no outro. Na teoria de Einstein, a velocidade da luz é absoluta. E isso faz toda a diferença entre a relatividade de Galileu (no qual o tempo é absoluto) e a relatividade de Einstein.



REFERENCIAIS GENERALIZADOS

Tendo introduzido o conceito de vetores podemos agora redefinir o conceito de referencial. Para tal, seguimos as idéias de Hermann Weyl ao abordar os conceitos de espaço tempo e matéria. Os conceitos apresentados a seguir são, nessa formulação, essenciais no estudo da geometria do espaço.

De acordo com Weyl, um referencial é constituído por um ponto O e um conjunto de três vetores denominados vetores da base do referencial . É, como se vê uma definição formal, baseada no conceito de vetores.

Vamos introduzir primeiramente o ***referencial cartesiano***. De acordo com Weyl , o referencial cartesiano é consitituido por um ponto O e três vetores mui especiais denominados

$$\vec{i}\,,\vec{j}\ \text{e}\ \vec{k}$$

Tais vetores têm a mesma orientação dos eixos x, y e z. Eles têm módulo 1 e, tendo em vista que os eixos são ortogonais, eles são ortogonais entre si. Ou seja:

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1 \qquad\qquad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

figura do referencial

Observe-se que nesse contexto simples estamos apenas trocando o conceito de três eixos orientados por três vetores que têm a direção e o sentido dos eixos.

Nesse referencial, um vetor qualquer $\vec{V}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\vec{i}\,,\vec{j}$ e $\vec{k}$:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_x\vec{j} + V_x\vec{k}$$

Em particular, sendo a posição uma grandeza vetorial, o vetor posição é dado por:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Nota-se assim o sentido de denominarmos x, y e z como coordenadas do referencial cartesiano. Nesse referencial definimos as componentes de um vetor como os produtos escalares dos mesmos pelos vetores da base:

$$V_x = \vec{i}\cdot\vec{V} \qquad V_y = \vec{i}\cdot\vec{V} \qquad V_z = \vec{k}\cdot\vec{V}$$

Das propriedades (000) segue que o módulo de um vetor é definido como:

$$\left|\vec{V}\right| \equiv \sqrt{\vec{V}\cdot\vec{V}} = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}$$

Utilizando a base de vetores (000), podemos introduzir uma nova definição de produto vetorial de dois vetores. Ou seja, o produto vetorial dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é um terceiro vetor, $\vec{C}$, cuja notação é:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$$

Definido a partir do determinante:

$$\vec{C} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$$

Assim, temos um método formal de introduzirmos grandezas vetoriais, alem da posição, por meio do uso do referencial cartesiano baseado no uso de vetores.

REFERENCIAIS GERAIS

Um referencial arbitrário, nessa nova definição de referencial, consiste de um ponto de origem –O- e três vetores da base não necessáriamente ortogonais entre si. Isso nos levará a entender a definição de componentes do vetor posição, força, velocidade e a aceleração e outros vetores , em novos referenciais.

Designando os vetores da base de um referencial arbitrário por $\vec{e}_1,\ \vec{e}_1 \text{ e } \vec{e}_3$,, podemos agora definir um vetor arbitrário como sendo a combinação linear entre os vetores do base:

$$\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3$$

Onde agora $V_1, V_2 \text{ e } V_3$ são as componentes do vetor nesse referencial.

No sentido mais geral apresentado acima, utilizar coordenadas diferentes das coordenadas cartesianas, coordenadas $Q_1, Q_2 \text{ e } Q_3$, leva a uma nova escolha de referencial. Ou seja, pressupõe o uso de uma nova base de vetores. Esses vetores da base dependem das coordenadas. Assim, escrevemos como base em argumentos gerais:

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1\ Q_1, Q_2, Q_3\ , \qquad \vec{e}_2 = \vec{e}_2\ Q_1, Q_2, Q_3 \qquad \text{e} \qquad \vec{e}_3 = \vec{e}_3\ Q_1, Q_2, Q_3$$

Existem métodos matemáticos que nos permitem, dadas as coordenadas, determinar os vetores da base para os referenciais correspondentes.

Figura no 3D

O vetor posição se escreve, num referencial arbitrário, como:

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Onde $x_1, x_2 \text{ e } x_3$ são as coordenadas do vetor posição nesse referencial.

A seguir isso será ilustrado no caso do referencial polar.

COORDENADAS GENERALIZADAS

Determinar a posição de uma partícula, do ponto de vista formal, é equivalente a especificar suas coordenadas. A especificação das coordenadas se dá através de algum tipo de algoritmo ou regra que permita associar a um conjunto de variáveis um ponto do espaço. Essa especificação implica associar a cada ponto um, e apenas, um conjunto de tais variáveis. Sejam Q_1, Q_2, Q_3 um tal conjunto de variáveis. Tais variáveis são as mais gerais possíveis. Por isso serão designadas por coordenadas generalizadas.

Partiremos do pressuposto de que o espaço físico é um espaço métrico, ou seja, uma definição de distancia (ou métrica) para o espaço está estabelecida e que o espaço seja euclidiano (ou espaço plano). Nessas circunstancias, existe um conjunto de coordenadas para as quais o a distancia ds entre a origem do sistema de coordenadas e um ponto infinitesimalmente próximo, de coordenadas dx, dy, dz é dada por:

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2 + \mathrm{dz}^2$$

As variáveis com a propriedade acima damos o nome de coordenadas cartesianas (x,y,z).

As coordenadas generalizadas q_1, q_2, q_3, em três dimensões, serão definidas como funções das coordenadas cartesianas. Mais geralmente, escrevemos:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = Q_1 \;\; x, y, z \\ Q_2 = Q_2 \;\; x, y, z \\ Q_3 = Q_3 \;\; x, y, z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = x \;\; Q_1, Q_2, Q_3 \\ y = y \;\; Q_1, Q_2, Q_3 \\ z = z \;\; Q_1, Q_2, Q_3 \end{array}\right\} \quad (1)$$

De (000) segue que nessas novas coordenadas, a distancia entre dois pontos infinitesimalmente próximos (de coordenadas dQ_1, dQ_2, dQ_3) é dada por:

$$ds^2 = g^{ij} dQ_i dQ_j$$

Onde a matriz g^{ij} , matriz 3x3, é o tensor métrico nessas novas coordenadas. Posteriormente, escreveremos expressões explicitas para o tensor métrico.

Em coordenadas cartesianas o tensor métrico é diagonal e suas componentes são dadas por:

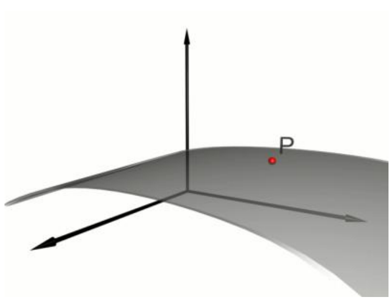
$$g^{ij} = \delta^{ij} \begin{cases} 1 \ \text{ se } i = j \\ 0 \ \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

SUPERFICIES E CURVAS GENERALIZADAS

A condição de que uma particular coordenada do espaço tenha um valor fixo, se escreve:

$$Q_i\left(x, y, z\right) = Q_{i0} = cons\tan te \qquad (2)$$

e, conseqüentemente, essa condição descreve o lugar geométrico dos pontos do espaço pertencentes a uma superfície.

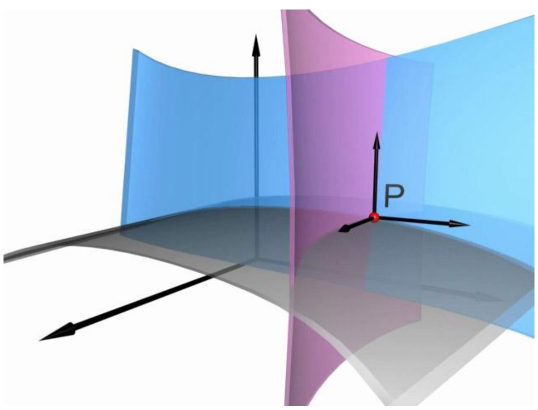


A condição de que as três coordenadas tenham um valor bem definido:

$$Q_1(x,y,z) = Q_{10}$$
$$Q_2(x,y,z) = Q_{20} \qquad (4)$$
$$Q_3(x,y,z) = Q_{30}$$

é equivalente a buscar a intersecção de tres superfícies. Essa intersecção determina um ponto no espaço.

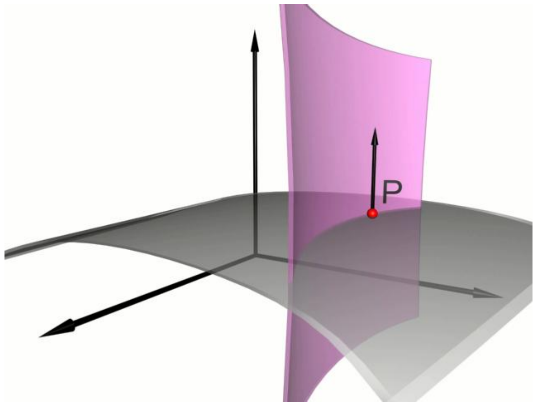
A LOCALIZAÇÃO DE UM PONTO NO ESPAÇO, EM COORDENADAS GENERALIZADAS, SE DÁ MEDIANTE A PROCURA DE UM PONTO NO ESPAÇO QUE SEJA O PONTO DE ENCONTRO DE TRÊS SUPERFÍCIES.



O conjunto de duas condições para valores constantes das coordenadas generalizadas do espaço, quando impostas simultâneamente:

$$Q_1(x,y,z) = Q_{10}$$
$$Q_2(x,y,z) = Q_{20} \qquad (3)$$

descrevem a intersecção de duas superfícies. Assim, o lugar geométrico dos pontos do espaço tais que duas coordenadas generalizadas tenham um valor fixo descreve uma curva no espaço.

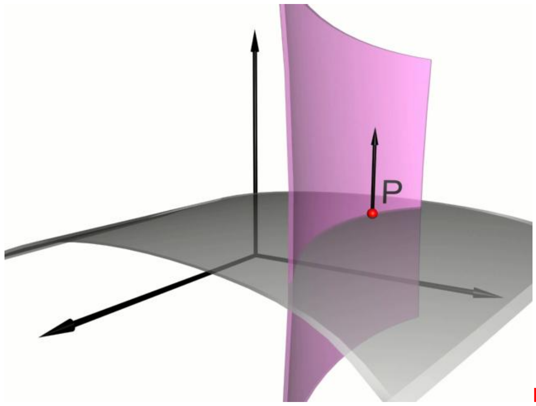


DIREÇÕES NORMAIS E TANGENCIAIS

Para cada superfície associada a um valor constante das coordenadas generalizadas podemos introduzir um vetor indicando a direção normal a essas superfícies. Temos, portanto, três direções normais a cada superfície passando por um determinado ponto do espaço:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{b}_1 \;\; x,y,z \; = \vec{\nabla} Q_1 \;\; x,y,z \\ \vec{b}_2 \;\; x,y,z \; = \vec{\nabla} Q_2 \;\; x,y,z \\ \vec{b}_3 \;\; x,y,z \; = \vec{\nabla} Q_3 \;\; x,y,z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{b}_1 \;\; x,y,z \; = \left(\vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\right) Q_1 \;\; x,y,z \\ \vec{b}_2 \;\; x,y,z \; = \left(\vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\right) Q_2 \;\; x,y,z \\ \vec{b}_3 \;\; x,y,z \; = \left(\vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\right) Q_3 \;\; x,y,z \end{array}\right.$$

Cada direção indica, por outro lado, a direção de máxima variação de cada coordenada.



não é essa

A curva representada pelo encontro de duas superfícies tem vetores tangentes e ela em cada ponto do espaço, vetores esses dados por

$$\vec{b}_1^{*}\ \ x,y,z\ \ = \frac{\partial x}{\partial Q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial Q_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial Q_1}\vec{k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial Q_1}$$

$$\vec{b}_2^{*}\ \ x,y,z\ \ = \frac{\partial x}{\partial Q_2}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial Q_2}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial Q_2}\vec{k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial Q_2}$$

$$\vec{b}_3^{*}\ \ x,y,z\ \ = \frac{\partial x}{\partial Q_3}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial Q_3}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial Q_3}\vec{k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial Q_3}$$

Onde fica subentendida pela notação, que, por exemplo, $\vec{b}_1^{*}\ \ x,y,z$ é um vetor tangente ás curvas definidas pelas condições:

$$Q_2\ \ x,y,z\ \ = Q_{20}$$

$$Q_3\ \ x,y,z\ \ = Q_{30}$$

e que, ademais, esse vetor indica a direção de valores crescentes, ao longo da curva, da coordenada Q_1.

De acordo com as definições acima verificamos que os vetores normais e tangentes devem satisfazer a condição de ortogonalidade entre eles. De fato, das definições segue que:

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j^* = \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} = \delta_{ij}$$

Pode-se verificar que a métrica (000) definida em (000), é dada pelo produto escalar:

$$g^{ij} = \vec{b}_i^* \cdot \vec{b}_j^* = \frac{\partial x^k}{\partial Q_i} \frac{\partial x^k}{\partial Q_j}$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

Definimos as coordenadas esféricas a partir das expressões:

$$x = r sen\theta \cos\varphi$$
$$y = r sen\theta sen\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

INVERTENDO AS RELAÇÕES ACIMA, OBTEMOS

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

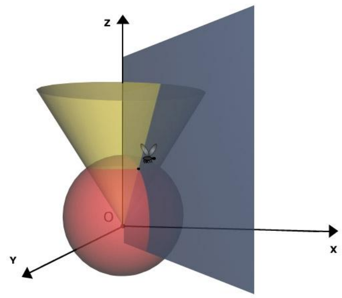
$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

A superficie

r = R (constante)

Ou, equivalentemente,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$$



corresponde a uma esfera de raio R.

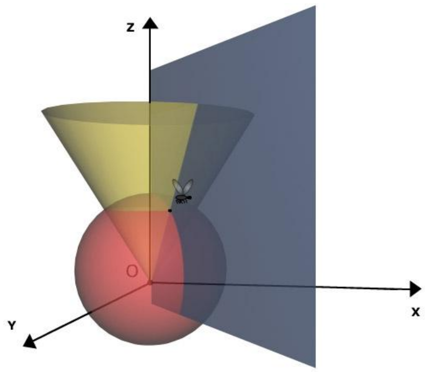
A SUPERFÍCIE DESCRITA POR

$$\varphi = \varphi_0$$

Ou, equivalentemente,

$$y = x \tan \varphi_0$$

descreve um semi-plano.



Enquanto que a equação

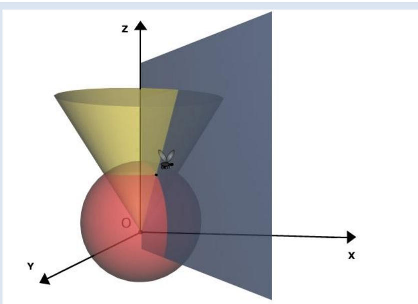
$$\theta = \theta_0$$

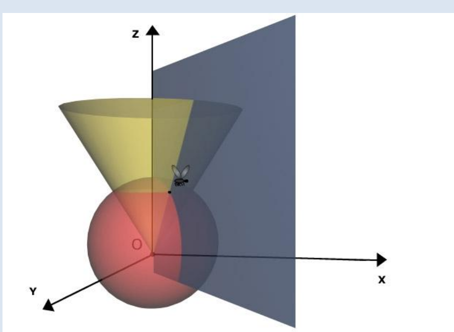
que implica a relação:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z \tan\theta_0$$

descreve um cone de ângulo θ_0.

O encontro das tres superficies determina um ponto no espaço especificado pelas coordenadas $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$



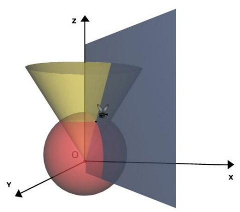
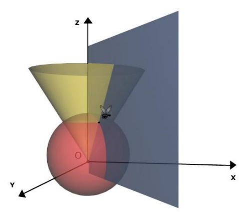
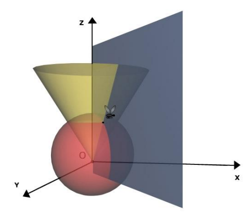


Os vetores $\vec{b}_i\ \ x,y,z$, em coordenadas esféricas, são dados por:

$$\vec{b}_r\ \ x,y,z\ \ =\vec{\nabla}r\ \ x,y,z\ \ = sen\theta\cos\varphi\vec{i} + sen\theta sen\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{b}_\theta\ \ x,y,z\ \ =\vec{\nabla}\theta\ \ x,y,z\ \ =\frac{1}{r}\ \ \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta sen\varphi\vec{j} - sen\theta\vec{k}$$

$$\vec{b}_\varphi\ \ x,y,z\ \ =\vec{\nabla}\varphi\ \ x,y,z\ \ =\frac{1}{rsen^2\theta}\ \ -sen\theta sen\varphi\vec{i} + sen\theta\cos\varphi\vec{j}$$

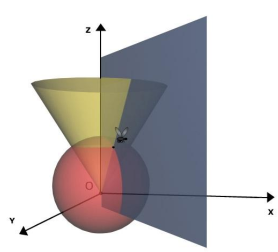
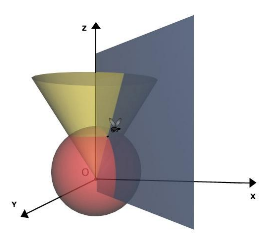
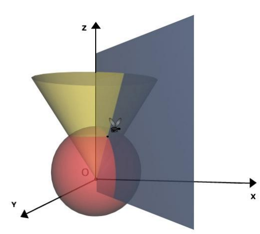




Os vetores tangentes á curva determinada pela intersecção de duas superfícies são

$$\vec{b}_r^*\ \ x,y,z\ \ =\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = sen\theta\cos\varphi\vec{i} + sen\theta sen\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{b}_\theta^*\ \ x,y,z\ \ =\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\vec{i} + r\cos\theta sen\varphi\vec{j} - rsen\theta\vec{k}$$

$$\vec{b}_\varphi^*\ \ x,y,z\ \ =\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -rsen\theta sen\varphi\vec{i} + rsen\theta\cos\varphi\vec{j}$$

Nesse caso os vetores normais e tangentes são vetores paralelos. Diferem apenas no valor do módulo. Por essa razão é muito mais prático, fazer uso de apenas um conjunto de vetores ortonormalizados. Denominamos esse conjunto de vetores de $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$

$$\vec{e}_r \equiv \frac{\vec{b}_r}{\left|\vec{b}_r\right|} = sen\theta\cos\varphi\vec{i} + sen\theta sen\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta \equiv \frac{\vec{b}_\theta}{\left|\vec{b}_\theta\right|} = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta sen\varphi\vec{j} - sen\theta\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi \equiv \frac{\vec{b}_\varphi}{\left|\vec{b}_\varphi\right|} = -sen\theta sen\varphi\vec{i} + sen\theta\cos\varphi\vec{j}$$

Esses vetores se constituem numa base ortonormal em coordenadas esféricas.

De (000), obtemos para o tensor métrico, a seguinte expressão:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix}$$

È importante ressaltar que a escolha de um conjunto de coordenadas pressupõe o uso, em se tratando de grandezas vetoriais, de um conjunto de vetores especificando as direções normais e tangenciais.