CINEMÁTICA E DINÂMICA NOS REFERENCIAIS GENERALIZADOS

Introdução

Nesse capítulo analisaremos a cinemática e a dinâmica em referenciais generalizados. Referenciais generalizadas introduzem expressões bastante gerais para as componentes da força, da velocidade e da aceleração.
O que emerge dessa análise é uma formulação das leis de Newton que assume a mesma forma independentemente do conjunto de coordenadas utilizadas. Sob esse aspecto, podemos dizer que nessa formulação temos como introduzir as leis de Newton sob uma forma covariante, em relação à escolha de referenciais.
O que emerge dessa análise é que a segunda lei de Newton tem a mesma forma em relação à escolha de coordenadas.

Um vetor qualquer pode tanto ser expresso em termos dos vetores de uma base

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} V_i \vec{b}_i \tag{7}$$

Quanto em termos dos vetores da base dual

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} V^i \vec{b}_i^* \tag{8}$$

As componentes, covariante(V^i) e contravariante(V_i), são obtidas a partir das projeções:

$$V^i \equiv \vec{V} \cdot \vec{b}_i^* \tag{9}$$

e

$$V_i \equiv \vec{V} \cdot \vec{b}_i \tag{10}$$

Note-se que o vetores $\vec{b}_i$ e $\vec{b}_i^*$ não são, necessariamente, versores. Podemos construir dois tipos de versores dividindo cada vetor pelo seu respectivo módulo.

Os vetores $\vec{b}_i$ são ortogonais ás superfícies definidas em (4), enquanto os vetores $\vec{b}_i^*$ são tangentes ás linhas resultantes da intersecção de dois dos planos definidos em (4).

Podemos introduzir dois tipos de métrica para um espaço Euclidiano. De fato, de (9) e (10) segue que o módulo de um vetor pode ser escrito de duas forma:

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = \sum V_i V_j g^{ij}$$

Ou,

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = \sum_{i,j=1}^{3} V^i V^j g_{ij}$$

As métricas g são dadas pelos produtos escalares:

$$g^{ij} \equiv \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j$$

$$g_{ij} \equiv \vec{b}_i^* \cdot \vec{b}_j^*$$

Note-se que o vetores $\vec{b}_i$ e $\vec{b}_i^*$ não são, necessariamente versores. Podemos construir dois tipos de versores dividindo cada vetor pelo seu módulo.

Os vetores $\vec{b}_i$ são ortogonais ás superfícies definidas em (4), enquanto os vetores $\vec{b}_i^*$ são tangentes ás linhas resutantes da intersecção de dois dos planos definidos em (4).

O vetor posição é definido num sistema cartesiano, e utilizando coordenadas cartesianas, como:

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Dessa forma, utilizando um sistema de coordenadas cartesiano podemos escrever o vetor posição utilizando as coordenadas generalizadas como sendo dado por:

$$\vec{r}(t) = x\left(Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)\right)\vec{i} + y\left(Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)\right)\vec{j} + z\left(Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)\right)\vec{k}$$

A expressão acima pode ser considerada como o ponto de partida no estudo da cinemática

As coordenadas covariantes e contravariantes do vetor posição são, respectivamente;

$$r_i \equiv \vec{r} \cdot \vec{b}_i^{\,*} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ \vec{r} \cdot \vec{r}}{\partial Q_i}$$

$$r^i \equiv \vec{r} \cdot \vec{b}_i = \vec{r} \cdot \vec{\nabla} Q_i$$

A velocidade, em coordenadas generalizadas, será dada pela derivada do vetor de posição com respeito ao tempo. Efetuando tal derivação, obtemos de (000), a seguinte expressão:

$$\vec{V} = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial Q_i} \frac{dQ_i}{dt} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial Q_i} \frac{dQ_i}{dt} \right) \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial Q_i} \frac{dQ_i}{dt} \right) \vec{k}$$

Utilizando a expressão (5) podemos escrever

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dQ_i}{dt} \vec{b}_i^{\,*}$$

Portanto a componente contravariante do vetor velocidade é:

$$\boxed{V^i \equiv \vec{V} \cdot \vec{b}_i = \frac{dQ_i}{dt}}$$

Ao passo que a componentes covariantes do vetor velocidade serão dadas por

$$V_i \equiv \vec{V} \cdot \vec{b}_i^{\,*} = \sum_{j=1}^{3} \frac{dQ_j}{dt} g_{ji} = \sum_{j=1}^{3} V^j g_{ji}$$

Onde g_{ji} é o tensor métrico definido em (000).

O VETOR VELOCIDADE

Quando levamos em conta a dependência implícita do vetor posição com respeito ás coordenadas generalizadas, ele é escrito como:

$$\vec{r}(t) = x\left(Q^1(t),Q^2(t),Q^3(t)\right)\vec{i} + y\left(Q^1(t),Q^2(t),Q^3(t)\right)\vec{j} + z\left(Q^1(t),Q^2(t),Q^3(t)\right)\vec{k}$$

a velocidade em coordenadas generalizadas, será dada pela derivada do vetor posição, com respeito ao tempo. De (000), obtemos para o vetor velocidade:

$$\vec{V} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial Q_i}\frac{dQ_i}{dt}\vec{i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial Q_i}\frac{dQ_i}{dt}\vec{j} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial Q_i}\frac{dQ_i}{dt}\vec{k}$$

Utilizando a expressão (000) para uma das bases de vetores e agrupando termos, podemos escrever o vetor velocidade num referencial generalizado, c omo:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dQ^i}{dt}\vec{b}_i^*$$

Concluimos, de (000), que a componente covariante do vetor velocidade é:

$$V^i \equiv \vec{V}\cdot\vec{b}_i = \frac{dQ^i}{dt}$$

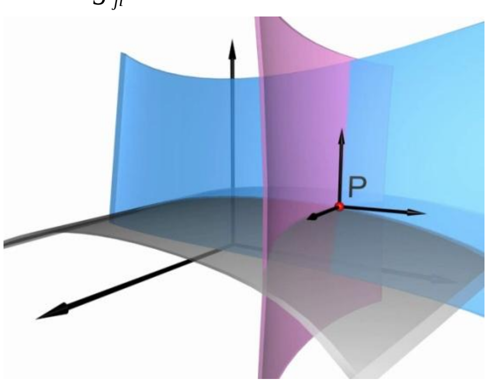
Ao passo que as componentes contravariantes da velocidade serão dadas por

$$V_i \equiv \vec{V}\cdot\vec{b}_i^* = \sum_{j=1}^{3} \frac{dQ_j}{dt} g_{ji} = \sum_{j=1}^{3} V^j g_{ji}$$

Resumidamente, escrevemos

$$\boxed{V_i \equiv g_{ij}\frac{dQ^j}{dt}}$$

Onde g_{ji} é o tensor métrico.



ACELERAÇÃO EM COORDENADAS GENERALIZADAS

Tendo em vista que a aceleração é definida como a derivada, com respeito ao tempo da velocidade, de ( ), segue que a aceleração é composta por dois termos:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2Q^i}{dt^2}\vec{b}_i^{\,*} + \sum_{i=1}^{3} \frac{dQ^i}{dt}\frac{d\vec{b}_i^{\,*}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dV^i}{dt}\vec{b}_i^{\,*} + \sum_{i=1}^{3} V^i \frac{d\vec{b}_i^{\,*}}{dt}$$

As componentes contravariantes da aceleração serão dadas por:

$$a_j = \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2Q^i}{dt^2}\vec{b}_i^{\,*} \cdot \vec{b}_j^{\,*} + \sum_{i=1}^{3} \frac{dQ_i}{dt}\frac{d\vec{b}_i^{\,*}}{dt} \cdot \vec{b}_j^{\,*}$$

Substituindo-se agora a relação

$$\frac{d\vec{b}_i^{\,*}}{dt} \cdot \vec{b}_j^{\,*} + \frac{d\vec{b}_j^{\,*}}{dt} \cdot \vec{b}_i^{\,*} = \frac{d\ \vec{b}_i^{\,*} \cdot \vec{b}_j^{\,*}}{dt} = \frac{d\ g_{ij}}{dt}$$

Obtemos que a componente contravariante da aceleração pode ser escrita como a soma sobre 3 termos:

$$a_j = \sum_{i=1}^{3} g_{ji}\frac{d^2Q^i}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{dQ^i}{dt}\frac{d\vec{b}_i^{\,*}}{dt} \cdot \vec{b}_j^{\,*} = \sum_{i=1}^{3} g_{ji}\frac{d^2Q^i}{dt^2} - \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dQ^i}{dt}\vec{b}_i^{\,*}\right) \cdot \frac{d\vec{b}_j}{dt} + \sum_{i=1}^{3} \frac{dQ^i}{dt}\frac{d\ \vec{b}_i^{\,*} \cdot \vec{b}_i^{\,*}}{dt}$$

A qual pode ser escrita sob a forma

$$a_j = \sum_{i=1}^{3} g_{ji}\frac{d^2Q^i}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{dQ^i}{dt}\frac{d\ \vec{b}_i^{\,*} \cdot \vec{b}_j^{\,*}}{dt} - \vec{V} \cdot \frac{d\vec{b}_j^{\,*}}{dt}$$

Utilizando agora a expressão (000), concluimos que

$$\frac{d\vec{b}_j}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial Q_j}\right) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial Q_j}$$

Donde inferimos que a aceleração pode ser escrita como:

$$a_j = \sum_{i=1}^{3} g_{ji}\frac{d^2Q^i}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3}\frac{dQ^i}{dt}\frac{d\ \ g_{ji}}{dt} - \frac{d}{dQ_j}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Podemos agrupar a componente da aceleração da seguinte forma:

$$a_j = \frac{d\ \ g_{jk}V^k}{dt} - \frac{d}{dQ_j}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

E portanto, nos referenciais generalizados a aceleração pode ser escrita de uma forma muito parecida com aquela válida para os referencias cartesianos. A saber:

$$a_j = \frac{d\ \ V_j}{dt} - \frac{d}{dQ_j}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

A interpretação para o segundo termo, como fazendo parte da força generalizada será discutida a seguir.

A conclusão é que a aceleração em referenciais generalizados adquire uma forma geral que depende tão somente das coordenadas e das taxas de variações das componentes da velocidade definidas como projeções nos eixos generalizados.

ENERGIA CINÉTICA

Pode-se escrever a aceleração generalizada em termos de derivadas da energia cinética. Para tal, lembremos primeiramente que escrita em termos das coordenadas generalizadas ela pode ser escrita de duas formas equivalentes:

$$T = \frac{m}{2}V^2 = \sum \frac{m}{2}V_iV_jg^{ij} = \sum \frac{m}{2}\frac{dQ_i}{dt}\frac{dQ_j}{dt}g^{ij}$$

Ou, análogamente,

$$T = \frac{m}{2}V^2 = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{m}{2}V^iV^jg_{ij}$$

Da definição acima podemos verificar fácilmente que

$$\frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_j} = \dot{Q}^i g_{ij} = V^i g_{ij} \equiv V_j$$

Segue de (00) e (000) que a aceleração generalizada pode ser escrita sob a forma

$$\boxed{a_i = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{1}{m}\frac{dT}{dQ_j}}$$

AS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE

Podemos agora formular a lei de Newton em coordenadas generalizadas. Para tal basta escrevê-la em termos de componentes contravariantes ou covariantes, Em termos das componentes contravariantes a lei de Newton se escreve:

$$ma_i = F_i$$

onde a componente generalizada da aceleração é dada em (000), e Q_i é a componente generalizada da força:

$$F_i \equiv \vec{F}\cdot\vec{b}_i$$

Para forças conservativas, escrevemos

$$\vec{F} \equiv -\vec{\nabla} V$$

Onde *V* é a energia potencial associado à força. Ou seja, forças conservativas são aquelas que derivam de um potencial.

Lembramos primeiramente que a expressão do gradiente em coordenadas generalizadas é:

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial Q^i}\vec{b}_i^*$$

Então podemos verificar que a componente da força se escreve como:

$$F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial Q_i}$$

De (000) e (000) segue que a lei de Newton, em coordenadas generalizadas, é dada por:

A lei de Newton em coordenadas generalizadas se escreve

$$\boxed{\frac{d\ \ mV_i}{dt} - \frac{dT}{dQ_j} = F_i}$$

A qual pode ser escrita como

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial Q_j} = -\frac{\partial V}{\partial Q_i}}$$

Admitindo agora que o potencial seja função apenas das coordenadas:

$$V = V\ \ Q_1, Q_1, Q_3$$

e definindo a função Lagrangeana como a diferença entre a energia potencial e a energia cinética, escrevemos:

$$\boxed{L = T - V}$$

Tendo em vista que, por definição,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_i}\right)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial Q_i}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial Q_i}\right)$$

As equações de Newton, em coordenadas generalizadas, podem ser escritas como

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0}$$

E estas são as equações de Euler-Lagrange.

Momento Canonicamente Conjugado a uma Variável.

Ao fazermos a transição da mecânica clássica para a mecânica quântica fazemos uso de mm dos conceitos mais importantes da mecânica, O conceito de momento canonicamente conjugado a uma variável. Por definição, o momento canonicamente conjugado à variável Q^i, é definido formalmente como:

$$\boxed{P_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}}$$

No caso de uma partícula puntiforme, e de acordo com (000), tal grandeza é dada por:

$$P_i = mV_i$$

Assim, uma das formas de escrever as equações de Euler-Lagrange é:

$$\frac{d}{dt}\left(P_i\right) = F_i^{Gen}$$

Onde a força generalizada é dada pela expressão:

$$F_i^{Gen} = \frac{\partial L}{\partial Q_i}$$

Coordenadas Esféricas

A título de exemplo, consideramos as coordenadas esféricas
Os vetores $\vec{b}_i^*(x,y,z)$ são dados por:

$$\vec{b}_r(x,y,z) = \vec{\nabla} r(x,y,z) = sen\theta\cos\varphi\vec{i} + sen\theta sen\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{b}_\theta(x,y,z) = \vec{\nabla}\theta(x,y,z) = \frac{1}{r}\left(\cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta sen\varphi\vec{j} - sen\theta\vec{k}\right)$$

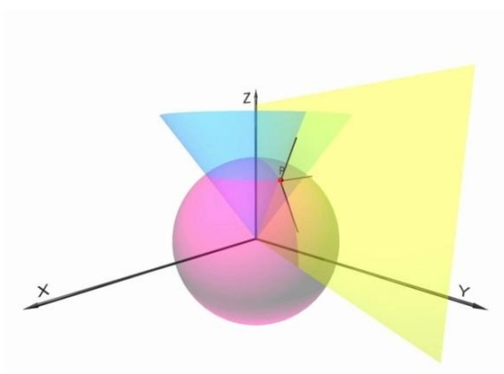
$$\vec{b}_\varphi(x,y,z) = \vec{\nabla}\varphi(x,y,z) = \frac{1}{rsen^2\theta}\left(-sen\theta sen\varphi\vec{i} + sen\theta\cos\varphi\vec{j}\right)$$

e

$$\vec{b}_r^*(x,y,z) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = sen\theta\cos\varphi\vec{i} + sen\theta sen\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{b}_\theta^*(x,y,z) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\vec{i} + r\cos\theta sen\varphi\vec{j} - rsen\theta\vec{k}$$

$$\vec{b}_\varphi^*(x,y,z) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -rsen\theta sen\varphi\vec{i} + rsen\theta\cos\varphi\vec{j}$$



Para as métricas, temos

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix}$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} sen^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

A Velocidade em coordenadas esféricas é dada por:

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{b}_r^{\,*} + \frac{d\theta}{dt}\vec{b}_\theta^{\,*} + \frac{d\varphi}{dt}\vec{b}_\varphi^{\,*}$$

As componentes contravariantes da velocidade, são portanto,

$$V^1 = \frac{dr}{dt} \qquad V^2 = \frac{d\varphi}{dt} \qquad V^3 = \frac{d\theta}{dt}$$

$$V_1 = \frac{dr}{dt} \qquad V_2 = \frac{d\varphi}{dt}r^2 \mathrm{sen}^2\theta \qquad V_3 = \frac{d\theta}{dt}r^2$$

Enquanto que para a aceleração se obtem a partir de:

$$a_i = \frac{dV_i}{dt}$$

As componentes da aceleração são, portanto:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$a_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}r^2 \mathrm{sen}^2\theta\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt}\frac{dr^2}{dt}$$

$$a_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}r^2\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt}\frac{d\ \ r^2}{dt}$$

DERIVADA COVARIANTE

Consideremos uma variação arbitrária de um vetor

$$\delta\vec{V}(x_1, x_2, ..)$$

Tal variação, é também um vetor. Em coordenadas generalizadas, uma variação das coordenadas é associada, por exemplo, á variação das coordenadas:

$$x_i \to x_i + \delta x_i$$

Levando em conta os vetores da base, uma variação arbitrária é constituída de dois termos.

$$\delta\vec{V} = (\delta V^i)\vec{b}_i + V^i \delta\vec{b}_i$$

O primeiro termo dá a variação da componente contravariante enquanto que o segundo corresponde á variação dos próprios vetores da base. Consideremos em seguida a projeção da variação na base dual :

Definimos as coordenadas do vetor variação, como a grandeza física DA^j , onde

$$DV^j \equiv \vec{b}_j^{\,*} \cdot \delta\vec{V} = \delta V^j + V^i \vec{b}_j^{\,*} \cdot \delta\vec{b}_i$$

Lembrando que

$$\vec{b}_j^{\,*} = g^{ik}\vec{b}_k$$

Concluímos que

$$DV^j = \delta V^j + V^i g^{jk}\vec{b}_k(\delta\vec{b}_i)$$

Para variações infinitesimais das coordenadas, temos para as duas contribuições:

$$dV^i = \frac{\delta V^i}{\delta x^l} dx_l$$

$$g^{jk}\vec{b}_k \cdot (\delta\vec{b}_i) = g^{jk}\vec{b}_k \cdot \frac{\partial\vec{b}_i}{\partial x_l} dx_l$$

Notemos agora que

$$\vec{b}_k \cdot \frac{\partial\vec{b}_i}{\partial x_l} = \vec{b}_k \cdot \left[\frac{\partial g_{im}}{\partial x_l}\vec{b}_m^{\,*} + g_{im}\frac{\partial\vec{b}_m^{\,*}}{\partial x_l}\right] = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} + g_{im}\vec{b}_k \cdot \frac{\partial\vec{b}_m^{\,*}}{\partial x_l}$$

Repetindo o procedimento acima até encontrarmos, do lado direito o primeiro termo com um sinal menos, veremos que o resultado é análogo á expansão Da derivada de um vetor da base em termos de vetores da base. Ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\vec{b}_i = \sum_n \vec{b}_n \Gamma^n_{il}$$

Onde Γ^n_{il} ***é o símbolo de christoffell,*** ou ainda ***conexão afim***
Utilisando a expansão acima, concluímos que

$$DV^i = \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} V^k\right) dx_l$$

O próximo passo será o de determinarmos a conexão afim. Lembramos primeiramente, que

$$\vec{b}_i \cdot (\delta \vec{b}_i) = \frac{\delta g_{ii}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_l}\right) dx_l$$

E, consequentemente, concluimos que podemos expressar variações de vetores da base em termos de variações dos componentes e derivadas envolvendo o tensor métrico.
O resultado geral é que

$$\Gamma^i_{kl} \equiv \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\delta g_{mk}}{\delta x_l} + \frac{\delta g_{ml}}{\delta x_k} - \frac{\delta g_{kl}}{\delta x_i}\right)$$

Definimos também, o símbolo:

$$\Gamma_{i,kl} \equiv g_{ij} \Gamma^j{}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta g_{ik}}{\delta x_{ll}} + \frac{\delta g_{il}}{\delta x_k} - \frac{\delta g_{kl}}{\delta x_i}\right)$$

A extensão desse conceito, sem levarmos em conta os vetores da base parte do pressuposto de que da definição de vetores, sob transformações gerais de coordenadas, é uma transformação tal que

$$A'_i \to A_i = \frac{\delta x^{ik}}{\delta x^i} A'_k$$

Assim, a variação dos componentes de um vetor

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\right)$$
$$= \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \left(\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^l \partial^i x}\right) dx^l$$

De uma forma análoga ao caso anterior, escrevemos para a variação de um vetor,

$$DA^i = dA^i + \Gamma^i_{kl} A^k dx^l$$

$$DA_i = dA_i - \Gamma^k_{il} A_k dx^l$$

Lembrando que

$$dA^i = \frac{\delta A^i}{\delta x^l} dx_l$$

Temos

$$DA^i = \left(\frac{\delta A^i}{\delta x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k \right) dx_l$$

$$DA_i = \left(\frac{\delta A_i}{\delta x_l} - \Gamma^k_{il} A_k \right) dx^l$$

Definimos as derivadas covariantes de um vetor, como

$$A^i_{;j} \equiv \frac{\delta A^i}{\delta x^j} + \Gamma^i_{kj} A^k$$

$$A_{i;j} \equiv \frac{\delta A_i}{\delta x^j} - \Gamma^k_{ij} A_k$$

Tendo em vista que

$$DA_i = g_{ik} DA^k$$

E que

$$A_i = g_{ik} A^k$$

Segue de (   ), que

$$DA_i = Dg_{ik} A^k = \quad Dg_{ik} \quad A^k + g_{ik} DA^k$$

E portanto, a variação da métrica é nula

$$Dg_{ij} = 0$$

e, por conseguinte, a derivada covariante da métrica, ou do campo gravitacional, é nula.

$$g_{ik;l} = 0$$

DINAMICA DO MOVIMENTO NUM CAMPO GRAVITACIONAL

A equação fundamental da teoria da relatividade é a equação para o tensor de curvatura.

$$R_{ik} - \frac{g_{ik}}{\partial} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}$$

Onde o tensor T_{ik} é o tensor de energia e momento associado a certa distribuição de matéria.

O tensor de curvatura é definido em termos da métrica (o campo gravitacional $g_{\mu\nu}$) através da expressão.

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left[\frac{\delta^2 g_{im}}{\delta x^k \delta x^1} + \frac{\delta^2 g^{kl}}{\delta x^i \delta x^{\gamma n}} - \frac{\delta^2 g^{il}}{\delta x^k \delta x^m} - \frac{\delta^2 g_{km}}{\delta x^i \delta x^l}\right]$$
$$+g_{np}\left[\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right]$$

No limite de campos gravitacionais muito fracos a relação entre métrica e campo gravitacional é muito explicita, uma vez que, nesse limite

$$g_{00} = -1 - \frac{2V(\vec{r})}{c^2}$$

Onde $V\ \vec{r}$ é a energia potencial gravitacional devido á existência da distribuição de massa.

Sendo a quadri-velocidade dada pela taxa com que o quadrivetor de posição no espaço tempo se altera com o intervalo de tempo próprio.

$$u_i = \frac{dx^i}{ds}$$

Então, na ausência de outras interações, que não a gravitacional, podemos escrever

$$Du^i = 0$$

Ou, equivalente,

$$du^i + \Gamma^i_{kl} u^k dx^l = 0$$

Donde deduzimos que a equação de movimento de uma partícula sob a ação de um campo gravitacional se escreve como:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0$$

A qual pode ser interpretada como uma equação análoga a de Newton.

$$a^i = F^i$$

Onde a “quadriforça”, F_i envolve o campo gravitacional á qual ela está sujeita, através da conexão afim.

$$F^i = -\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}$$