13-00204 - 2011/201

Física Matemática I Aula I 01/08/2011

Prof: Jorge Horony
horony@if.usp.br

* Monitor: Jorgivan Morais.

* 2ª e Sexta às 10 am : Sala 208 } Ala centro
Quartas : 8am : Sala 208

* Falar que temos página no STOA.

* Imprimir um programa de curso.

Aula I 01/08/2011

Números complexos como espaço vetorial

Seja $i \equiv \sqrt{-1}$. Nas soluções de eqs. de segunda ordem

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Surgem raízes do tipo $z = x + iy$ onde $x, y \in \mathbb{R}$. Denotamos,

$\mathrm{Re}\, z = x$ → parte real de z
$\mathrm{Im}\, z = y$ → parte imaginária de z

⊛ Sabemos que i nunca se torna real através de multiplicação por números reais.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \cdot i \notin \mathbb{R}$. Isso implica que se $z = x + iy = 0 \Rightarrow x, y = 0$.

Considere o conjunto de todas as combinações acima chamado $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} : \{ z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R} \}$$

Introduzimos as seguintes operações

① $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$a \cdot z \longmapsto ax + iay \text{ e}$$

② $\forall z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$, $\forall z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \in \mathbb{C}$$

Ex: Prove que se $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$

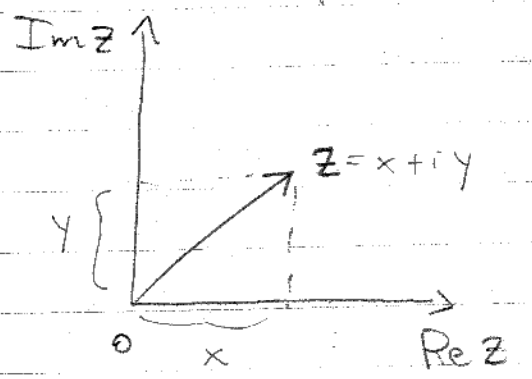
⊛ Nós veremos adiante que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre o corpo $\mathbb{R}$.

⊛ Agora entretanto, nos basta usar a intuição sobre o que é um espaço vetorial.

Os elementos básicos são: 1) Noção de direções e 2) Noção de distância.

⇒ Dimensão: número (máx.) de direções independentes.

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ podemos representá-lo no plano complexo como (forma cartesiana)



$\rightarrow z = (\underset{\text{Re}\,z}{x}, \underset{\text{Im}\,z}{y})$ (Ponto no plano)

(OBS: $z = a$, $a \in \mathbb{R}$ é também complexo. $z = 0 \Rightarrow 0 + i0$).
($z = iy \rightarrow$ número imag. puro)

⊛ Ex: Veja como as propriedades (1) e (2) podem ser representadas no plano complexo.

Multiplicação

Sabemos que $i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \in \mathbb{R}$
$i \cdot 1 = i \in \mathbb{C}$

Em geral, $\forall z_1, z_2$ e $z_3 \in \mathbb{C}$

$$z_1 \cdot z_2 = z_3$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_3 + iy_3$$
$$x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) - y_1 y_2$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

$$y_3 = x_1 y_2 + y_1 x_2$$

Note que essa regra é <u>comutativa</u>.

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

<u>Associativa</u>

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

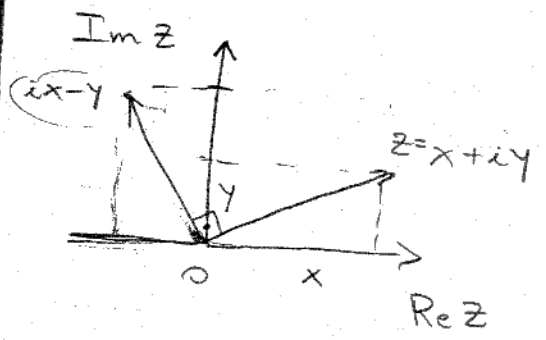
<u>Distributiva e linear</u> $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$z_1 \cdot (\alpha z_2 + \beta z_3) = \alpha (z_1 \cdot z_2) + \beta (z_1 \cdot z_3)$$

⊛ Multiplicação por número complexo é um operador em $\mathbb{C}$ $(\mathbb{C} \to \mathbb{C})$.

Exemplo: Para $z = x + iy$ multiplicação por i

é $z = ix - y \neq z$



$iz \to$ roda z de $90°$ em torno da origem.

Ex: Defina $e(\theta) \in \mathbb{C}$ $\ni$ $e(\theta) \equiv \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$
$\theta \in \mathbb{R}$

Note que se $z = x + iy$

$$e(\theta).z = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta).(x + iy)$$
$$= (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta) + i\,(x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)$$

Então, o efeito do operador $e(\theta)$ é

$$z' \equiv e(\theta).z = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta) + i\,(x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)$$

$$e(\theta): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

Isto corresponde à rotação no plano (x, y) por um ângulo θ.

Se $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow e\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$ e assim nós recuperamos o exemplo anterior.

<u>Mostre que</u>: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ onde

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rotação em } (x, y)$$

2x2 matriz

<u>Mostre que</u>: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad e(\alpha).e(\beta) = e(\alpha + \beta)$

$$A(\alpha).A(\beta) = \underbrace{A(\alpha + \beta)}_{\text{matriz}}$$

Representação polar

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ temos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$

$z = \alpha \left(\frac{x}{\alpha} + i \frac{y}{\alpha} \right)$. Suponha agora que α é tal que

$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \sqrt{x^2+y^2}$ e

já que $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ $\forall \theta$

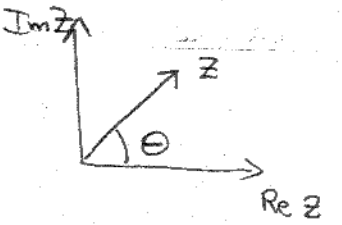
Fazemos

$\frac{x}{\alpha} = \cos\theta$, $\frac{y}{\alpha} = \operatorname{sen}\theta$ e assim

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\, e(\theta)$$

$$= r\, e(\theta)$$



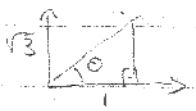
$|z| \equiv r \equiv \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow$ módulo de z

$\theta \rightarrow$ argumento de z.

⊛ Então, vemos que $\alpha z \rightarrow$ significa esticar (ou contrair) o módulo de z
$\alpha \in \mathbb{R}^*$
sem mudar sua direção. Vimos antes que multiplicação por "i" rodava z de $\frac{\pi}{2}$ ao redor da origem.

Assim, multiplicação de z por um número complexo $z_1 = r_1 e(\theta_1)$ qualquer é a combinação de rodar z de θ_1 e esticar seu módulo de r_1.

Ex: Expressão polar de $z = 1 + i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$, 

$tg\,\theta = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Divisão por números complexos como operação inversa à multiplicação

Por construção, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\exists z_3 \in \mathbb{C}$ ∋

$$z_3 = z_1 \cdot z_2$$

z_1 pode ser visto como uma operação (ou operador) que leva z_2 em z_3.

Suponha que exista (isso não é garantido) z_4 tal que

$$z_4 \cdot z_3 = z_2 \qquad \text{mas } z_3 = z_1 \cdot z_2$$

$$= z_4 \cdot (z_1 \cdot z_2) = z_2$$

$$= (z_4 \cdot z_1) \cdot z_2 = z_2 \quad \forall z_2 \in \mathbb{R}, \text{ Portanto}$$

$$z_4 \cdot z_1 = 1 \qquad \text{ou } z_4 = z_1^{-1}$$

(analogamente $z_1 \cdot z_4 = 1$)

Se $z_1 = x + iy$, O que é $z_4 = z_1^{-1}$?

$z_4 \cdot (x+iy) = 1$

Definimos o número complexo conjugado

$z^* \equiv x - iy$ e assim

$(zz^* = x^2+y^2 \in \mathbb{R})$

$z_1^{-1} \cdot (x+iy) \cdot z^* = z^*$

$z_1^{-1} (x+iy) \cdot (x-iy) = x - iy$

$z_1^{-1} \cdot (x^2+y^2) = x - iy$ divide dois lados por x^2+y^2

$$\boxed{z_1^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}}$$

⊕ Note que isso mostra que $\exists\, z^{-1}$ se $x^2+y^2 \neq 0$. Mas $x^2+y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 0$. Assim, $\forall z = x+iy \in \mathbb{C} \ni z \neq 0$, $\exists\, z^{-1}$ dado por

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Ex: Forma polar $z = r\,e(\theta)$, z^{-1}?

Qual o inverso de $e(\theta)$? $e(-\theta)$.

$z^{-1} = \frac{1}{r} e(-\theta)$, claramente.

⊕ Note que $(z^*)^* = z$ → tomar conjugado leva $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. É um operador linear, ou seja,

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad (\alpha z_1 + \beta z_2)^* = \alpha z_1^* + \beta z_2^* =$

Potenciação de um número complexo e raiz

Seja $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z^2 \equiv z \cdot z \in \mathbb{C} \quad \text{ou}$$

Se $z = x + iy$

$$z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \quad \text{(forma cartesiana)}$$

Forma polar: $z^2 = r^2(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^2$

$$= r^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + 2i\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)$$

$$= r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$$

E z^n onde n inteiro?

(teorema de De Moivre)

Exemplo: Prove que $z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$

Prova por indução matemática (Importante)

1º) Prova que afirmativa válida para um caso particular (digamos $n_0 = 1$).
(óbvio)

2º) Assuma que afirmativa n é válida. Use isso para provar que afirmativa $n+1$ é válida.

Então, afirmativa é válida $\forall n \geq n_0$.

Escolhe $n_0 = 1 \rightarrow z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \xrightarrow{\text{Válido}}$

Assume $z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,\theta n)$ é válido.
Então

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = r^{n+1}(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= r^{n+1}\Big[(\cos n\theta\cos\theta - \text{sen}\,n\theta\,\text{sen}\,\theta)$$

$$+ i(\text{sen}\,n\theta\cos\theta + \cos n\theta\,\text{sen}\,\theta)\Big]$$

$$= r^{n+1}\left[\cos(n+1)\theta + i\,\text{sen}(n+1)\theta\right] \quad //$$

Raiz Para um dado z queremos calcular $z^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{C}$. Isso significa que $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^n = z$ e usando forma polar

$z^{\frac{1}{n}} \equiv r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ Assim

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta) = z$$

Definimos $z \equiv |z|(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$. Assim,

$r^n = |z|$ ou $r = |z|^{\frac{1}{n}}$ e

$\cos n\theta = \cos\theta_1$
$\text{sen}\,\theta n = \text{sen}\,\theta_1$ θ ? Claramente

$$n\theta = \theta_1 + 2\pi k$$

$k \in$ inteiros

Assim, $r = |z|^{\frac{1}{n}}$, $\theta_k = \frac{\theta_1}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, $k = 1, \ldots$

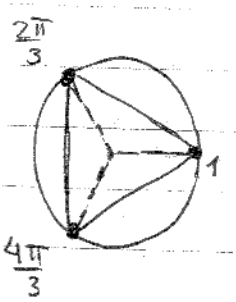
Ex: Tire a n-ésima raiz da unidade!

$$1 = \cos(2\pi k) + i\,\mathrm{sen}(2\pi k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(2\pi \frac{k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Vértices do polígono regular inscrito num círculo de raio 1.

$n = 3 \rightarrow k = 0, 1, 2$



⊛ Outras propriedades triviais que vocês podem demonstrar:

$$|z| \geq |\mathrm{Re}\, z| \geq \mathrm{Re}\, z$$
$$|z| \geq |\mathrm{Im}\, z| \geq \mathrm{Im}\, z$$

$$(z^*)^* = z, \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(por indução)

$$|z_1 - z_2| \geq \big| |z_1| - |z_2| \big|$$

<u>Extra</u>: O que é um anel?

Estrutura algébrica consistindo num conjunto A com um elemento 0 e duas operações binárias $+$ e $\cdot$

$+, \cdot : A \times A \longrightarrow A$ que satisfazem

1- Associatividade $\forall a,b,c \in A$

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

2- Elemento neutro do $+$.
$\forall a \in A$

$$a+0 = 0+a = a$$

3. Exist. simétrico de $+$: $\forall a,b \in A$
$a+b=0$ (único)

4. Comutatividade de $+$ $(\forall a,b \in A)$
$$a+b = b+a$$

5. Associatividade de $\cdot$ $(\forall a,b,c \in A)$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

6. Distributividade de $\cdot$ em relação a $+$ (à esquerda e à direita) $\forall a,b,c \in A$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{e}$$
$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Se $\cdot$ é comutativo ($a \cdot b = b \cdot a$) então dizemos que o anel é comutativo.

Um corpo: Um anel comutativo F é um corpo se

$$\forall x \in \underbrace{F^*}_{\text{sem } \{0\}} \quad \exists y \in F \quad , \quad x \cdot y = 1$$

(não tem divisores por zero)

Exemplo: números reais, complexos etc.
(com adição e multiplicação)

Espaço vetorial: Entidade formado por

1- Corpo K cujos elementos são chamados escalares
2- Um conjunto V dotada de operação binária (denotada $+$) de $V \times V \to V$. Os elementos são chamados de vetores.

3- Uma operação $\cdot$ de $K \times V$ em V.

Axiomas: $\forall u, v, w \in V$ e $\forall a, b \in K$

1- $(u+v)+w = u+(v+w)$ (associatividade)
2- $\exists 0 \in V \ni v+0 = 0+v$ (exist. elem. neutro)
3- $\exists u \ni u+v = v+u = 0$ (elem. oposto)
4- $u+v = v+u$ ($+$ é comutativo)
5- $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$
6- 1 unid. de K, $1 \cdot v = v$
7- $a \cdot (v+u) = a \cdot v + a \cdot u$
8- $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$

Dimensão do espaço vetorial

Sejam $z_1, \dots, z_n \in V$. Esses elementos são ditos linearmente independentes se, para um dado conjunto de escalares $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $\alpha_i \in K$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i = 0 \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

O número máximo de elementos linearmente independentes do espaço vetorial é dito a dimensão do espaço. (Discutir operador linear de novo)

Exemplo: Números complexos com corpo dos reais.

03/08/2011 Aula 2

Funções complexas

Sabemos a álgebra e potenciação e agora podemos definir funções que levam um ponto de $\mathbb{C}$ num outro em $\mathbb{C}$.

mapeamento $\rightarrow$ $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto f(z)$$

Note que $f(z) \in \mathbb{C}$, então sempre podemos escrever

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$$

Aqui, definiremos

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \text{onde}$$

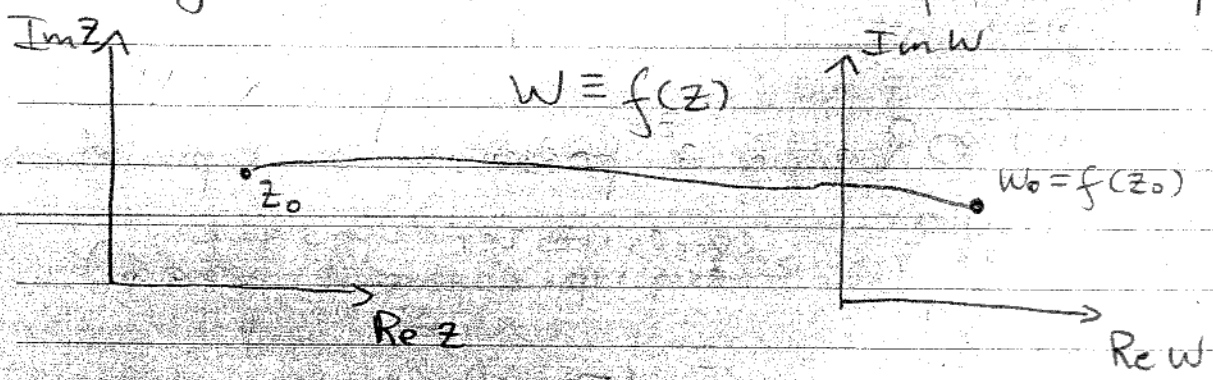
$u(x,y)$
$v(x,y)$ → funções reais.

Isto pode ser visto como uma transformação de coordenadas

de $(x,y) \longrightarrow (u,v)$

novas coordenadas para especificar um ponto P no plano

De fato,
imagine um ponto z_0 no plano x,y



$f(z)$ mapeia em geral um plano no outro!

Exemplo: $f(z) = z^2$ então f leva $i \longrightarrow -1$ em z em w.

Fórmula de Euler

Exponencial: e^x, $x \in \mathbb{R}$

Propriedades: $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ $\quad \forall x_1, x_2, a \in \mathbb{R}$

$(e^x)^a = e^{ax}$

Lembra da série de Taylor? (uma variável)

$$f^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n}$$

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \dots$$

em torno de x_0

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Para função exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$ certo? Sim!

Vamos SUPOR que a e^z possa ser representada pela Série de Taylor

(vocês vão ver depois que essa rep. é possível $\forall z \in \mathbb{C}$)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Então, para $z = iy$

$$e^z = e^{iy} = e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}}_{\cos y} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\operatorname{sen} y}$$

$= \cos y + i \operatorname{sen} y$ essa é a fórmula de Euler!

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \quad \forall z \in \mathbb{C}}$$

Prove que:

$$e^{i(y_1+y_2)} = e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} \qquad (y_1, y_2 \in \mathbb{R})$$

$$(e^{iy})^n = e^{iny}$$

$n \in$ inteiro

usando a fórmula de De Moivre $\rightarrow (\cos y + i \operatorname{sen} y)^n = \cos ny + i \operatorname{sen} yn$

e propriedades gerais de senos e cossenos.

<u>Outras funções elementares</u> (via fórmula de Euler)

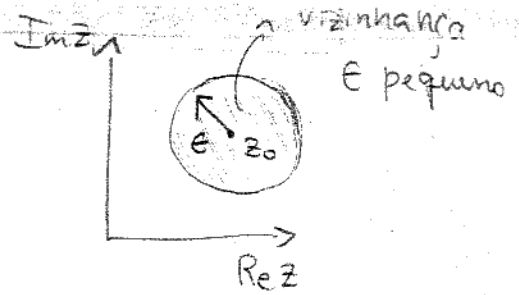
$$\operatorname{sen} z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{senh} z \equiv \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z \equiv \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$e^{\pm z} = \cosh z \pm \sinh z$$

Noção de continuidade

Seja $w = f(z)$ definida em uma vizinhança do ponto z_0 $\supset$ $f(z_0) = w_0$.



Conjunto aberto: Se contém uma vizinhança de cada um dos pontos (ex: interior de um cubo — podemos sempre desenhar uma peq. esfera em torno de cada pto interior a qual estará inteiramente contida no cubo).

- Se incluir a fronteira do cubo não é conjunto aberto (se torna conjunto fechado).

Então, $f(z)$ é contínua em z_0 se para um ε >

$$|z - z_0| < \underbrace{\varepsilon}_{\text{suf. pequeno}} \implies |f(z) - w_0| < \underbrace{\delta}_{>0 \text{ pequeno}}$$

ou seja se $z \to z_0 \implies f(z) \to f(z_0) = w_0$

Se $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ é contínua, u e v são também são. Faz sentido!

Derivada de funções complexas

Para uma função com variável real

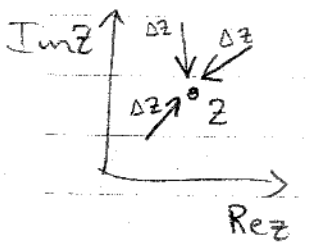
$$\frac{dg(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$, caso o limite exista

Para funções de variáveis complexas, como $z = x + iy$, temos que ter cuidado com a existência do limite.

Se o limite <u>existe</u> em z e uma vizinhança

$$f'(z) \equiv \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

ele não pode depender de como nós nos aproximamos de z.



?

Ou seja, para $z = x + iy$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x+\Delta x + iy + i\Delta y) - f(x+iy)}{\Delta x + i\Delta y}$$

<u>Tem que ser independente da razão</u> $\frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Fazendo $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$$f(x+\Delta x + iy + i\Delta y) = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i v(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

$$= u(x,y) + i v(x,y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$+ i \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + i \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} + \cdots$$ então

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x + i\Delta y} \left\{ \Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \Delta y \left[\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right.$$

quando $\Delta x, \Delta y \to 0$

Suponha que tomemos o caminho ao longo do eixo real. Então $\Delta y = 0$ e

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Analogamente, suponha que ventamos pelo eixo imaginário

Então $\Delta x = 0$ e $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$

Mas esses limites tem que ser idênticos ∇

Então,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Essas são as (famosas) condições de Cauchy-Riemann!

⊛ Uma função $f(z)$ é analítica (regular ou holomorfa) no ponto z se ela possuir derivada em z e em todos os pontos de uma vizinhança de z.

⊛ Se a função é analítica na vizinhança em z, as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

⊛ Reciprocamente, se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ possuem derivadas parciais de 1º ordem que satisfazem as condições de Cauchy-Riemann em uma vizinhança de z, então $f(z) = u + iv$ é analítica em z.

Aplicação conforme

Suponha que $f(z)$ analítica em uma região R. Se

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ então u e v satisfazem Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

então $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = 0$ nessa região

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{então}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(analogamente)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad //$$

u, v soluções da eq. de Laplace em 2d $\rightarrow$ Funções harmônicas

Então, se $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ é analítica então u e v são funções harmônicas.

Ex: Potencial eletrostático no vácuo

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi = 0$$

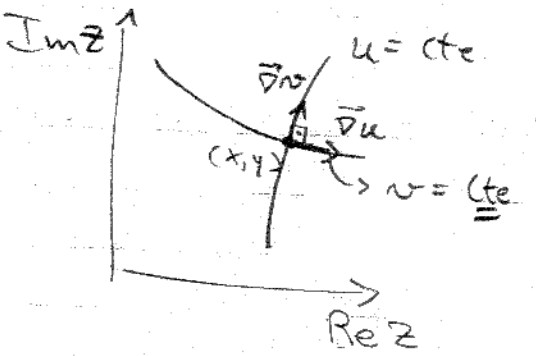
Se ϕ ñ depende de z (tipo simetria axial)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = 0 \rightarrow \phi \text{ é função harmônica}$$

Imagine agora que queiramos traçar uma curva definida por (para função analítica na região).

$u(x,y) = \underline{\underline{Cte}}$ e $v(x,y) = \underline{\underline{Cte}}$ no plano z complexo.

(se $u = \underline{\underline{Cte}}$ ao longo da curva $du = \vec{\nabla} u \cdot d\vec{l} = 0$).



No ponto de interseção

$$\vec{\nabla} u = (\partial_x u, \partial_y u)$$

$$\vec{\nabla} v = (\partial_x v, \partial_y v)$$

$$(\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} v) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Como $f = u + iv$ é analítica nessa região (por def.) podemos usar Cauchy-Riemann

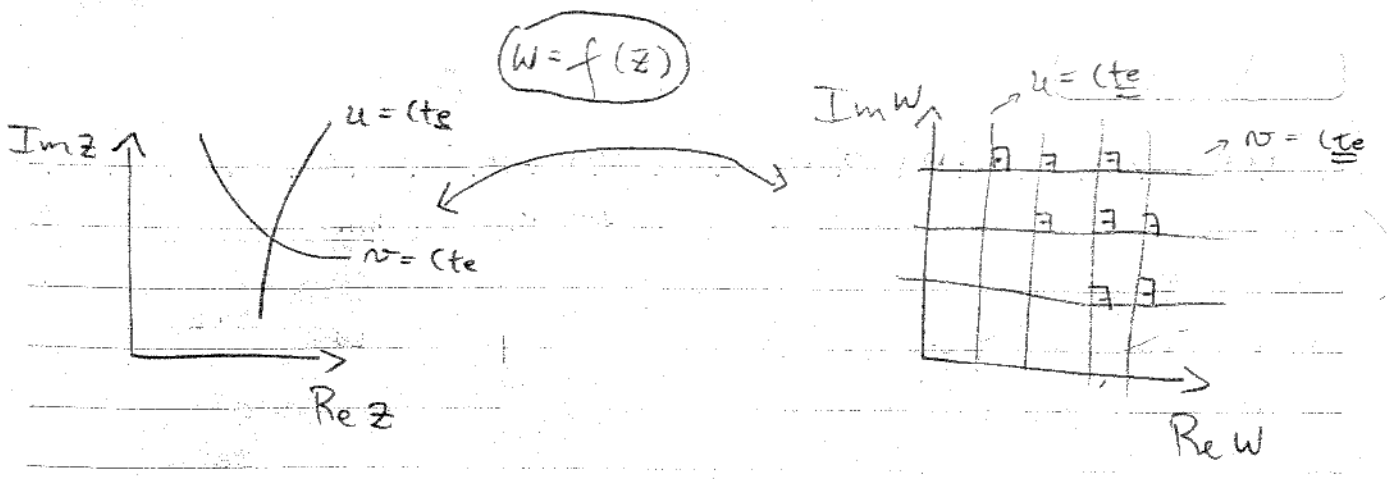
$$(\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} v) = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

⊛ Então $\vec{\nabla} u \perp \vec{\nabla} v$ se <u>f analítica</u> !!

$u(x,y) = \underline{\underline{Cte}}$ ⟶ superfície equipotencial

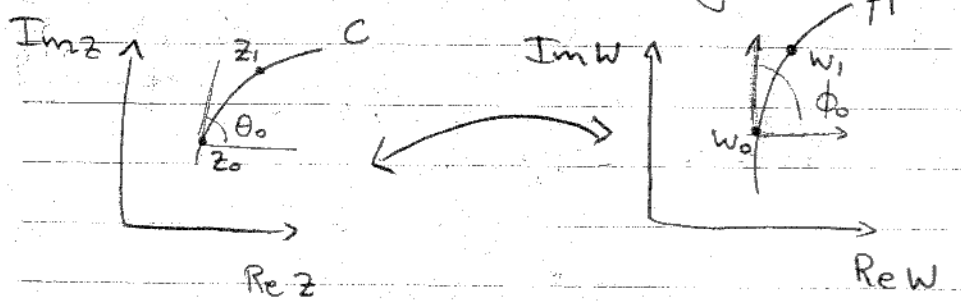
$v(x,y) = \underline{\underline{Cte}}$ ⟶ linha de campo

A função $w = f(z)$ transforma

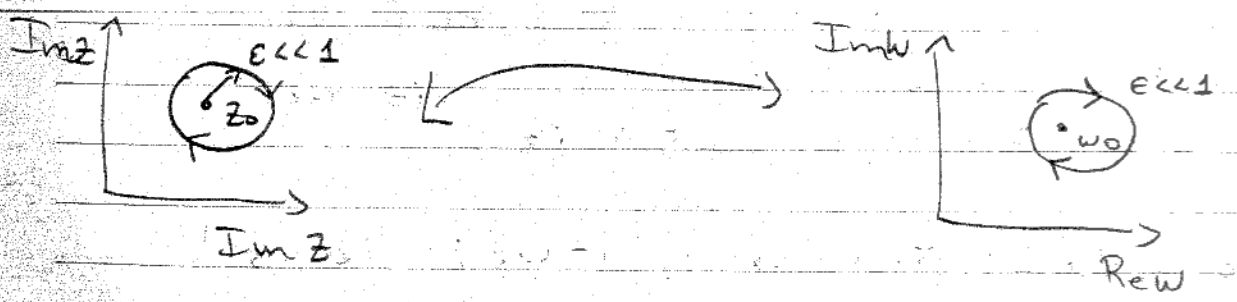


Aplicação $z \to f(z)$ é <u>conforme</u> em um dado z_0 se:

a) Invariância dos ângulos



b) Círculo infinitesimal mantém forma (e direção)

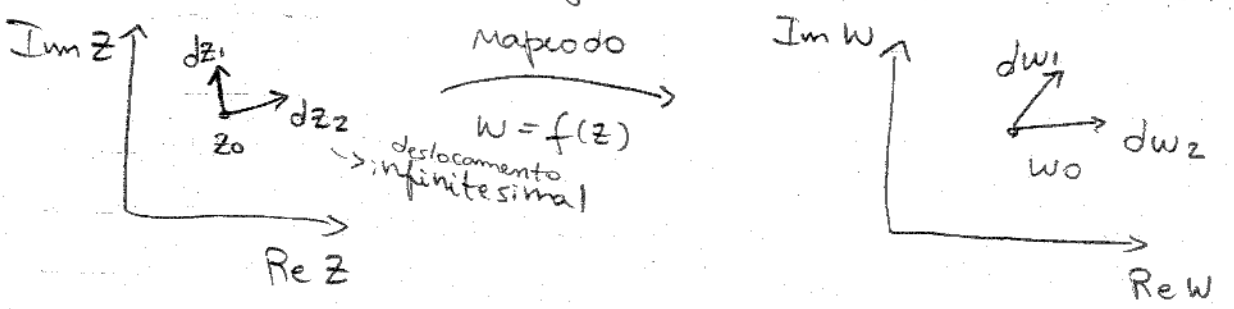


⊛ Se $f(z)$ é analítica em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$ então

$z \to f(z)$ é <u>conforme em z_0</u>.

A invariância dos ângulos pode ser mostrada facilmente...

Primeiro, imagine $f(z)$ analítica em z_0



Eu quero mostrar que o ângulo entre dz_1 e dz_2 no plano z é idêntico ao ângulo entre dw_1 e dw_2 no plano w.

Como definimos ângulo entre números complexos?

Para vetores em $\mathbb{R}^2$ $\vec{a}$, θ, $\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Para números complexos

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$z_1 z_2^* = r_1 r_2 e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\mathrm{Re}\{z_1 z_2^*\} = r_1 r_2 \cos(\theta_1-\theta_2)$$ mas

$|z_1| = r_1$ e $|z_2| = r_2$ então

$$\cos(\theta_1-\theta_2) = \frac{\mathrm{Re}\{z_1 z_2^*\}}{|z_1||z_2|}$$ // então para dz_1 e dz_2

em z_0

$$\cos(\theta_1-\theta_2) = \frac{\mathrm{Re}\{dz_1\, dz_2^*\}}{|dz_1|\,|dz_2|}$$

Vamos chamar o ângulo entre dw_1 e dw_2

$$\cos(\phi_1-\phi_2) = \frac{\mathrm{Re}\{dw_1\, dw_2^*\}}{|dw_1|\,|dw_2|}$$

em w_0

Mas, como a função é analítica em z_0

$$dz_1 \xrightarrow{\text{mapeamento}} dw_1 \quad \text{e} \quad dw_1 = \left(\frac{df}{dz}\right)_{z_0} dz_1$$

$$dz_2 \longrightarrow dw_2 \qquad dw_2 = \left(\frac{df}{dz}\right)_{z_0} dz_2$$

então

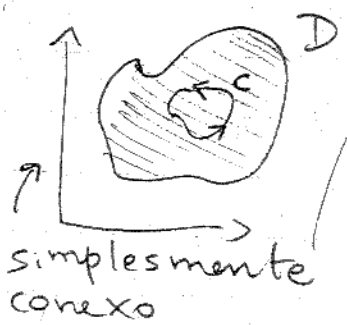
$$\frac{dw_1\, dw_2^*}{|dw_1|\,|dw_2|} = \frac{\left|\left(\frac{df}{dz}\right)_{z_0}\right|^2 dz_1\, dz_2^*}{\left|\left(\frac{df}{dz}\right)_{z_0}\right|^2 |dz_1|\,|dz_2|}$$

$$= \frac{dz_1\, dz_2^*}{|dz_1|\,|dz_2|} \implies \underset{\text{em } w}{\phi_1-\phi_2} = \underset{\text{em } z}{\theta_1-\theta_2}$$

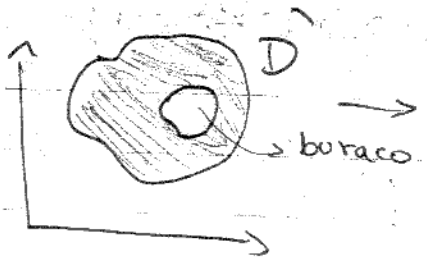
//

Teorema de Cauchy

Primeiro, vamos definir um domínio simplesmente conexo D — conjunto aberto



→ toda curva fechada C contida em D tem seu interior também contido em D (ausência de buracos)



→ D' não é simplesmente conexo.

Agora imagine uma curva fechada C qualquer em D.

Se $f(z)$ é analítica em D (e u e v tem derivadas contínuas) então

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0}$$

(teorema de Cauchy).

Prova: Para $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (dx + i\,dy)(u + i\,v)$$

$$= \oint_C (u\,dx - v\,dy) + i \oint_C (u\,dy + v\,dx)$$

Se $f(z)$ analítica, as 1os derivadas de u e v existem e são contínuas. Assim podemos usar o teorema de Stokes

Define campo vetorial $A_1(x,y) = (u(x,y), -v(x,y))$

e $A_2 = (v, u)$ então a parte real fica

$$\oint_C \vec{A_1} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A_1}) \cdot d\vec{a} \quad \text{ou}$$

onde S é tal que $\partial S = C$

$$\oint_C (u\,dx - v\,dy) = \int_S dx\,dy \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

e a imaginária

$$\oint_C \vec{A_2} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A_2}) \cdot d\vec{a} \quad \text{ou}$$

$$\oint_C (v\,dx + u\,dy) = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Usando Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$ parte real some

e

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$ parte imaginária se anula.

Então, $\oint_C f(z) = 0$ quando $f(z)$ analítica em D.

Teorema de Morera

Se $f(z)$ é contínua em D e se $\oint_C f(z)\,dz = 0$ $\forall$ caminho simples fechado C em D com interior em D, então $f(z)$ é analítica em D

Teorema fundamental do cálculo

Para uma função de uma variável

$$F(x) = \int_a^x dx'\, f(x') \quad \text{então} \quad \frac{dF}{dx} = f(x)$$

Para funções complexas ...

Se $f(z)$ é analítica em D simplesmente conexo então, pelo teorema de Cauchy,

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \implies \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz \implies \text{não depende da trajetória}$$

Assim, $\exists\, F(z)$ também analítica em D (caminho aberto)

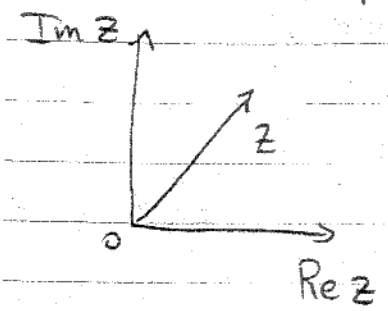
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} d\xi\, f(\xi) \quad \text{e} \quad \frac{dF}{dz} = f(z)$$

05/08/2011 Aula 3

O que vimos até agora...

Números complexos $z = x + iy \in \mathbb{C}$ → representação cartesiana

$x, y \in \mathbb{R}$



Podemos somar, subtrair, dividir e multiplicar de maneira semelhante ao que fazemos com números reais.

Representação polar: $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = |z| e^{i\theta}$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z^* = |z| e^{-i\theta}$

⊛ $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ (Fórmula de Euler)

⊛ $z^n = |z|^n e^{in\theta}$ (Fórmula de De Moivre)

⊛ Raízes da unidade $\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$

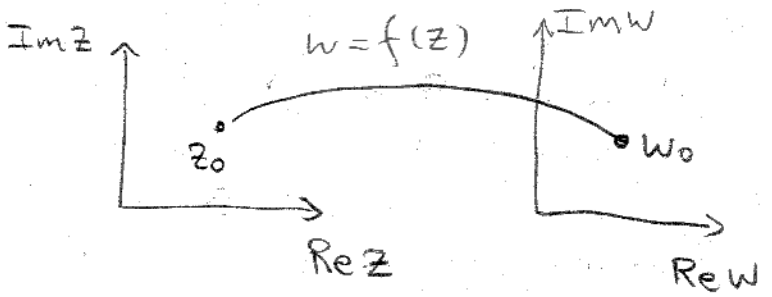
$n \in$ inteiro

$k = 0, \dots, n-1$

Vimos também funções complexas...

$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z)$ e $f(z) = \underbrace{u(x,y)}_{} + i\, \underbrace{v(x,y)}_{}$

fçs reais



Continuidade Se para $|z - z_0| < \underset{\text{peq.}}{\varepsilon}$

$\Rightarrow |f(z) - w_0| < \underset{\text{peq.}}{\delta}$, $f(z)$ contínuo em z_0

Analogamente, $f(z) = u + iv \rightarrow$ contínuo em $z_0 = x_0 + iy_0$ se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ contínuas.

Derivada

Para variável real $g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$

Esse limite existe quando $\lim x \to x_0^+$ é o mesmo para $\lim x \to x_0^-$.
Nesse caso, $g'(x_0)$ existe.

* Para funções definidas em $\mathbb{C}$, nossa exigência para que a derivada de uma $f(z)$ exista em um dado z_0 será que

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

seja independente da direção que nos aproximamos de z_0 no plano complexo

⊛ Nós vimos que, assumindo que o limite seja o mesmo quando nos aproximamos de z_0 pelo eixo real ou imaginário, leva às condições de Cauchy-Riemann

$f(z) = u + iv$ e $\exists f'(z_0)$ se

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

⊛ Essas condições são <u>NECESSÁRIAS</u> para a existência de $f'(z)$ em um dado z_0.

consequência
$\nabla^2 u = 0$
$\nabla^2 v = 0$
fgs harmônicas

⊛ Além disso, se as condições de Cauchy-Riemann são <u>válidas</u> e as derivadas de u e v são <u>contínuas</u> $\Longrightarrow \exists f'(z)$ no dado ponto.

Funções analíticas

Se $f'(z)$ existe em z e em uma pequena vizinhança centrada em z, dizemos que $f(z)$ é analítica em z.

⊛ Se $f(z)$ é analítica em todo plano complexo (finito), $f(z)$ é chamada <u>função inteira</u>.

<u>Exemplo</u>: $f(z) = z^2 \Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2$

$z = x + iy \qquad v(x,y) = 2xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$f(z) = z^2 \rightarrow$ satisfaz Cauchy-Riemann em todo plano complexo. Derivadas de u e v também são contínuas. Assim $f(z) = z^2$ é analítica e inteira.

⊛ Se convença (de cabeça) que $f(z) = e^z$ é analítica e inteira $\forall z \in \mathbb{C}$ (finito).

Exemplo: $f(z) = z^* \rightarrow u = x$
$v = -y$

Cauchy-Riemann test:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

Então $f(z) = z^*$ não é analítica para nenhum z em $\mathbb{C}$. Note que $f(z) = z^*$ é contínua $\forall z \in \mathbb{C}$.

⊛ É importante ressaltar que a derivada de uma função de variável real é uma propriedade local. Para uma função de uma variável complexa, analiticidade é uma propriedade não somente local mas também controla o comportamento da função numa região (lembre que u e v são harmônicas)

⊛ Veremos hoje que uma função analítica em z tem TODAS as derivadas naquele ponto.

Integral de uma função complexa

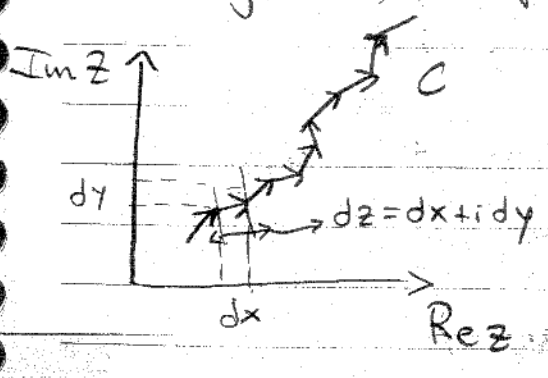
Para uma função de variável real $f(x)$

$$I = \int_a^b dx\, f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, dx_k$$

onde $\sum_{k=1}^{n} dx_k = b - a$

⊕ Note que isso pode ser visto como uma integral de linha (nesse caso ao longo do eixo real positiv

Para $f(z)$, definimos a integral ao longo de uma curva (orientada) C



$$\int_C dz\, f(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(z_k)\, dz_k$$

Separando a parte real e imaginária

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i \int_C (v\,dx + u\,dy)$$

Vimos também o teorema de Cauchy

33

"If $f(z)$ é analítica em um domínio simplesmente conexo D então $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para qq curva fechada em D.

⊕ Falamos também que se $f(z)$ for contínua em D e $\oint_C f(z)dz = 0 \ \forall C$ então $f(z)$ é analítica em D (teorema de Morera)

⊕ Vimos também o análogo do teorema fundamental do cálculo:

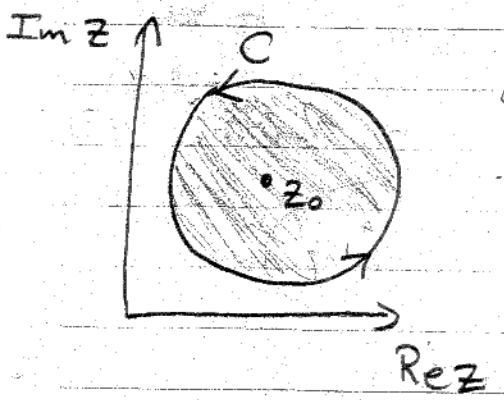
Se $f(z)$ analítica em D, então $\exists F(z)$ também <u>ANALÍTICA</u> em D tal que

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} d\xi\, f(\xi) \quad e \quad \frac{dF(z)}{dz} = f(z) \quad //$$

Agora, vamos começar com a matéria que veremos hoje...

Fórmula integral de Cauchy

Suponha que tenhamos uma $f(z)$ analítica num contorno C (fechado) e no interior



Pelo teorema de Cauchy

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Agora, imagine que definimos a função

$g(z) \equiv \dfrac{f(z)}{z-z_0}$ Agora, $g(z)$ não é analítica em z_0 (sua derivada não é definida em $z=z_0$)

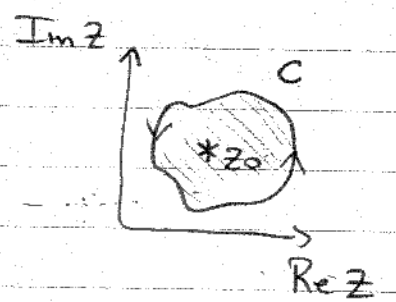
Assume z_0 não está sobre C. Agora não podemos esperar que em geral

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 0$$

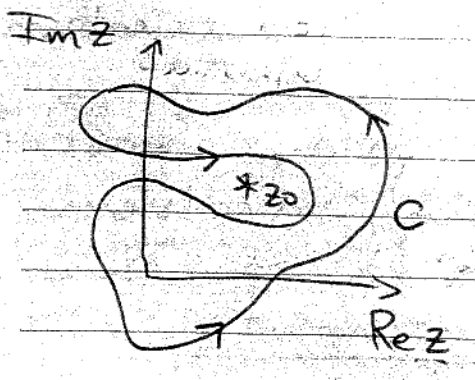
De fato, mostraremos agora a fórmula integral de Cauchy

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i\, f(z_0)}$$

C é qq contorno fechado que envolve z_0



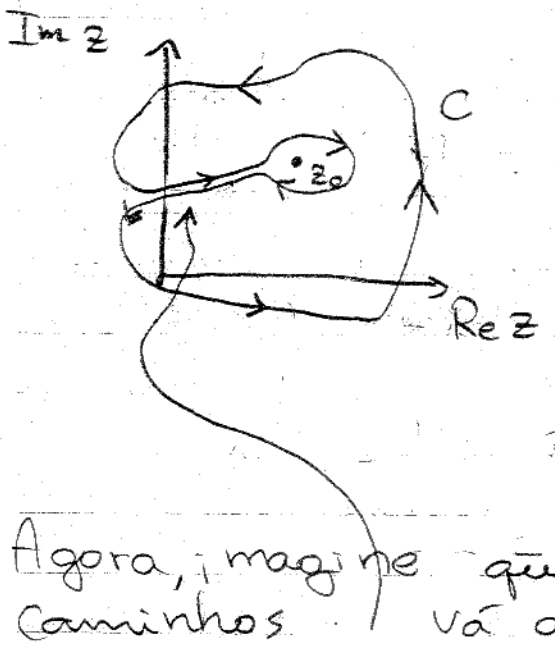
Primeiro, considere o seguinte contorno



Esse contorno não contém o pólo. Então

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 0$$ pelo teorema de Cauchy.

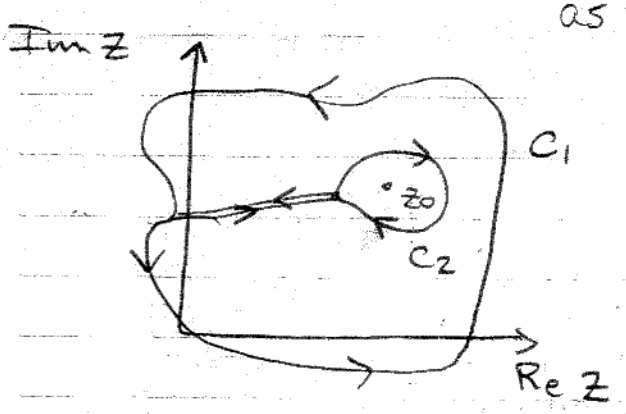
Agora, imagine o seguinte contorno



De novo, embora C tenha ficado um pouco esquisito, uma vez que ele não engloba z_0,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 0.$$

Agora, imagine que a distância entre os caminhos vá a zero. Como nesse pedaço as integrais se cancelam



Nesse caso $C = C_1 \cup C_2$

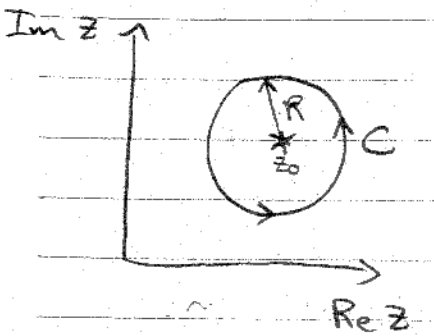
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} + \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}$$

$$= 0$$

Então, $\displaystyle\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} = \int_{C_2'} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$ onde C_2' é C_2 com orientação oposta.

Note que C_1 e C_2' são, de fato, caminhos completamente arbitrários que envolvem z_0. Assim, vemos que seja lá o que for o valor dessa integral, <u>claramente</u> esse número não depende do contorno escolhido que envolve z_0.

Já que podemos escolher então qualquer caminho para calcular $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}$, vamos definir $z = z_0 + Re^{i\theta}$ e usar um círculo de raio R em volta de z_0. Então $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}$ se torna



$$I = \oint_C \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})\, Re^{i\theta}\, i\,d\theta}{Re^{i\theta}}$$

$$I = i\int_0^{2\pi} d\theta\, f(z_0 + Re^{i\theta})$$

agora tomamos $R \to 0$ e assim

$$I = f(z_0)\, i\int_0^{2\pi} d\theta = f(z_0)\, 2\pi i$$

e então

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i\, f(z_0), \quad \forall C \text{ envolvendo } z_0 \quad \underline{f(z) \text{ analítica}}}$$

* Se z_0 estiver fora do interior de C, claramente a integral se anula.

Derivadas

Já que $f(z)$ é analítica em z_0

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z_0 \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0)}{\Delta z_0} \quad \text{existe !}$$

$$= \lim_{\Delta z_0 \to 0} \frac{1}{2\pi i \, \Delta z_0} \left[\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0 - \Delta z_0} - \oint_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \right]$$

$$= \lim_{\Delta z_0 \to 0} \frac{1}{2\pi i \, \Delta z_0} \oint_C \frac{\Delta z_0 \, f(z)}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)}$$ então

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^2}}$$ //

Como poderíamos ter obtido isso mais diretamente? Note que $f(z)$ é analítica
(z' é variável muda)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{z' - z}$$ agora

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(\frac{d}{dz} \frac{1}{(z' - z)} \right) f(z')\,dz'$$

$$\boxed{f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz}{(z' - z)^2}}$$

É fácil provar (use indução)

que em geral, se $f(z)$ analítica

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z' - z)^{n+1}}}$$ $\forall n$ inteiros positivos

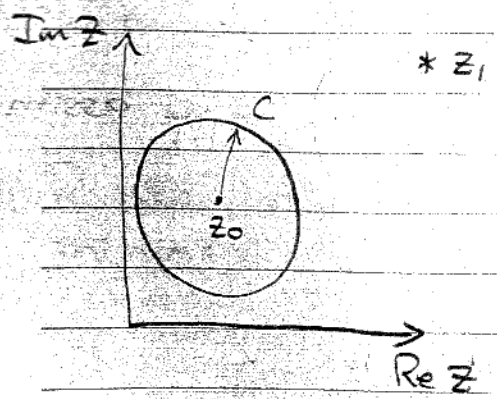
* Note que, de fato, a <u>analiticidade</u> de $f(z)$ na região IMPLICA não somente na <u>existência</u> da primeira derivada mas também na <u>existência</u> de todas as derivadas ! Todas essas derivadas são também <u>analíticas</u> !

Prove que $\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{m-n-1}\,dz = \underbrace{\delta^{m\,n}}_{\text{delta de Kronecker}}$, m, n inteiros

onde C envolve a origem (sentido anti-horário) uma vez.

Série de Taylor

Suponha que $f(z)$ analítica numa região em volta de z_0 mas não analítica em z_1.
(z_1 é a singularidade mais próx. de z_0)



Construímos um círculo C de raio $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$

$f(z)$ analítica sobre e dentro de C.

Da fórmula integral de Cauchy, fazemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{z' - z}$$

(soma e subtrai z_0)

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0) - (z - z_0)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz'\, f(z')}{(z'-z_0)\left[1 - \frac{(z-z_0)}{(z'-z_0)}\right]}$$

Agora, note que (assume S existe) $|\xi| < 1$

$$S = 1 + \xi + \xi^2 + \cdots \quad e \quad S - 1 = \xi + \xi^2 + \xi^3 + \cdots$$

$$\frac{S-1}{\xi} = 1 + \xi + \xi^2 + \cdots = S \quad \text{então}$$

$$S - 1 = S \Rightarrow S = \frac{1}{1-\xi} \quad //$$

Então

$$\left[1 - \frac{(z-z_0)}{(z'-z_0)}\right]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^n \quad \text{e assim}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz'\, f(z') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

Supondo que podemos $\oint \sum = \sum \oint$
(o que é OK se $|\xi| < 1$)

comutam

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz' f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}}_{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$ e assim

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

Série de Taylor em torno de z_0

⊗ Esse resultado é baseado somente na hipótese de que $f(z)$ é analítica para $|z-z_0| < |z_1-z_0|$. É possível mostrar que essa série em torno de z_0 é <u>única</u>.

⊗ O raio de convergência pode ser calculado pelo critério de Cauchy para série infinita

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f^{(n+1)}(z_0)} \right|$$

⊗ R não pode ser arbitrariamente grande pois assumimos antes que existe um pólo z_1.

Imagine agora que tenhamos uma função $f(z)$ analítica em $z=0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Agora defina um caminho fechado C (anti-horário) círculo de raio r no $z=0$.

Então, $$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|z|=r} dz \, \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right|$$

Defina $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Então

fazendo $z = re^{i\theta}$, $dz = re^{i\theta} i d\theta = z\, i d\theta$

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} i d\theta \, \frac{1}{r^n e^{in\theta}} f(re^{i\theta}) \right| = \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}} \right|$$

Desigualdade triangular $\left| \sum_{k=1}^{N} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{N} |z_k|$ assim

$$\frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}} \right| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} d\theta \, |f(re^{i\theta})|$$

$$\leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \text{então} \quad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

Teorema de Liouville

Se $f(z)$ é analítica e limitada no plano complexo ela é uma <u>Constante</u>.

De fato, se $|f(z)| \leq M \ \forall z \in \mathbb{C}$ então

$\lim_{r \to \infty} |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \to 0 \quad \forall n > 0$. Então

nesse caso, $f(z) = a_0 \to$ <u>cte</u>.

⊛ Assim, qualquer desvio de uma função analítica de um valor constante implica que deve existir pelo menos uma singularidade para esta função em algum ponto de todo plano complexo.

⊛ Assim, nós temos que saber lidar com singularidades pois elas irão aparecer constantemente em problemas de física matemática.

Teorema Fundamental da Álgebra (Gauss)

"Qualquer polinômio $f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ com $N > 0$ e $a_N \neq 0$ tem N raízes".

De fato, suponha que $f(z)$ não tenha raiz. Assim $\frac{1}{f(z)}$ é analítica e limitada quando

$|z| \to \infty$. Então, $\frac{1}{f(z)}$ seria uma constante

de acordo com teorema de Liouville. Claramente esse não é o caso e assim $f(z)$ tem que ter pelo menos uma raiz, que chamaremos z_1

Nesse caso, $f(z) = (z - z_1)\, g(z)$, onde

$g(z)$ é um polinômio de grau $N-1$. Novamente se $g(z)$ não contém raiz, então ela seria uma constante. Assim, $g(z)$ deve ter um zero, chamado aqui z_2.

$$g(z) = (z - z_2)\, h(z), \quad h(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} \to \text{grau } N-2$$

Mesmo raciocínio implica que $f(z)$ tem exatamente N raízes, ou seja

$$f(z) = a_N \prod_{k=1}^{N} (z - z_k)$$ é sempre possível.

Ex: Ache os coeficientes a_k de $\sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ em termos das raízes z_k.

Desigualdade triangular

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Prova: Considere $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1^* z_2 + z_1 z_2^*$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\{z_1^* z_2\}$ Agora, nós sabemos que o ângulo entre z_1 e z_2 vem de

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\{z_1^* z_2\}}{|z_1||z_2|}$$

Assim, como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ temos que

$$\mathrm{Re}\{z_1^* z_2\} \leq |z_1||z_2| \quad \text{então}$$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\{z_1^* z_2\} \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$ e assim

$$|z_1+z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \quad \text{ou}$$

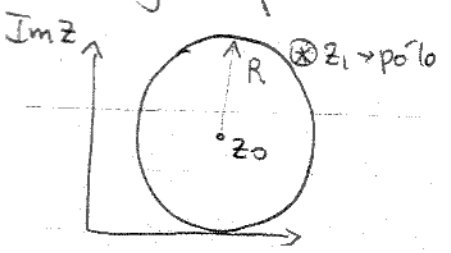
$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

q.e.d. (quod erat demonstrandum)

Prove $\left|\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |z_n|$ usando indução matemática

Teorema de valor médio de Gauss

Seja $f(z)$ analítica em $|z - z_0| < R$



Então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \, f(z + e^{i\theta} r).$$

para $0 < r < R$.

Prova: Se $f(z)$ analítica nessa região então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{z' - z_0}$$

agora escolhemos C como o círculo de raio r centrado em z_0

Parametrização

$z' = z_0 + re^{i\theta}$, $dz' = e^{i\theta} i\,d\theta\, r$ então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i\,d\theta \, \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{\cancel{re^{i\theta}}} \cancel{re^{i\theta}}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \, f(z_0 + re^{i\theta}) \quad //$$

Como $f(z) = u + iv$, obtemos que

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \, u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\,\text{sen}\,\theta)$$

$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \, v(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\,\text{sen}\,\theta)$$

Podemos reescrever isso como

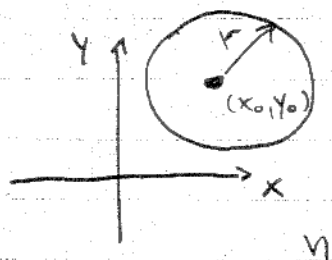
$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_C dl\, u$$

$$v(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_C dl\, v$$

onde C é o círculo de raio r centrado em (x_0,y_0) no $\mathbb{R}^2$.

Isso é uma consequência do fato de que u e v são funções harmônicas se $f(z)$ é analítico

"No plano $\mathbb{R}^2$,



O valor de uma função harmônica num dado (x_0,y_0) é igual à média dela ao longo da circunferência de raio r."

Podemos usar essa propriedade que as funções harmônicas possuem para mostrar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{z'-z}$$

onde C é o círculo de raio r centrado em z_0.

Note, entretanto, que você ainda teria que mostrar que esse resultado permanece válido $\forall C$ que contém z (como fizemos antes)

Hoje vamos falar um pouco sobre séries infinitas e suas propriedades (e também alguns truques que podemos fazer com elas).

Uma sequência infinita de números complexos $\{z_n\} = \{z_1, z_2, \dots\}$ converge para o limite complexo finito z se

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{para } n \gg 1 \text{ e } \varepsilon \geq 0 \text{ e } \varepsilon \ll 1.$$

Alternativamente, podemos reduzir a questão da convergência de uma série complexa a um problema semelhante envolvendo sequências reais:

"A sequência $\{z_n\}$ converge para $z = x + iy$ <u>se e somente se</u>

$\mathrm{Re}\, z_n$ converge para x e
$\mathrm{Im}\, z_n$ converge para y"

Prova: "Ida"

Se $\mathrm{Re}\, z_n = x_n \to x$ e $\mathrm{Im}\, z_n = y_n \to y$, então

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \underset{\text{Desigualdade triangular}}{\leq} |x_n - x| + |y_n - y|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad // \quad \text{(para } n \text{ suficientemente grande)}$$

(volta)

Reciprocamente, se $|z_n - z| < \varepsilon$ então necessariamente z_n está dentro do círculo de raio ε em torno de z. Assim,

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad e \quad |y_n - y| < \varepsilon$$

q.e.d.

⊛ Muitos dos teoremas sobre sequências reais são aplicáveis para séries complexas (vocês podem aprender mais sobre séries reais em, por exemplo, Arfken cap. 5).

⊛ Sequências convergentes podem ser somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas (termo a termo) já que elas "são" basicamente números complexos.

Propriedades envolvendo sequências convergentes

$$\lim(z_n \pm \zeta_n) = \lim z_n \pm \lim \zeta_n$$

$$\lim(z_n \zeta_n) = \lim z_n \cdot \lim \zeta_n \quad \text{e etc.}$$

⊛ Uma série infinita de números complexos $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é convergente se a sequência $\{S_n\}$ de suas somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$$

for uma sequência convergente

Fazendo $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ então $S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

(*) Se a sequência das somas parciais não convergir, dizemos que a série é divergente (o que não quer dizer que seja algo inútil, como veremos a seguir). Entretanto, temos que ter muito cuidado com séries divergentes...

Uma série é <u>absolutamente convergente</u> se a série real dos módulos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$ for uma série convergente.

(obviamente essa série é convergente).

Alguns testes de convergência:

<u>Teste da comparação</u>: Se $|z_n| \leq a_n$, $\forall a_n$ e $\sum_n a_n$ converge, então $\sum_n z_n$ converge absolutamente.

<u>Teste da Razão</u>: Se $|z_{n+1}/z_n| \leq K$ $\forall n$ suficientemente grande e <u>$K < 1$</u> então $\sum_n z_n$ converge absolutamente. Se $|z_{n+1}/z_n| \geq K$ e $K > 1$, então $\sum_n z_n$ diverge.

(r independente de n)

Teste da Raiz: Se $|z_n|^{\frac{1}{n}} \leq r < 1$ para n suficientemente grande, então $\sum_n z_n$ converge absolutamente. Se $|z_n|^{\frac{1}{n}} \geq r > 1$ para n suficientemente grande, então $\sum_n z_n$ diverge.

Prova: Se $|z_n|^{\frac{1}{n}} \leq r < 1$ então

$$|z_n| \leq r^n < 1$$ mas r^n é o n-ésimo termo da soma geométrica

$$1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1-r}$$ que converge para $r < 1$, que é o caso. Assim, essa série $\sum_n z_n$ é absolutamente convergente de acordo com o teste da comparação enunciado acima. Claramente, se

$$|z_n|^{\frac{1}{n}} \geq r > 1$$ então

$|z_n| \geq r > 1$ e assim, de novo de acordo com o teste da comparação, a série nesse caso diverge.

(*) Em geral, se $\lim_{k \to \infty} z_k \neq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge.

⊛ Para séries convergentes, a série

$$\sum_k z_k = \sum_k x_k + i\sum_k y_k \quad \text{converge se}$$

$$\sum_k x_k \text{ e } \sum_k y_k \text{ convergem.}$$

⊛ Séries complexas <u>convergentes</u> podem ser somadas e subtraídas de forma não ambígua.

⊛ Séries complexas podem ser multiplicadas se elas forem absolutamente convergentes e o produto será uma série absol. convergente.

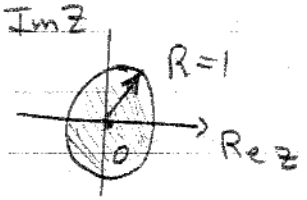
Ex: <u>Série geométrica</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots$$ a série dos módulos

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z^k|$$ converge <u>para $|z|<1$</u> pelo teste da razão pois nesse caso $\lim_{k\gg 1} \left|\frac{z^{k+1}}{z^k}\right| = \lim_{k\gg 1} |z| < 1$ (por hipótese). Claramente, pelo mesmo teste vemos que se $|z|>1$ a série diverge. Para $|z|=1$ o teste da razão <u>não é decisivo</u>, mas pelo teste da

n-ésimo termo vemos que a série diverge.

A série geométrica converge absolutamente em todos os pontos dentro de um círculo de raio $R=1$, chamado de círculo de convergência.



Prove que:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$ tem raio de convergência infinito.

Sequências de funções

A sequência $\{f_n(z)\}$ de funções definidas em uma região Ω (onde $z \in \Omega$) converge para uma função limite $f(z)$ em Ω se

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega.$$

Ex: As somas parciais da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$ formam uma

sequência de polinômios

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$$ e essa sequência

converge para $f(z) = \frac{1}{1-z}$ para $|z|<1$

já que

$$f_n(z) = 1 + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1}{1-z} - \sum_{k=n+1}^{\infty} z^k$$

$$= \frac{1}{1-z} - z^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$= \frac{1}{1-z} - \underbrace{\frac{z^{n+1}}{1-z}}_{\substack{\text{anula-se} \\ \text{quando } n \to \infty}} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}}{1-z} = 0$$

<u>se $|z| < 1$</u>.

Assim, dizemos que $f(z) = \frac{1}{1-z}$ é a soma desta série $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ quando $|z| < 1$.

Convergência uniforme de uma sequência de funções

A sequência $\{f_n(z)\}$ <u>converge uniformemente</u> para $f(z)$ em uma região Ω se

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ (pequeno)} \quad \text{é}$$

satisfeita para $n > N$ (N inteiro positivo) e $\forall z \in \Omega$.

Ex: A sequência das somas parciais da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{é convergente para } |z|<1$$

mas não é uniformemente convergente pois a convergência se torna cada vez pior quando $|z| \to 1$ (precisamos de mais e mais termos na série para alcançar uma dada precisão ε).

Teste M de Weierstrass

"A série $\sum_n f_n(z)$ de funções é uniformemente convergente em uma região Ω se $\exists\, M_n > 0$ (constantes) tais que

$$|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in \Omega \text{ e a série}$$

$\sum_n M_n$ for convergente."

⊕ Prove esse resultado usando o teste da comparação.

Teorema de Weierstrass

"Se os termos da série $\sum_n f_n(z)$ são analíticos no interior de uma curva C simples e fechada e sobre ela, e a série converge uniformemente sobre C, então sua soma

é uma função analítica (sobre e dentro de C) e a série pode ser diferenciada ou integrada um número arbitrário de vezes.

Truques com séries

Ex: Ache a expressão fechada que soma a série

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

Módulos: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|x|^n$ note que, pelo teste da razão

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)|x|^{n+1}}{n+1\ |x|^n} = |x| \quad \text{se } |x| < 1 \text{ então}$$

essa série converge absolutamente, nesse caso.

Assim, vamos integrar cada termo

$$\int_0^x dx'\, S(x') = x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x} \qquad |x|<1$$

então

$$S(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad //$$

Ex: $f(\theta) = 1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + \cdots$

$a, \theta \in \mathbb{R}$

Note que

$$f(\theta) = \mathrm{Re}\left(1 + ae^{i\theta} + a^2 e^{2i\theta} + \dots\right)$$

Série geométrica! Assim se $|a| < 1$

$$f(\theta) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1 - ae^{i\theta}}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1 - a\cos\theta - ia\,\mathrm{sen}\,\theta}\right\} = \frac{1 - a\cos\theta}{(1 - a\cos\theta)^2 + a^2\,\mathrm{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{1 - a\cos\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} \quad //$$

Ex: $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$

Define $f(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \dots$

Então, $f(1) = S$ Assim

$$f'(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots = xe^x$$

$$f(x) = \int_0^x dx'\, x' e^{x'} = xe^x - e^x + 1 \quad \text{assim}$$

$$f(1) = 1 \quad //$$

Ex: $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!}$, $m, n \in$ inteiros positivos

Defina $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!\, x^n}{n!(m-n)!}$ e $f(1) = S$

Mas, $f(x) = (1+x)^m$ então

$$S = f(1) = 2^m \quad //$$

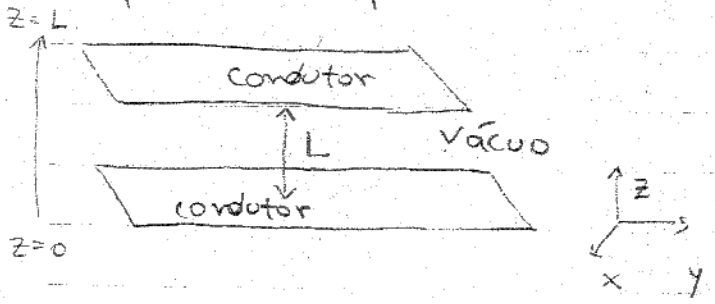
Séries divergentes

Ok, imagine que tenhamos algo do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Essa série obviamente diverge. Em geral, nós acreditamos que não existem infinitos na natureza (apenas números muito grandes como a quantidade de moléculas no seu corpo e etc).

Então, será que poderíamos encontrar expressões desse tipo em física? Caso isso aconteça como podemos lidar com essas quantidades de modo que o resultado faça sentido?

Ex: Efeito Casimir

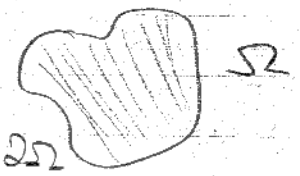
Duas placas paralelas infinitas e condutoras (descarregado) separadas por uma distância L (eletrostática)



Teorema da unicidade

"A solução da equação (se existir) de Laplace ($\nabla^2\varphi = 0$) em um volume Ω é unicamente determinada se o potencial φ é especificado na fronteira do volume $\partial\Omega$."

Prova: Considere



uma certa região em $\mathbb{R}^3$ e $\partial\Omega$ sua fronteira

Suponha que existam duas soluções distintas φ_1 e φ_2 que obedecem Laplace e as condições de contorno em $\partial\Omega$.

Então, a diferença $\varphi_3 \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ é tal que

$\nabla^2\varphi_3 = 0$ e $\varphi_3(\partial\Omega) = 0$. Mas a equação de Laplace não permite máximos ou mínimos locais (todos os extremos estão necessariamente na fronteira). Assim, o máximo e o mínimo

de φ_3 são zero. Assim, $\varphi_3 = 0$ em Ω e assim $\varphi_1 = \varphi_2$ q.e.d.

Agora, usando esse teorema aqui no nosso caso... Sabemos que, em eletrostática $\vec{E}_{\parallel}$ ao condutor é zero ($\vec{E}_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$).

Aqui, o potencial obedece $\nabla^2\varphi = 0$. Nos condutores, $\varphi = \underline{\underline{cte}}$. Solução $\varphi = cte$ em todo espaço — de acordo com teorema, essa solução é única! Então, $\vec{E} = 0$ em todo o espaço.

Entretanto, se você fizer esse aparato experimental, você medirá que existe uma pequena atração entre as placas!!

Este é o efeito Casimir!

(*) Puro fenômeno quântico — ocorre porque o campo eletromagnético consiste de fótons — ele é um campo quantizado!.

(*) A presença dessa condição de contorno ($\vec{E} = 0$ nas placas) afeta o vácuo — flutuações do campo eletromagnético vão ser ondas estacionárias entre as placas.

⊛ A energia (por densidade de área) entre as placas envolverá uma expressão do tipo

$$\frac{E}{Area} = \frac{\alpha \hbar c}{L^3} \qquad \alpha \to \text{número}$$

⊛ Análise dimensional: Como descrevemos unidade de energia?

Energia · segundo = momento angular

$$[E] \cdot \frac{[\text{comprimento}]}{\underset{\text{vel. da luz}}{c}} = [\underbrace{\text{momento angular}}_{\hbar}]$$

$$[E] = \frac{\hbar c}{[\text{comprimento}]} \quad \text{então}$$

$$\frac{E}{Area} \to \frac{\text{energia}}{\text{comprimento}^2} \to \frac{\hbar c}{L^3}$$ já que L é a única escala do problema.

Então, só precisamos saber quanto vale α? É positivo ou negativo?

⊛ α vem de algo assim $\sum_{n=1}^{\infty} n \sim \alpha$. Mas isso é divergente! Como pode ser?

Regularização

Considere: $S(\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\gamma n}$ onde $\gamma \geq 0$

$\lim_{\gamma \to 0} S(\gamma) \to$ dá a nossa série divergente.

Note que

$$S(\gamma) = -\frac{d}{d\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma n} = -\frac{d}{d\gamma}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\gamma})^n + 1 - 1\right]$$

$$= -\frac{d}{d\gamma}\left[\frac{1}{1-e^{-\gamma}} - 1\right] = \frac{e^{-\gamma}}{(1-e^{-\gamma})^2} \quad e$$

agora expandimos $S(\gamma)$ ao redor de $\gamma \to 0$.

$$S(\gamma) = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{12} + O(\gamma^2)$$

Claramente, quando $\gamma \to 0$, $S(\gamma)$ diverge como $\frac{1}{\gamma^2}$. Porém, nós podemos jogar "fora" essa parte divergente e definir a soma regularizada

$$\tilde{S}(\gamma) \equiv S(\gamma) - \frac{1}{\gamma^2} \quad \text{e} \quad \lim_{\gamma \to 0} \tilde{S}(\gamma) = -\frac{1}{12}$$

Assim, neste sentido dizemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12} \quad //$$

E, de fato, $\alpha < 0$ e a $\frac{\text{Energia}}{\text{Área}} \sim -\# \frac{\hbar c}{a^3}$ e a força/área

$$\frac{F}{\text{Area}} = - \# \frac{\hbar c}{a^4} \longrightarrow \underline{\text{As placas se atraem!}}$$

⊛ $\hbar \simeq 6{,}63 \times 10^{-34} \frac{m^2 kg}{s}$ → muito pequena!

⊛ Note que se $\hbar \to 0$, a força entre as placas some! Essa atração é um efeito puramente quântico nesse caso.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$ aparece também no cálculo da dimensão crítica em teorias de supercordas (é por isso que elas vivem em um espaço tempo de 10 dimensões)

Aula 5 10/8/11

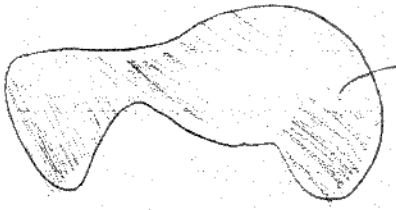
Ex: Prove o <u>Princípio de Reflexão de Schwartz</u>

"Se uma função $f(z)$ é analítica sobre uma região que inclui o eixo real e $f(z)$ é real se z é real, então

$$f^*(z) = f(z^*)$$ "

* Dica: Expanda $f(z)$ em Taylor em torno de um $x_0 \in \mathbb{R}$.

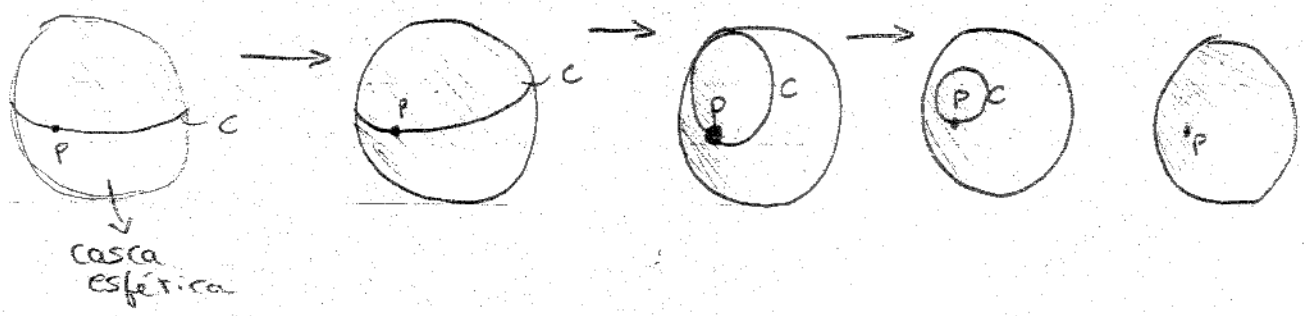
Revisão sobre domínios conexos e etc



Ω é conexo pois quaisquer dois pontos em Ω podem ser conectados por uma curva que reside somente em Ω.

Também é simplesmente conexo pois qualquer curva fechada simples pode ser reduzida a um ponto de forma contínua dentro de Ω.

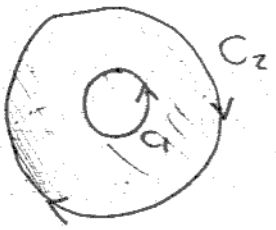
Ex: Superfície da esfera é simplesmente conexa!



Ex: Uma rosquinha (toro)

é conexo mas não simplesmente conexo.

Ex: Região anular de um disco



→ Conexo mas não simplesmente conexo

Prove:

Se o espaço tem "buraco", não pode ser simplesmente conexo.

Ex: Espaço não conexo

→ O espaço composto pela união dessas regiões não é conexo.

Continuação analítica

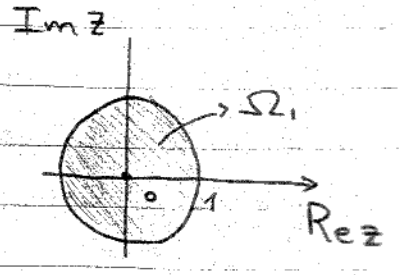
Princípio: "Seja Ω um domínio conexo. Se duas funções analíticas $f(z)$ e $g(z)$ coincidem em uma vizinhança de um ponto $z_0 \in \Omega$, então f e g são idênticas em Ω."

Ex: Considere as séries

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$g(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} i^n (z - i - 1)^n$$

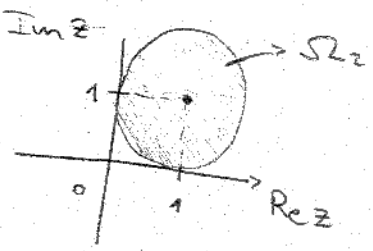
A série $f(z)$ converge quando $|z| < 1$, ou seja dentro de um círculo de raio 1 na origem (chamado aqui Ω_1)



Por outro lado, a série $g(z)$ converge quando

$$|z - 1 - i| < 1 \quad \text{ou seja}$$

Dentro de um círculo de raio 1 centrado em $z = 1+i$ (chamaremos a região interna do círculo aqui de Ω_2).



(fazer com giz ≠ branco)

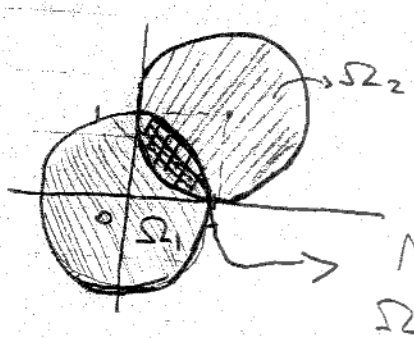
Entretanto, já que a série $f(z)$ converge em Ω_1, nessa região podemos fazer

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$$
$$= \frac{1}{1-z}$$

Analogamente, na região Ω_2 podemos fazer

$$g(z) = i\left(1 + i(z-1-i) + \dots\right)$$
$$= i\,\frac{1}{1-i(z-1-i)} = \frac{1}{1-z}$$

Vamos desenhar Ω_1 e Ω_2 juntos...



Nessa região de interseção de Ω_1 e Ω_2 $\supset \Omega_3 \equiv \Omega_1 \cap \Omega_2$ vemos que (já que ambas convergem aí)

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad g(z) = \frac{1}{1-z} \Rightarrow f(z) = g(z) \text{ em } \Omega_1 \cap \Omega_2$$

Dizemos que $g(z)$ é a continuação analítica da série $f(z)$ do Ω_1 para o Ω_2 e vice-versa. Ao mesmo tempo, a função

$$h(z) = \frac{1}{1-z}$$

é a continuação analítica, para todo o espaço, das funções $f(z)$ e $g(z)$.

⊛ Neste exemplo, as duas séries podem ser somadas para se obter uma expressão fechada $h(z) = \frac{1}{1-z}$. Em geral, as somas nessas séries não precisam necessariamente ser expressa em termos de funções conhecidas. Mesmo quando isso não é possível, o procedimento de continuação analítica sempre pode ser feito a partir de uma série que converge em um pequeno domínio e daí construímos uma função que é bem definida em todo o espaço, exceto em pontos singulares, tais como pólos e cortes. Emenda-se os discos de convergência um a um.

Série de Laurent

Vimos que uma função analítica possui uma representação em termos de uma série de Taylor na região onde essa $f(z)$ é analítica e a série converge.

Ex: A função $h(z) \equiv \frac{1}{1-z}$ é analítica $\forall z \in \mathbb{C}$ excluindo $z=1$.

Dentro do disco $|z|<1$, $h(z)$ pode ser representada pela série geométrica

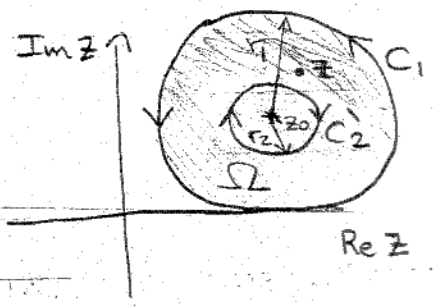
$$h(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{se } |z|<1$$

(raio de convergência da série)

Para $|z|>1$, essa série não converge e assim, ela não constitui uma representação da função $h(z)$.

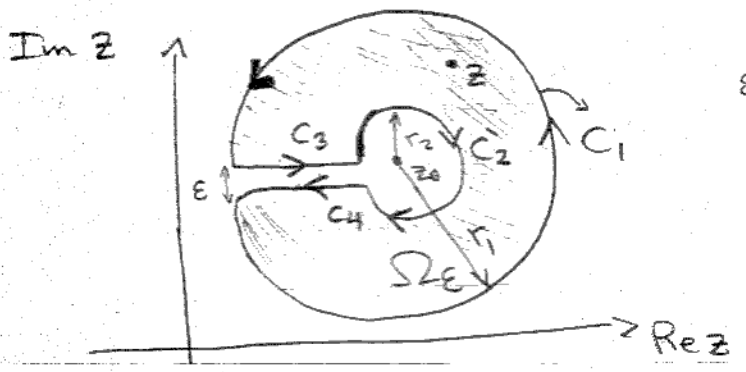
Considere agora uma função $f(z)$ que possua uma singularidade em $z_0 \in \mathbb{C}$ mas seja analítica dentro e sobre a região definida pelos círculos C_2 (raio r_2) e C_1 (de raio r_1).

C_2 → horário; C_1 → anti-horário



Vamos chamar essa região anular (que é conexa mas não é simplesmente conexa) de Ω.

Seja $z \in \Omega$. Note que Ω poderia ser construído via o limite



$\varepsilon \to 0$ desse contorno $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Omega_\varepsilon = \Omega$$

Note que agora podemos usar a fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')dz'}{z'-z}$$

Define $C_2 \to \bar{C}_2$ (com direção oposta)

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z'-z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z')dz'}{z'-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(z')d}{z'-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_4} \frac{f(z')dz'}{z'-z}$$

anti-horário

anti-horário

Tomando $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')dz'}{z'-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z')dz'}{z'-z}$$

Agora, note que para $z' \in C_1$

$|z'-z_0| > |z-z_0|$ e analogamente para $z' \in C_2$

$|z'-z_0| < |z-z_0|$ então, fazemos

Para C_1 (onde $\left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right| < 1$)

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(z'-z_0)} \frac{1}{\left[1 - \frac{(z-z_0)}{(z'-z_0)}\right]}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

e para C_2 (onde $\left|\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right| < 1$)

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0-(z-z_0)} = \frac{-1}{(z-z_0)}\frac{1}{\left[1-\frac{(z'-z_0)}{z-z_0}\right]}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z'-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$ Assim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^{n+1}} f(z')\,dz'$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z'-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} f(z')\,dz'$$ assume que $\oint\sum = \sum\oint$

então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

onde os coeficientes são

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z')\,(z'-z_0)^n\,dz'$$

Vamos fazer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^{n+1}} \overset{k=n+1}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-z_0)^k}$

onde $b_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z')\,(z'-z_0)^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$

$f(z)$ pode ser expressa em termos de uma única série, chamada de <u>série de Laurent</u>

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \quad \text{onde} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}$$

e C é <u>qualquer</u> caminho fechado na região <u>anular</u> que envolve z_0.

⊛ Prove que, de fato, qualquer caminho C contido na região anular envolvendo z_0 pode ser usado para o cálculo de A_n (nós vimos algo parecido na aula 3).

Ex: $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ Essa função tem dois pontos singulares $z=0$ e $z=1$.

Suponha que queiramos encontrar a série (que será de Laurent) ao redor de $z_0 = 0$

Assim, vamos tomar como contorno um círculo centrado no $z=0$ com raio $r<1$. Assim, os coeficientes são

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{z(z-1)} \cdot \frac{1}{z^{n+1}}$$

Mas como sobre C, $|z|<1$ expandimos $\frac{1}{1-z}$ numa série geométrica

$$A_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{z^{n+2}} \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Agora, nesse caso podemos fazer $\oint \sum = \sum \oint$ e assim

$$A_n = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{|z|=r} dz \; z^{k-n-2}$$

e

$z = re^{i\theta}$ sobre a curva
$dz = z\, i\, d\theta$

$$\oint_{|z|=r} dz \; z^{k-n-2} = i \int_0^{2\pi} d\theta \; (re^{i\theta})^{k-n-1}$$

$$= i\, r^{k-n-1} \int_0^{2\pi} d\theta \; e^{i(k-n-1)\theta}$$

$$= i\, r^{k-n-1} \left. \frac{e^{i(k-n-1)\theta}}{i(k-n-1)} \right|_0^{2\pi}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } k-n-1 \neq 0 \\ 2\pi i & \text{se } k-n-1 = 0 \end{cases}$$

Assim, $\oint_{|z|} dz \; z^{k-n-2} = 2\pi i \; \delta_{k,n+1}$ e

$$A_n = -\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k,n+1}$$

em outras palavras

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n < -1 \\ -1 & \text{se } n \geq -1 \end{cases}$$

e então

a série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ ao

redor de $z_0 = 0$ é

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 + \dots$$

Como poderíamos ter encontrado isso "de cabeça"?

<u>Abrindo as frações</u> !

Fazemos

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z-1}$$ Quem são d_1 e d_2?

$$(z-1)d_1 + d_2 z = 1$$

$$z(d_1+d_2) - d_1 = 1 \Rightarrow d_1 + d_2 = 0$$

$$d_1 = -1 \Rightarrow d_2 = 1$$ Assim

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

$\frac{1}{z-1}$ → expande em taylor sobre $z=0$

$-\frac{1}{z}$ → já é o termo com pólo em $z=0$ (não precisa mexer)

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{(1-z)} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 + \dots$$

//

⊛ Fica claro deste exemplo que a série de Laurent não necessariamente terá todos $A_n \neq 0$.

⊛ Um ponto z_0 é chamado de singularidade isolada de uma $f(z)$ se $f(z)$ não é analítica em z_0 mas é analítica numa vizinhança de z_0.

⊛ Uma função que é analítica em todo o plano complexo, exceto em um número finito de pólos isolados é chamada de função <u>meromórfica</u>. Ex: $\frac{1}{1-z}$

Pólos Simples

Na série de Laurent de $f(z)$ em torno de z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-z_0)^n$$

Se $A_n = 0$ para $n < -m < 0$ e $A_{-m} \neq 0$, dizemos que z_0 é um pólo de <u>ordem m</u>.

Ex: $\frac{1}{z(z-1)} \overset{\text{ao redor de } z=0}{=} -\frac{1}{z} + \dots \rightarrow$ $z=0$ é um pólo de (simples) ordem 1.

⊛ Se de fato a soma na série continua até $n \rightarrow -\infty$, então z_0 é um <u>pólo de ordem</u>

infinita, chamado de <u>singularidade essencial</u>.

Ex: $e^{\frac{1}{z}}$ em torno de $z=0$. A expansão

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \dots$$

Converge absolutamente em todos $z \in \mathbb{C}$ exceto $z=0$. Nesse caso, $z=0$ é <u>uma singularidade essencial</u>.

⊛ Singularidades essenciais são muito esquisitas... Pode-se mostrar que em <u>qualquer vizinhança</u> de uma singularidade essencial de $f(z)$, a função $f(z)$ se torna <u>arbitrariamente próxima</u> de qualquer (e portanto todo) $\underline{w \in \mathbb{C}}$. Pode-se mapear o plano complexo inteiro dentro de uma pequena vizinhança de uma singularidade essencial.

⊛ Claramente, singularidades (pólos) simples podem ser removidas. Suponha que $f(z)$ tenha pólo de ordem $\underset{\text{finito}}{\underline{m}}$ em z_0. Assim

$f(z)\,(z-z_0)^m \rightarrow$ analítica em z_0.

⊛ Singularidades essenciais claramente não podem ser removidas.

Ex: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. E $\operatorname{sen} z$?

Sen z tem singularidade essencial no infinito.

Prova: $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ quando $z \to \infty$

Definimos $t = \frac{1}{z}$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, t^{2n+1}} \longrightarrow t=0 \text{ é singularidade essencial.}$$

Como poderíamos ver isso de cabeça?

Note que $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} iy = i \operatorname{senh} y$ $\quad z = iy$, $y \in \mathbb{R}$

Mas se $y \to \infty$, $\operatorname{senh} y \to e^y \to \infty$. Assim, embora

$|\operatorname{sen} y| \leq 1$, $y \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{sen} z|$ não é em geral limitado.

Ex: A função $\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{z}\right)}$ tem um número infinito de Pólos isolados

$z = \pm \frac{1}{n}$ onde $n = 1, 2, \cdots$. Note que $z = 0$ é também um ponto singular, mas ele não é isolado pois em qualquer vizinhança de $z = 0$ podemos encontrar outros pontos singulares da função.