MECÂNICA II – 4300306

2^0semestre - 2011

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Mostre que a menor distância entre dois pontos em um plano é uma linha reta. Mostre que a menor distância entre dois pontos no espaço tridimensional, também é uma linha reta.

2. Mostre que a geodésica em uma superfície esférica é um grande círculo, isto é, um círculo cujo centro está no centro da esfera.

3. Mostre que a geodésica na superfície de um cilindro circular reto é um segmento de hélice.

4. Considere a luz passando de um meio de índice de refração n_1 para outro de índice de refração n_2. Utilize o princípio de Fermat para minimizar o tempo de percurso da luz e deduza a lei da refração (Lei de Snell): n_1 sen θ_1= n_2 sen θ_2.

5. Seja dado um sistema mecânico com um grau de liberdade cuja Lagrangeana é $L = L(q, \dot{q}, t)$.

a)Para esse sistema, enuncie de forma clara o princípio da mínima ação.

b)Mostre que, admitindo-se a validade das equações de Lagrange, concluímos que o princípio da mínima ação também é válido.

6. Considere uma massa puntiforme que se movimenta em um campo de forças com simetria esférica, representado pelo potencial V(r), desde um ponto A(r_1) até um ponto B(r_2). Não existem forças dissipativas.

a) Determine a equação diferencial da trajetória que permite à partícula ir de A para B no menor tempo possível (problema da Braquistócrona).

b) Obtenha a solução para o potencial gravitacional V(r)= $-\frac{k}{r}$.

7. Admita como conhecido experimentalmente o tempo $t_0 = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ que uma partícula leva para cair de uma distância y_0 e que para todas as outras distâncias y percorridas, os tempos sejam desconhecidos. Suponha como conhecida a Lagrangeana do problema, mas ao invés de resolver a equação do movimento para y como função do tempo, considere a forma funcional de y como y(t)= at + bt^2. Se as constantes a e b são ajustadas de maneira que o tempo de queda de y_0, seja igual a t_0 mostre diretamente que a integral $\int_0^{t_0} L\,dt$ será um extremo para valores reais dos coeficientes somente se a = 0 e b = $\frac{g}{2}$.

8. Um anel de massa m movimentando-se no plano xy e sujeito a uma força $F = cy\hat{j}$, parte do ponto A $(-x_0,y_0)$ e vai até o ponto B (x_0,y_0) movimentando-se num fio sem atrito. A velocidade inicial é $v_0 = y_0\sqrt{\frac{c}{m}}$. Mostre que o tempo de percurso é mínimo quando a forma do fio que une A a B é uma circunferência de raio $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

9. Um disco de raio R rola sem deslizar dentro de uma parábola $y = ax^2$. Qual a equação que representa o vínculo? Expresse a condição que possibilita o disco a rolar de tal maneira que ele só tem contato com a parábola em um e somente um ponto, independente da posição.

10. Uma partícula de massa m está vinculada a se mover sob ação da gravidade sem atrito, em uma superfície $xy = z$. Qual é a trajetória da partícula se ela inicia seu movimento a partir do repouso em $(x,y,z) = (1,-1,-1)$ com o eixo z na vertical?

11. Um aro de massa m e raio r rola sem deslizar sobre um cilindro fixo de raio R. A única força externa que atua é a da gravidade. Se o aro começar a rolar a partir do repouso do topo do cilindro fixo, determine a partir do método dos multiplicadores de Lagrange o ponto de onde o aro cai de cima do cilindro.