$z = \pm \frac{1}{n}$ onde $n = 1, 2, \dots$. Note que $z = 0$ é também um ponto singular, mas ele não é isolado pois em qualquer vizinhança de $z = 0$ podemos encontrar outros pontos singulares da função.

Aula 6 12/8/2011 (Monitoria: Ala central 202)

Na aula passada, vimos a série de Laurent e começamos a ver também como as diversas singularidades possíveis para funções complexas são classificadas.

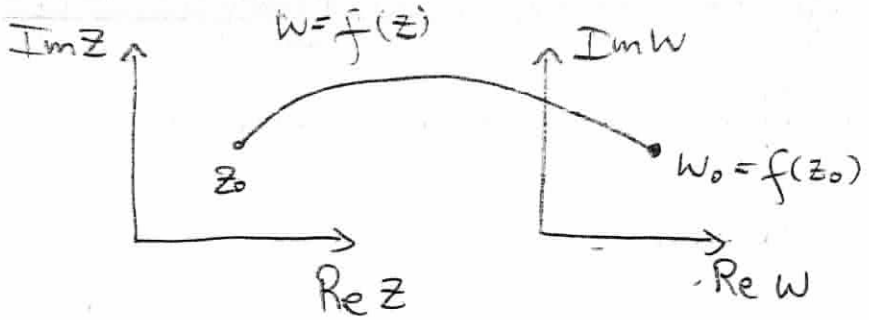
Hoje veremos um tipo interessante de singularidade:

Pontos de Ramificação e Funções Multivalentes

Até agora todas as operações (ou mapeamentos) do plano complexo nele mesmo

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z)$$

foram funções unívocas onde um elemento do plano z era mapeado em um elemento do plano $w = f(z)$



3 operações simples (e unívocas) que discutimos foram.

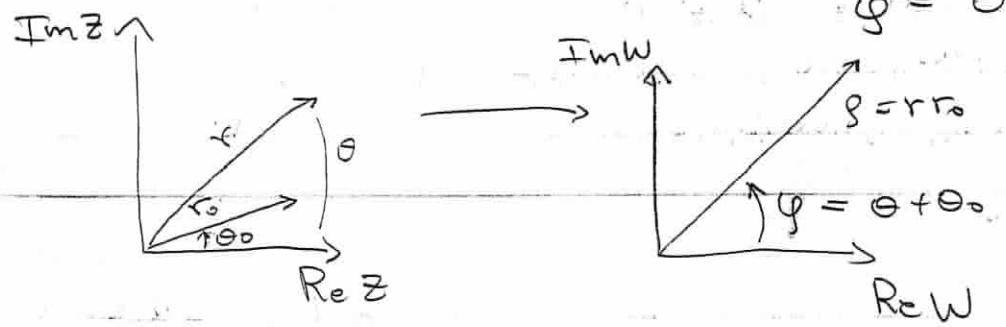
1) Translação: $w = z + z_0$

2) Rotação: $w = z z_0$ (em rep. polar)

$$w = \rho e^{i\varphi}, \quad z = r e^{i\theta}, \quad z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

Então $\rho e^{i\varphi} = r r_0 e^{i(\theta+\theta_0)} \Longrightarrow \rho = r r_0$

$\varphi = \theta + \theta_0$



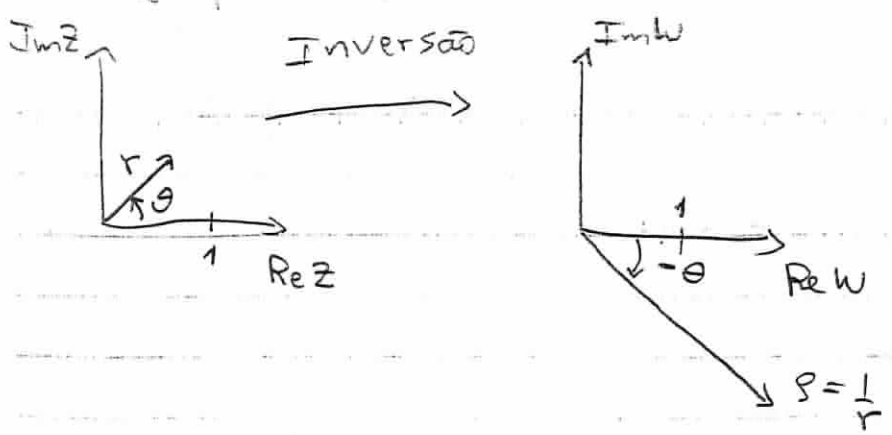
(* Não confiem muito na acurácia dos desenhos)

3) Inversão: $w = \frac{1}{z}$, forma polar fica

$w = \rho e^{i\varphi}$, $z = r e^{i\theta}$ então

$$\rho e^{i\varphi} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \Longrightarrow \rho = \frac{1}{r}, \ \varphi = -\theta$$

graficamente...



Agora, veremos o caso de uma correspondência do tipo $2 \xrightarrow[\text{para}]{} 1$.

Ex: $w = z^2$ Claramente, dois pontos distintos no plano z

z_0 e $z_0 e^{i\pi} = -z_0$ são mapeados no mesmo ponto no plano W chamado $w_0 = z_0^2$

Ok, isso é de fato muito simples... A coisa começa a complicar quando tomamos a inversa dessa função ⊛

$W = z^{\frac{1}{2}}$ fazendo $w = \rho e^{i\varphi}$
$z = r e^{i\theta}$ temos

$$\rho e^{i\varphi} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \rho = r^{\frac{1}{2}}$$
$$2\varphi = \theta$$

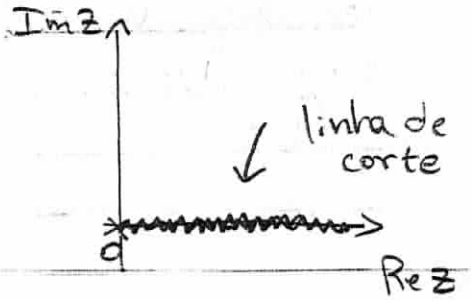
Agora, note que dois pontos distintos no plano W, a saber

$$W_1 = \rho e^{i\varphi} \quad e \quad W_2 = \rho e^{i\varphi + i\pi} = -W_1$$

Correspondem ao <u>MESMO</u> ponto no plano z (tirando é claro a origem).

Em outras palavras, θ e $\theta + 2\pi$ no plano z são mapeados em φ e $\varphi + \pi$ no plano w.

O <u>ponto fundamental</u> aqui é que ⊛ existe uma maneira simples de fazer essa função w se tornar univalente se nós concordarmos em limitar θ no plano z fazendo $0 \leq \theta < 2\pi$. Isso é feito concordando em <u>nunca</u> cruzar a linha $\theta = 0$ no plano z.



Note que $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ não é analítica em $z = 0$ e $|z| \to \infty$. Esses dois pontos são chamados <u>pontos de ramificação</u>.

Assim, a linha de corte une os pontos de ramificação.

⊛ Note que <u>QUALQUER</u> curva de $z = 0$ até o infinito serviria. O papel fundamental da linha de corte é limitar o argumento de z (lembre que $|z|$ é o módulo e θ = Argumento de $z = |z|e^{i\theta}$)

⊛ Os pontos z e $ze^{i2\pi}$ coincidem no plano

z mas produzem w e $-w$ no plano w. Assim, se não colocarmos a linha de corte, a função $z^{\frac{1}{2}}$ é AMBÍGUA! Claramente, esse problema não aparece em funções de variáveis reais.

Folhas de Riemann

Já que a função $z^{\frac{1}{2}}$ é multivalente, nós podemos "colar" duas folhas do plano z ao longo da linha de corte de forma que o argumento de z (o "ângulo") vá além de 2π ao longo da linha de corte e "desça" de 4π da folha de cima para o início da primeira folha. Dessa forma, obtemos uma forma contínua (e não ambígua) de lidar com essa função.

Exemplo de função multivalente (correspondência $\infty \to 1$)

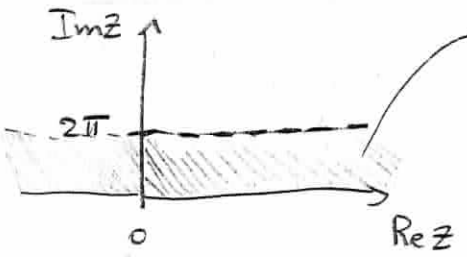
Defina $w = e^{z}$, assim $w = \rho e^{i\varphi}$ temos

$$\rho e^{i\varphi} = e^{x+iy} \Rightarrow \rho = e^{x} \text{ e } \varphi = y$$

$x, y \in \mathbb{R}$.

Se $0 \leq y < 2\pi$, então φ cobre o mesmo domínio. Mas isso cobre todo plano w!

De fato, nesse caso, uma faixa horizontal no plano z de largura 2π



é mapeada no plano W inteiro!

Além disso, qualquer ponto no plano Z da forma

$z = x + i(y + 2n\pi)$ é mapeado no mesmo
$n \in$ inteiros ponto no plano W.

Isso é uma correspondência do tipo $\infty \to 1$.

Ex: Considere agora o inverso da exp...

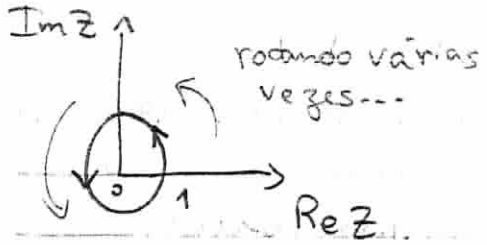
$\underline{\underline{W = \ln z}}$ Fazendo $W = u + iv$ temos

$$u + iv = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

Para um dado ponto Z no plano Z, o argumento θ é determinado módulo 2π. Isso significa que

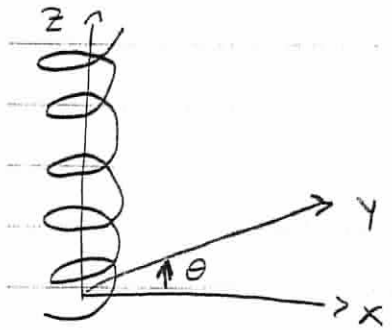
$v = \theta + 2n\pi$ .., $n \in$ inteiros, e assim temos novamente uma correspondência do tipo $\infty \to 1$.

⊛ Essa função é interessante... imagine que estejamos "caminhando" sobre o círculo de raio 1 no plano Z



No plano W, $u = \ln r = 0$ mas $v = \theta$ e θ cresce e cresce passando de 2π!

⊛ A superfície de Riemann de $\ln z$ é interessante ... ela parece um parafuso!



(no plano z)

Quando θ vai além de 2π cola-se uma nova folha de Riemann ao longo da linha de corte (definida, por exemplo, de $z=0$ para $|z| \to \infty$ ao longo de Re z)

⊛ Novamente, podemos tornar essa correspondência única limitando $0 \leq \theta < 2\pi$ usando uma linha de corte.

⊛ É por causa da natureza multivalente de $\ln z$ que

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

onde C (por exemplo) é um círculo de raio r centrado na origem.

⊛ Como você mostraria isso "de cabeça"?

⊕ Note que esse mapeamento entre o plano complexo z e W é uma generalização da idéia de função que tínhamos anteriormente ... É um mapeamento entre um conjunto e outro. Eventualmente, veremos como mapear uma função $f(x)$ no seu valor num ponto a usando a função Delta de Dirac (que é na verdade uma distribuição)

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-a)\, f(x)$$

Veremos também transformadas integrais (como a transformada de Fourier) onde uma função $f(x)$ no espaço x é mapeada numa função $F(t)$ no espaço t.

Vamos falar um pouco mais sobre pontos de ramificação ...

Considere a função

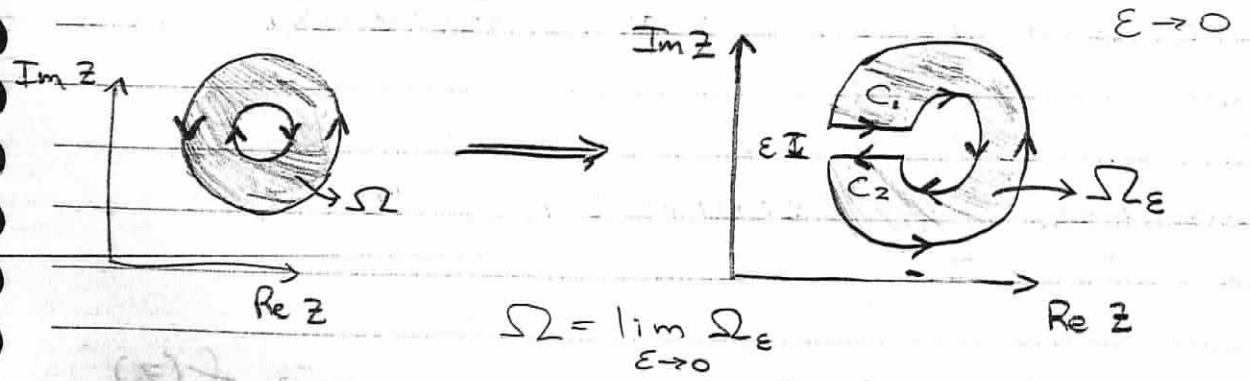
$$f(z) = z^a \quad \text{onde } a \notin \text{inteiros}$$

Quando nos "movemos" ao longo do círculo de raio $r=1$ de e^{i0} para $e^{i2\pi}$

$$f(z) \longrightarrow e^{2\pi i a} \neq e^{i0} = 1$$

Novamente, nesse caso temos um ponto de ramificação em $z=0$ e outro em $|z| \to \infty$. Claramente, essa função é multivalente. Nesse caso, a fórmula integral de Cauchy não se aplica, a menos que coloquemos a linha de corte definindo o contorno em toda a superfície de Riemann (formada pela união das folhas de Riemann). Assim, colocamos uma linha de corte de um ponto de ramificação para outro.

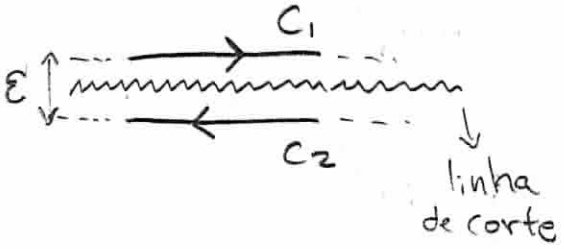
⊛ Vocês se lembram daquela nossa forma de converter uma região multiplamente conexa em uma região simplesmente conexa? ⊛



Assumimos que $f(z)$ é meromórfica em Ω (ou Ω_ε). Se de fato não há uma linha de corte que "atravessa" a região entre os caminhos C_1 e C_2,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

Se, entretanto, existe uma linha de corte naquela região (fazendo um zoom ali)



Nesse caso

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz \neq 0$$

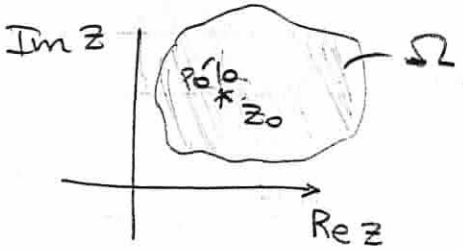
Portanto, cuidado!

⊛ Veremos exemplos mais detalhados de como lidar com integrais de funções com linhas de corte nas próximas aulas...

Agora, veremos o que talvez seja o teorema mais útil dessa parte do curso...

Teorema dos Resíduos ⊛

Imagine que tenhamos uma função $f(z)$ que possua apenas um pólo isolado (z_0) numa dada região $\Omega \in \mathbb{C}$



A série de Laurent para essa função seria

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$$

inteiro

Note que $\oint_C (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$

$\forall C$ que envolve z_0
(sentido anti-horário)
(prove esse resultado!)

Assim,

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' A_n (z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' A_n \oint_C (z-z_0)^n$$

⊛ Note que $\oint \sum' = \sum' \oint$ é garantido pois a série de Laurent converge aí.

E, usando o resultado mencionado acima

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' A_n \oint_C (z-z_0)^n = 0 \quad \text{se } n \neq -1$$

e assim somente o termo A_{-1} sobrevive

$$\oint_C f(z)\,dz = A_{-1} \oint_C (z-z_0)^{-1} dz$$

e fazendo $z = z_0 + re^{i\theta}$, $dz = z\,i\,d\theta$

por exemplo, assuma que é um círculo (sempre possível isso)

$$\oint_C f(z)\,dz = A_{-1} \int_{|z|=r} i\,d\theta = 2\pi i\, A_{-1}$$

ou

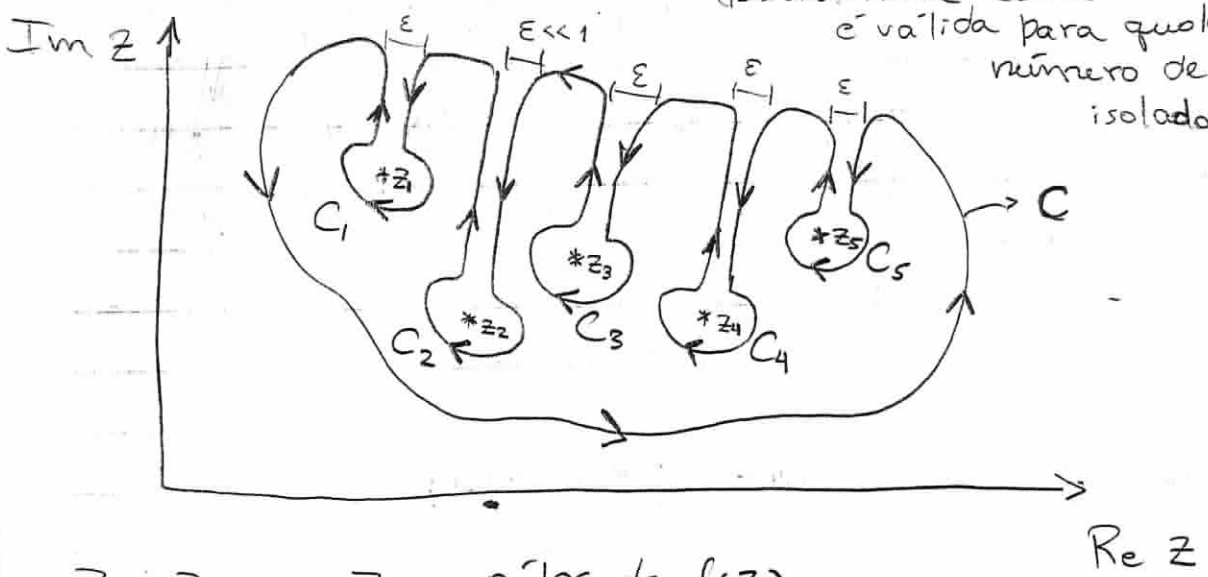
$$\boxed{A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,dz}$$

Esse coeficiente da série de Laurent é chamado de <u>Resíduo</u> de $f(z)$ em z_0.

$A_{-1}(z_0) = \text{Res}\, f(z_0)$
(notação comum)

Imagine agora que tentamos um conjunto de singularidades isoladas para $f(z)$.
(N pólos)

(obviamente essa discussão é válida para qualquer número de pólos isolados)



$z_1, z_2, \ldots, z_N \rightarrow$ pólos de $f(z)$ isolados

Tomando o limite $(\varepsilon \to 0)$ no qual os caminhos opostos se cancelam, obtemos pelo teorema integral de Cauchy

$$\oint_C f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{N} \oint_{C_k} f(z)\,dz = 0$$

(Note que os C_k estão orientados no sentido horário)

De acordo com os resultados mencionados anteriormente

$$\oint_{C_k} f(z)\,dz = -2\pi i\, A_{-1}$$

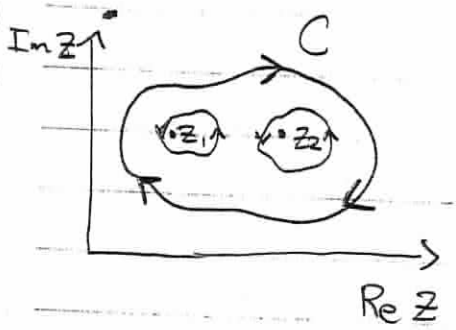
(sentido horário)

assumindo uma série de Laurent sobre a singularidade z_k

Assim, chegamos ao resultado final ⊛

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(A_{-1}(z_0) + A_{-1}(z_1) + \dots \right)$$

$$= 2\pi i \text{ (soma sobre os resíduos envolvidos pelo caminho fechado } C\text{)}.$$



Esse é o famoso teorema dos resíduos.

⊛ Com esse teorema, ao invés de calcular a integral sobre o caminho fechado (que pode ser bastante complicada às vezes), nós lidamos com esse problema algébrico de calcular os resíduos de uma função $f(z)$ nos dados pontos singulares. Isso é muito útil, como nós veremos a seguir.

— x — x — x — x — x

Aula 7 15/8/2011

— Revisão da matéria até agora... Depois disso, aula de hoje...

Vimos antes que o resíduo de uma função $f(z)$ num dado pólo z_0 é o coeficiente

A_{-1} da série de Laurent ao redor de z_0.
Na prática, podemos calcular os pólos e resíduos de uma função do seguinte modo:

1) Obter os pólos como os zeros do inverso da função $f(z)$

$$\frac{1}{f(z)} = 0$$

2) Quando o pólo $z = z_0$ tem ordem 1, então SEMPRE podemos escrever

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} g(z)$$

onde $g(z)$ é uma função analítica na vizinhança de z_0, inclusive $g(z_0) \neq 0$. Fazendo a expansão de Taylor da função $g(z)$ em torno $z = z_0$

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \dots$$ temos

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)} \left[g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \dots \right]$$

$$f(z) = \frac{g(z_0)}{(z - z_0)} + g'(z_0) + O\left[(z - z_0)^2\right]$$

→ termos de ordem $(z - z_0)^2$ e superiores

Assim, o resíduo da função $f(z)$ no pólo $z = z_0$ é $g(z_0)$, ou seja,

Para pólo de ordem 1

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)}$$

Note que, alternativamente,

$$\left.\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f(z)}\right)\right|_{z=z_0} = \left.\frac{d}{dz}\left[\frac{z-z_0}{g(z)}\right]\right|_{z=z_0} = \frac{1}{g(z_0)} - \underbrace{\cancel{\left.\frac{(z-z_0)}{g^2(z)}\frac{dg}{dz}\right|_{z=z_0}}}_{\text{Some}}$$

$$\left.\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f(z)}\right)\right|_{z=z_0} = (g(z_0))^{-1} \quad \text{então}$$

$$\operatorname{Res} f(z_0) = 1 \Big/ \left.\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f(z)}\right)\right|_{z=z_0} \quad //$$

3) Se $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ onde $Q(z)$ e $P(z)$ são analíticas em torno de z_0 e z_0 é o zero (ou raiz) de <u>ordem 1</u> da função $P(z)$, então

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{Q(z_0)}{\left(\left.\dfrac{dP}{dz}\right|_{z=z_0}\right)} \quad //$$

"<u>Prove</u> esse resultado."

4) Quando $f(z)$ possui um pólo $z = z_0$ de <u>ordem K</u>, <u>sempre</u> podemos escrever

$K \in$ inteiros positivos (finito)

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$$ onde $g(z)$ é uma função analítica em z_0.

Agora, expandimos $g(z)$ em Taylor ao redor de z_0

$$g(z) = g(z_0) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} g}{dz^{k-1}} \Big|_{z=z_0} (z-z_0)^{k-1} + \dots$$

Assim,

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \left[g(z_0) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z_0) (z-z_0)^{k-1} + \dots \right]$$

Então, o coeficiente do termo $\sim \frac{1}{(z-z_0)}$ é

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} g(z)}{dz^{k-1}} \Big|_{z=z_0}$$ ou seja

$$\boxed{\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z) \right] \Big|_{z=z_0}}$$

para pólo de ordem k

Ex: Obtenha todos os resíduos dos pólos da função

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$$

Note que e^{iz} não possui pólos a uma distância finita da origem. Para nossos propósitos, ela é uma função inteira. Analisando o denominador, vemos que os seus zeros são

$$z(z^2+1)^2 = 0 \Rightarrow z=0 \text{ e } z = \pm i$$

$z=0$ é pólo de ordem 1.

$z = \pm i$ são pólos de ordem 2. De fato

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2}\frac{1}{(z-i)^2} \quad //$$

Para o resíduo em $z=0$, claramente

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} = 1 \quad //$$

Vamos agora calcular o resíduo para $z=i$. Podemos usar a fórmula (com $k=2$)

$$\operatorname{Res} f(i) = \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right]\Big|_{z=i}$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}\right]\Bigg|_{z=i}$$

$$= \left[\frac{e^{iz}\, i}{z(z+i)^2} - \frac{e^{iz}}{z^2(z+i)^2} - 2\frac{e^{iz}}{z(z+i)^3} \right]_{z=i}$$

$$= \frac{i\, e^{-1}}{i(2i)^2} - \frac{e^{-1}}{i^2(2i)^2} - \frac{2\, e^{-1}}{i(2i)^3}$$

$$= -\frac{e^{-1}}{4} - \frac{e^{-1}}{4} - \frac{e^{-1}}{4}$$ Então

$$\text{Res } f(i) = -\frac{3}{4} e^{-1} \;//$$

Exercício: Calcule o resíduo para o pólo $z = -i$ //.

Aplicações do Teorema do Resíduo

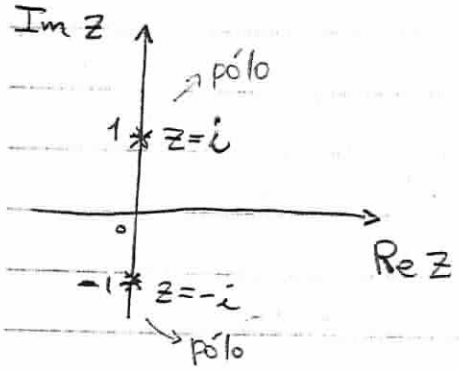
Considere a integral:

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{1}{1+x^2}$$

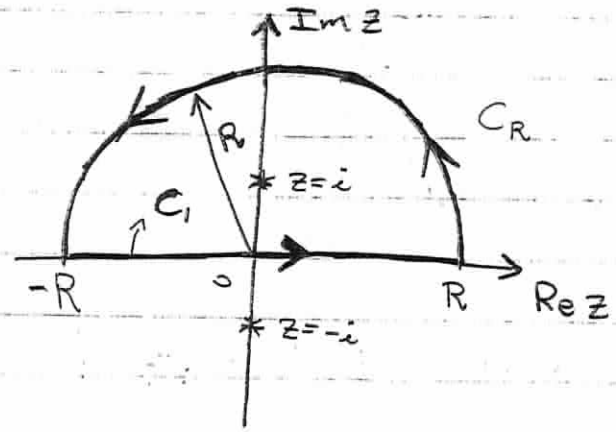
Note que podemos definir I através do limite

$$I(R) \equiv \int_{-R}^{R} dx \, \frac{1}{1+x^2} \quad \text{e} \quad I = \lim_{R\to\infty} I(R) \;//$$

• Agora, note que $\frac{1}{1+z^2}$ tem dois pólos (isolados de ordem 1).



Assim considere o seguinte contorno fechado C no plano z.



$C = C_1 \cup C_R$

e a integral

$$I(C) = \oint_C \frac{dz}{1+z^2}, \quad \text{onde} \quad C = C_R \cup \underbrace{C_1}_{\text{de } -R \text{ para } R} \quad \text{assim}$$

$$I(C) = \int_{C_1} dz \frac{1}{1+z^2} + \int_{C_R} dz \frac{1}{1+z^2}$$

$$= \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2}}_{\text{esse aqui é sobre o eixo real}} + \int_{C_R} dz \frac{1}{1+z^2} \quad \text{e então}$$

$$I(R) = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = I(C) - \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2}$$

e $I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \left[I(C) - \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} \right]$

Note que, pelo teorema dos resíduos

$$I(C) = 2\pi i \, \text{Res} f(z=i) \quad \text{onde} \quad f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

o pólo $z=i$ está sendo envolvido pelo contorno fechado C. O pólo $z=-i$ não entra nesse cálculo devido a escolha que utilizamos para o contorno fechado C.

Vamos calcular o resíduo em $z=i$? É um pólo simples de ordem 1. Então

$$\text{Res} f(z=i) = \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{\cancel{(z-i)}}{\cancel{(z-i)}(z+i)}$$

$$= \frac{1}{2i} \quad //$$

Note que poderíamos ter encontrado isso dessa forma (abrindo em <u>frações parciais</u>)

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} \Rightarrow \frac{A(z+i) + B(z-i)}{z^2+1}$$

$$A(z+i) + B(z-i) = 1 + 0.z \Rightarrow A+B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$(A-B)i = 1 \Rightarrow -2Bi = 1$$

$$B = -\frac{1}{2i}, \quad A = \frac{1}{2i} \quad \text{então}$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i(z-i)} - \frac{1}{2i(z+i)}$$

$\rightarrow$ Claramente, o resíduo em $z=i$ é $\frac{1}{2i}$ //

Assim, $I(C) = 2\pi i \operatorname{Res} f(i)$

$= 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$ // (note que isso não depende do formato do contorno que envolve $z=i$).

Vimos que

$$I = \lim_{R\to\infty}\left[I(C) - \int_{C_R}\frac{dz}{1+z^2}\right] \quad e$$

$$= \pi - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^2}$$

Agora temos que calcular essa integral ao longo de C_R. Fazendo separadamente

$\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^2}$ onde C_R é o semi-círculo de raio R.

Parametrização $\Rightarrow z = Re^{i\theta}$, $dz = i\,d\theta\, z$

$$\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^2} = \int_0^{\pi} d\theta\, i\,\frac{Re^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}$$

. Pela desigualdade triangular

$$\left|\int_0^{\pi} d\theta\,\frac{i\,Re^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}\right| \leq \int_0^{\pi} d\theta\left|\frac{i\,Re^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}\right| = \int_0^{\pi} d\theta\,\frac{R}{\left[(1+R^2\cos 2\theta)^2 + R^4\operatorname{sen}^2 2\theta\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$|1+R^2e^{2i\theta}| = |1+R^2\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta\, R^2|$$
$$= \left[(1+R^2\cos 2\theta)^2 + \operatorname{sen}^2 2\theta\, R^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \frac{R}{\left[1+R^4+2R^2\cos 2\theta\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{R}\int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{\left[\frac{2\cos 2\theta}{R^2}+\frac{1}{R^4}+1\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{\left[1+\frac{1}{R^4}+\frac{2}{R^2}\cos 2\theta\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \cdot 2\pi = 0 \,//$$ Assim

$$\left| \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} \right| = 0$$ e dessa forma $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} = 0$

e

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = \pi \,//$$

Como vocês fariam isso "de cabeça"?

$$\int dx \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)$$ e $\lim_{x\to\pm\infty} \tan^{-1}(x) = \pm\frac{\pi}{2}$

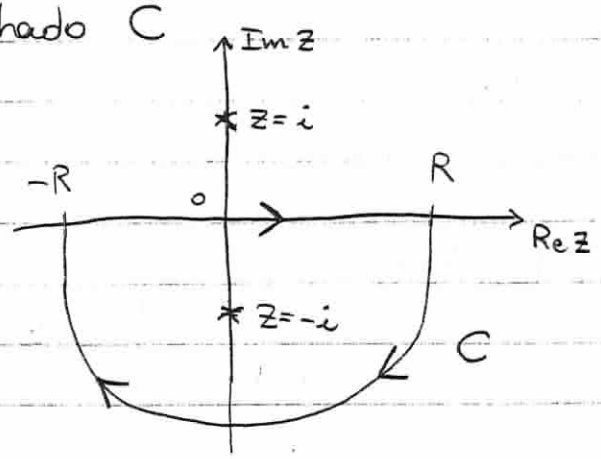
e assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \,//$$

⊕ Claramente, nesse caso poderíamos ter feito essa integral desse jeito, diretamente.

Em geral, não sabemos fazer a integral diretamente e, nesse caso, o teorema dos resíduos se torna muito útil.

Prove que encontraríamos o mesmo resultado para a integral I se tivéssemos escolhido o caminho fechado C



que envolve o pólo $z = -i$.

(tome cuidado com os sinais e a direção das integrais).

Método geral de como usar o método dos resíduos para calcular uma integral definida

Considere a integral real

$$I(a,b) = \int_a^b dx\, f(x)$$

e suponhamos que sabemos todos os pólos e resíduos da função $f(z)$. O primeiro passo é introduzir um contorno fechado C no plano complexo z, de forma que o trecho em cima do eixo real contém o segmento $[a,b]$ e assim temos a integral

$$I(C) = \oint_C f(z)\,dz$$

Já que sabemos todos os pólos e resíduos da função dentro do contorno fechado C, temos que

$$I(C) = \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res} f(z_k)$$

Por construção, a integral complexa $I(C)$ pode ser decomposta em duas partes

$$I(C) = I(a,b) + I(C') \quad \text{onde}$$

$$I(C') = \int_{C'} f(z)\,dz$$

é a integral ao longo de C', que é o caminho que sobrou de C depois de retirarmos $[a,b]$.

⊛ A idéia básica é escolher o contorno C' de tal forma que a integral $I(C')$ se torne nula ou se reduza a uma integral já conhecida. Em geral, note que a curva C' pode ser composta de mais de um trecho.

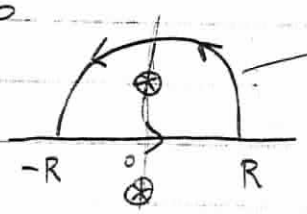
Ex: O intervalo $(-\infty, \infty)$

Para calcular integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)$$ podemos utilizar o método mostrado acima. Claramente, esse método só é útil quando a integral sobre C' se torna zero, ou algum valor finito que pode ser obtido de outra forma. Vamos considerar o exemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}$$ onde a e k são reais positivos.

Nesse caso, podemos escolher o contorno do tipo



onde C' é o semi-círculo no plano superior.

Os pólos de $f(z)$ ficam em $z = \pm ia$. Temos

$$\oint_C \frac{e^{izk}}{z^2+a^2} = \int_{-R}^{R} dx\, \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2} + \int_{C'} \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\, dz$$

Pelo teorema do resíduo (em $z = ia$)

$$\oint_C \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(ia)$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to ia} \left[\frac{(z-ia)\, e^{ikz}}{(z-ia)(z+ia)} \right]$$

$$= \frac{2\pi i\, e^{-ak}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ak} \quad //$$

Por outro lado, a integral sobre o semi-círculo C'

$$\int_{C'} \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\,dz = iR\int_0^{\pi} d\theta\, \frac{e^{ikR(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}}{R^2e^{2i\theta}+a^2}$$

$z = Re^{i\theta}$

$dz = i\,d\theta\, z$

$$= iR\int_0^{\pi} d\theta\, \frac{e^{ikR\cos\theta}}{a^2+R^2e^{2i\theta}}\, e^{-kR\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

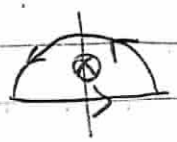
Novamente, pela desigualdade triangular

$$\lim_{R\to\infty}\left| iR\int_0^{\pi} d\theta\, \frac{e^{ikR\cos\theta}}{a^2+R^2e^{2i\theta}}\, e^{-kR\,\mathrm{sen}\,\theta}\right| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi} d\theta\, \frac{e^{-kR\,\mathrm{sen}\,\theta}}{\left|e^{2i\theta}+\frac{a^2}{R^2}\right|}$$

Note que $kR\,\mathrm{sen}\,\theta \geq 0$ quando $\theta \in [0,\pi]$ e assim

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi} d\theta\, \frac{e^{-kR\,\mathrm{sen}\,\theta}}{\left|\frac{a^2}{R^2}+e^{2i\theta}\right|} = 0 \quad \text{e}$$

$\left|\int_{C'} f(z)\,dz\right| = 0.$ Vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}e^{-ak} \qquad a,k>0.$$

⊕ O fato de que $k>0$ determinou a escolha pelo contorno dado sobre o semi-círculo