Física I para Oceanografia
FEP111 (4300111)

2º Semestre de 2011

Instituto de Física- Universidade de São Paulo

Aula – 2 Vetores e Movimento Tridimensionais

Professor: Valdir Guimarães

E-mail: valdir.guimaraes@usp.br
Fone: 3091.7104

Alguns exercícios

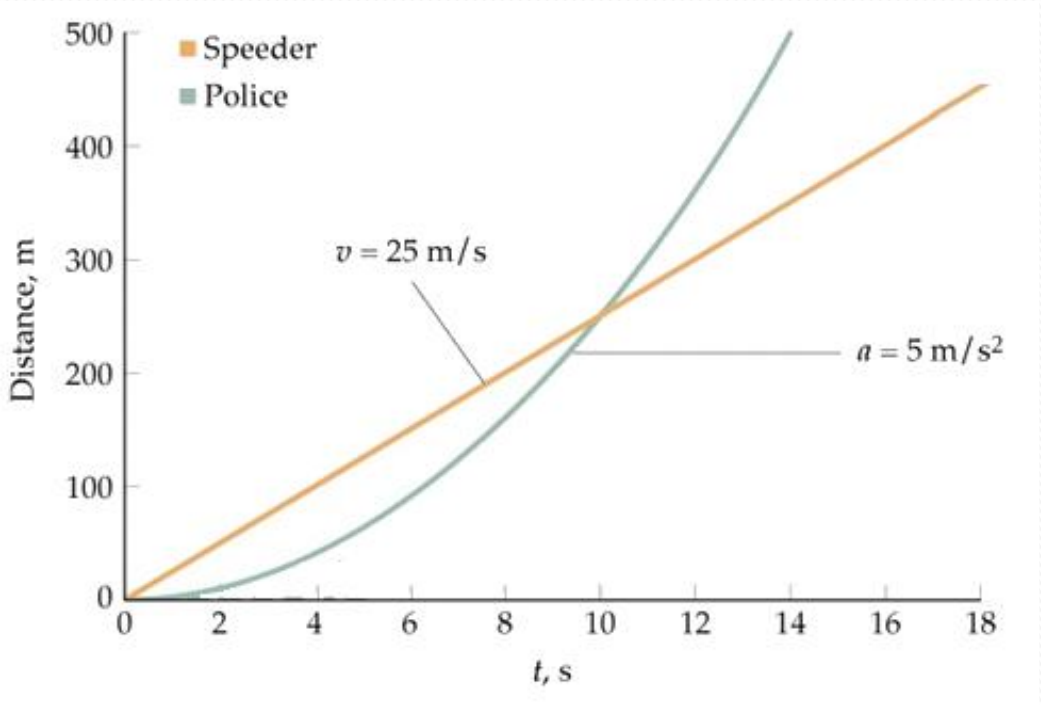
4) Um carro corre com velocidade de 90 km/h em uma zona escolar. Um carro de polícia parte do repouso quando o corredor passa por ele e acelera à taxa de 5,0 m/s². (a) quando a polícia alcançará o carro? (b) qual será a velocidade da polícia ao alcançá-lo?

Carro ➔
(v_c=90km/h=25m/s)

$$x_c = v_c t = 25t$$

Polícia ➔

$$x_p = \frac{a_p}{2} t^2 = \frac{5}{2} t^2$$



Necessitamos encontrar o valor de t que torna x_c=x_p

$$x_c = 25t = \frac{5}{2} t^2 = x_p$$

$$t = 10s$$

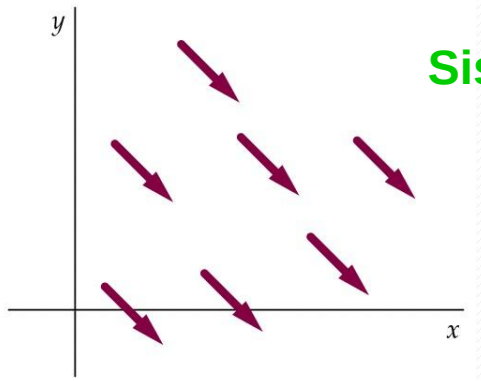
$$v_p = 5t = 50m/s$$

Vetores

Vetores não são localizados no espaço

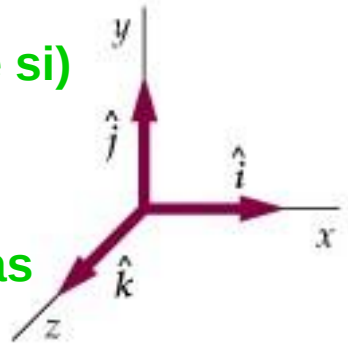
Precisamos de um referencial

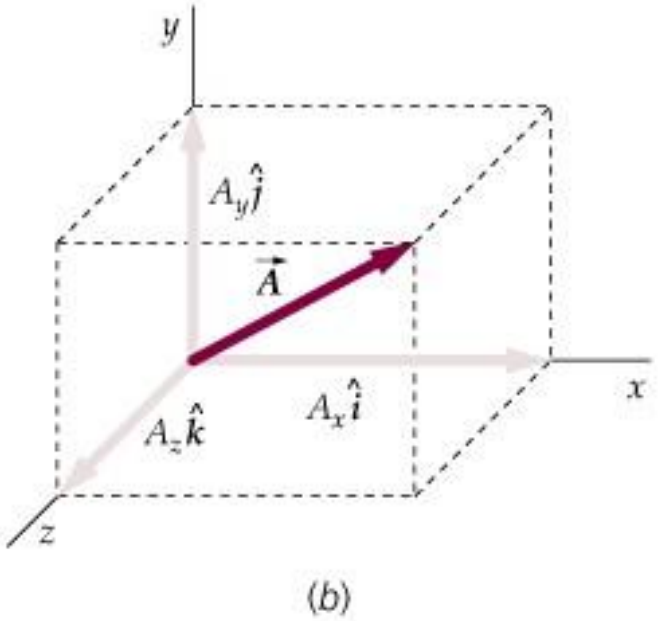
(3 eixos ortogonais entre si)



Sistema de coordenadas cartesianas

$(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$





Em 3D, muitas grandezas físicas são representadas através de vetores.

Apresentam “módulo”, “direção” e “sentido”.

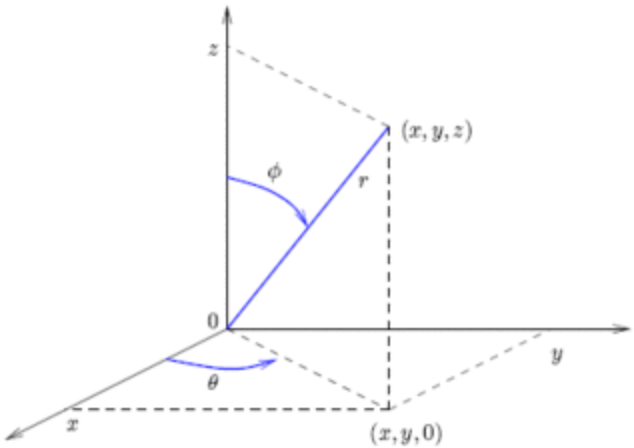
Sistema de coordenadas geográficas

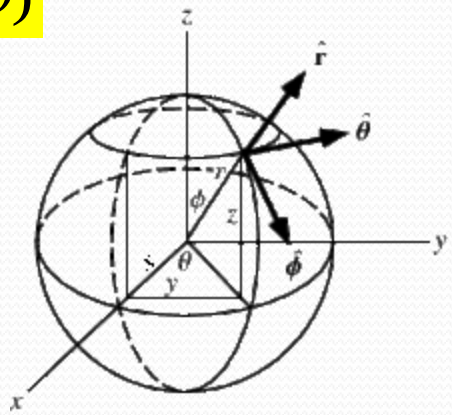
Latitude e longitude

22° 54' 21.64"S 47° 03' 38.06"W

Sistema de coordenadas esféricas

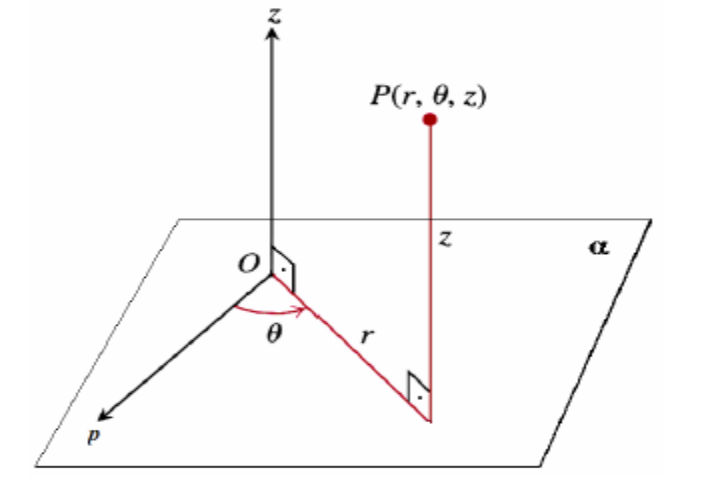
$$(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$$



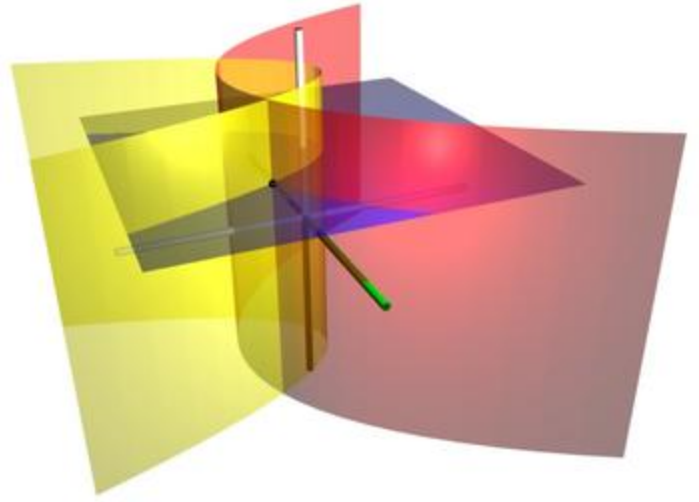


Sistema de coordenadas cilindricas

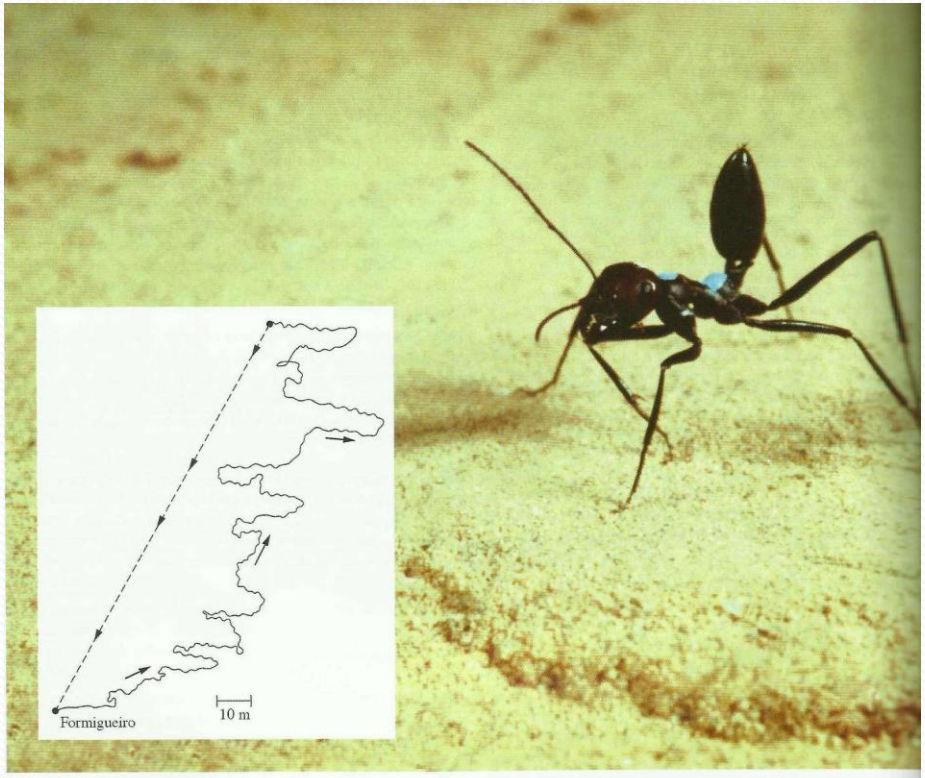
$$(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$$



Sistema de coordenadas cilindricas parabólicas



Vetores e Movimento Tridimensional

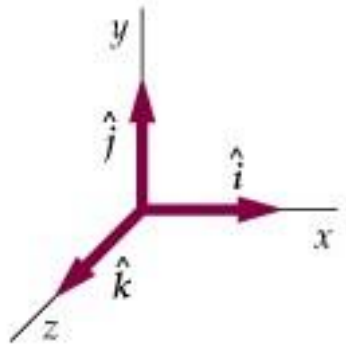


Cortesia de Rudiger Wehner, Zoologisches Institut der Universita

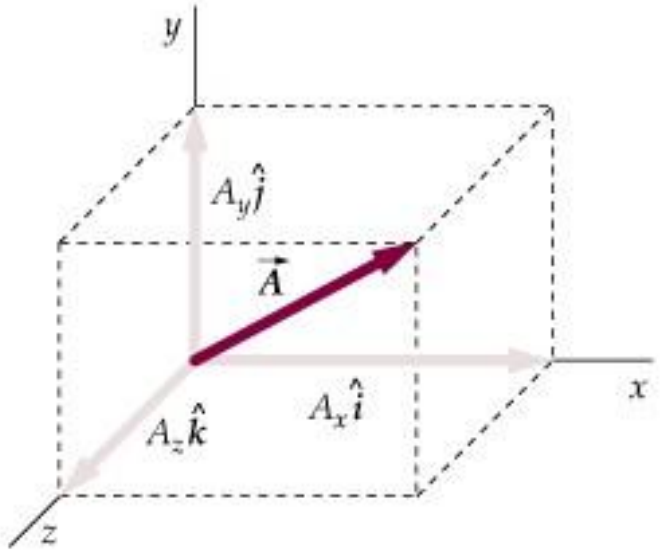
A formiga do deserto Cataglyphis fortis *vive nas planícies do deserto do Saara. Quando uma dessas formigas sai à procura de alimento percorre um caminho aleatório, como mostra a figura. A formiga pode viajar mais de 500 m em uma superfície arenosa, sem qualquer ponto de referência. Mesmo assim, na hora de voltar ao formigueiro ela ruma*

Como uma formiga consegue encontrar o caminho de casa se não há pontos de referência no deserto?

Vetores



(a)

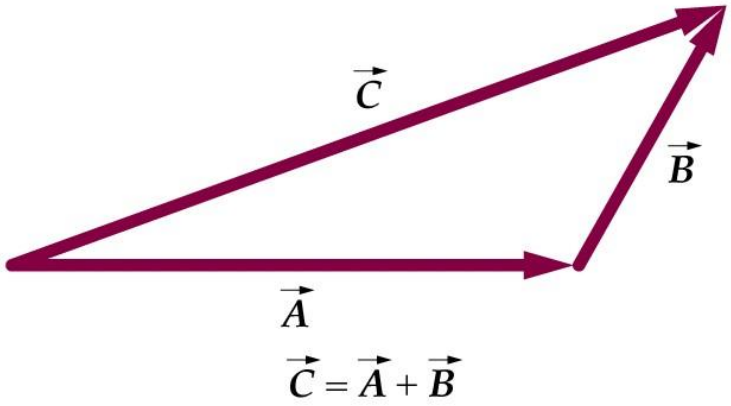


(b)

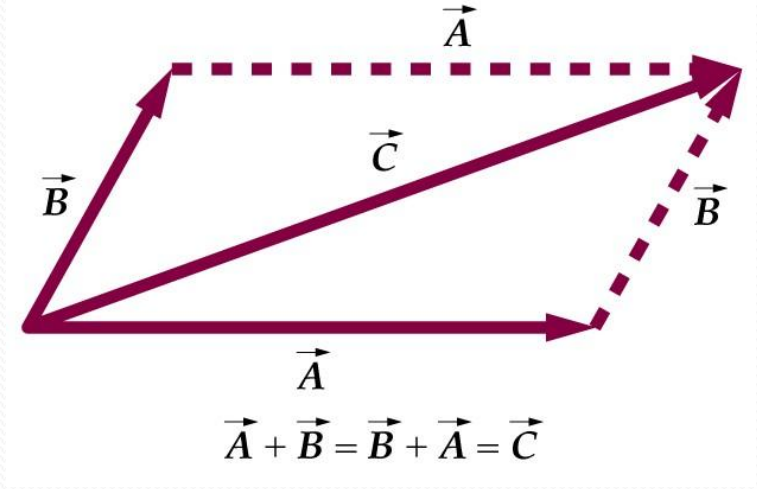
$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

Soma e subtração de vetores

Revisão sobre vetores (soma)



Regra do paralelogramo



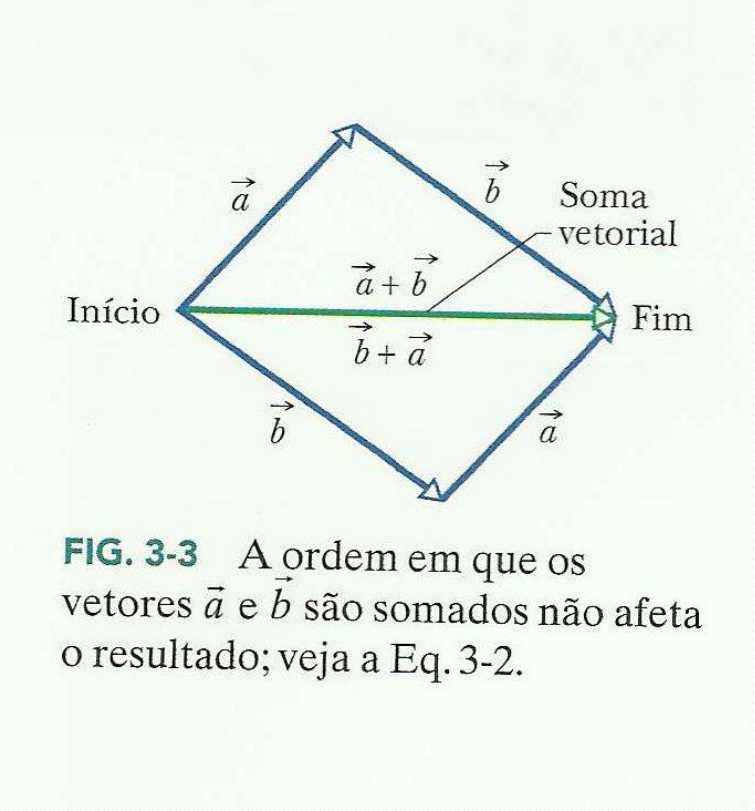
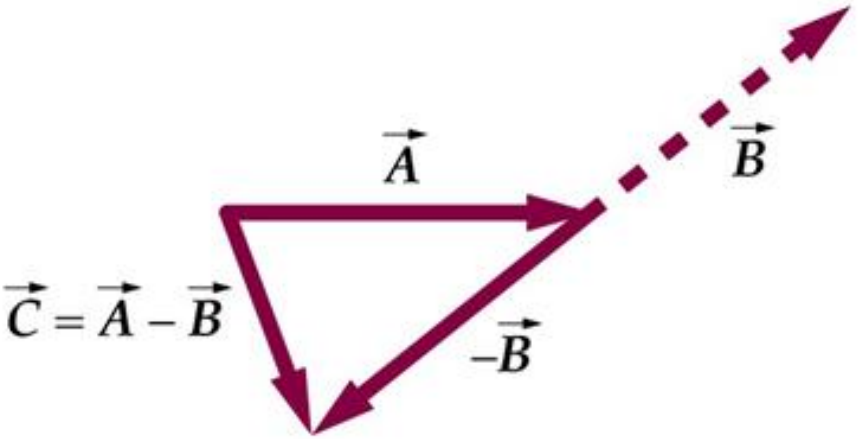
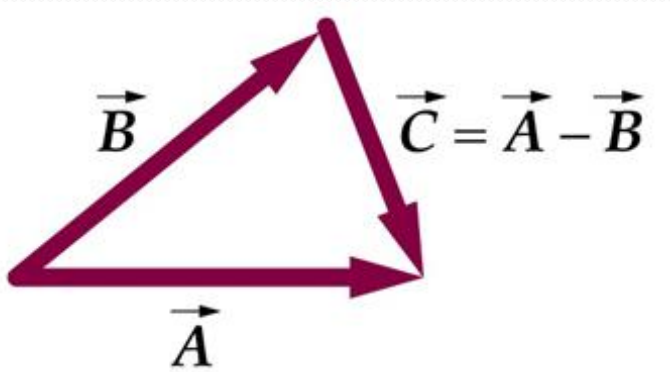


FIG. 3-3 A ordem em que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são somados não afeta o resultado; veja a Eq. 3-2.

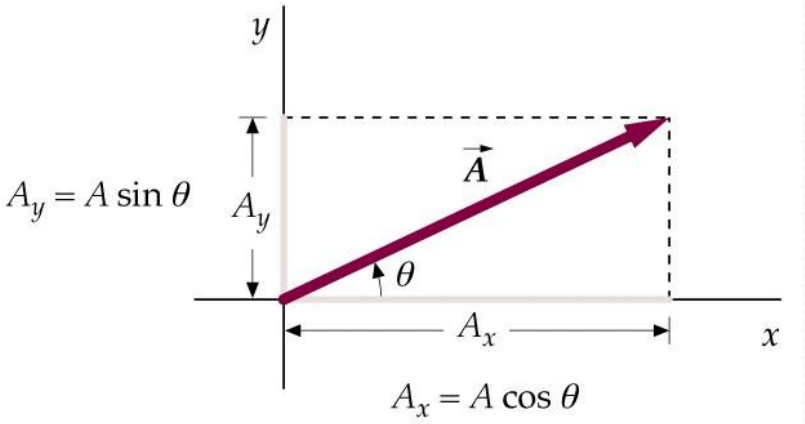
Decomposição de vetores em coordenadas

Revisão sobre vetores (subtração)

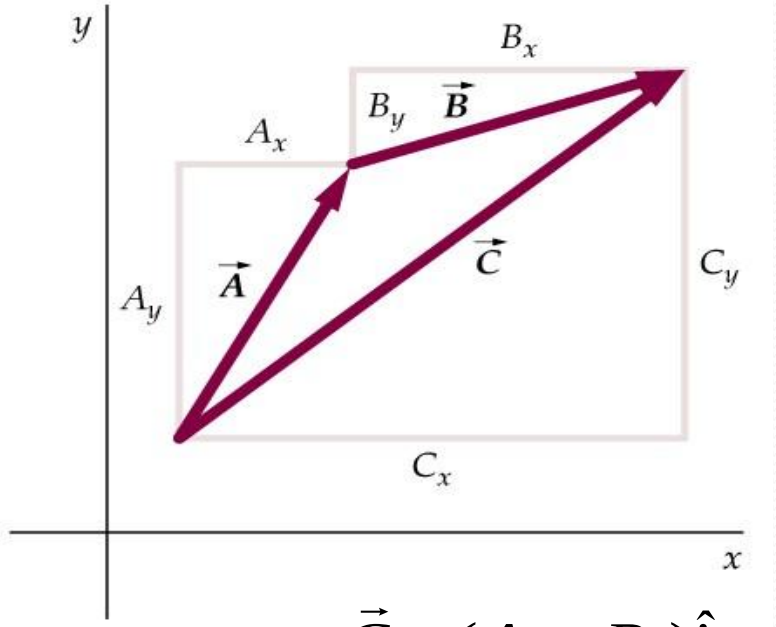




Decomposição vetorial em coordenadas



Soma de vetores pelas coordenadas



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

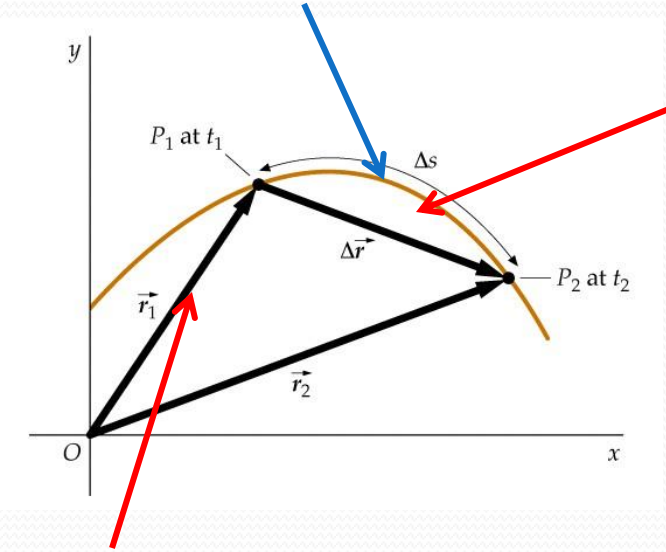
$$\vec{C} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$$

Módulo do vetor $$C = \sqrt{C_x^{\,2} + C_y^{\,2} + C_z^{\,2}}$$

Deslocamento

trajetória



Vetor Posição

$$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k} = x\hat{i} + y\hat{j} + x\hat{k}$$

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

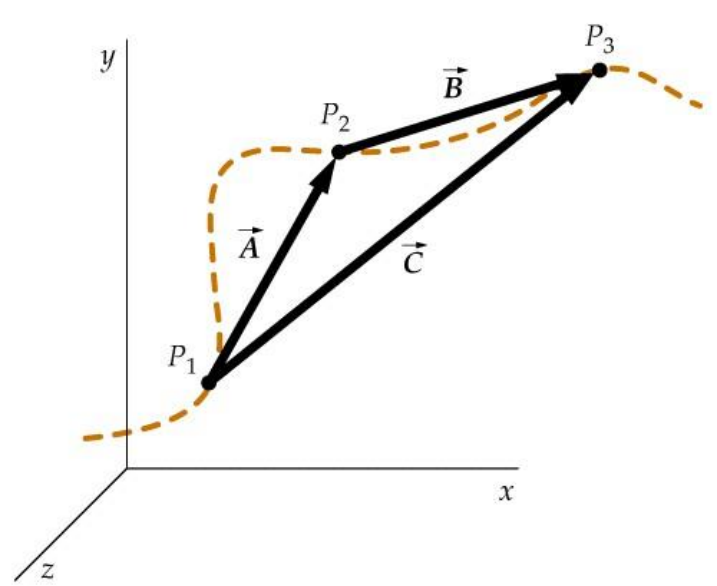
$$\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

Deslocamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$$



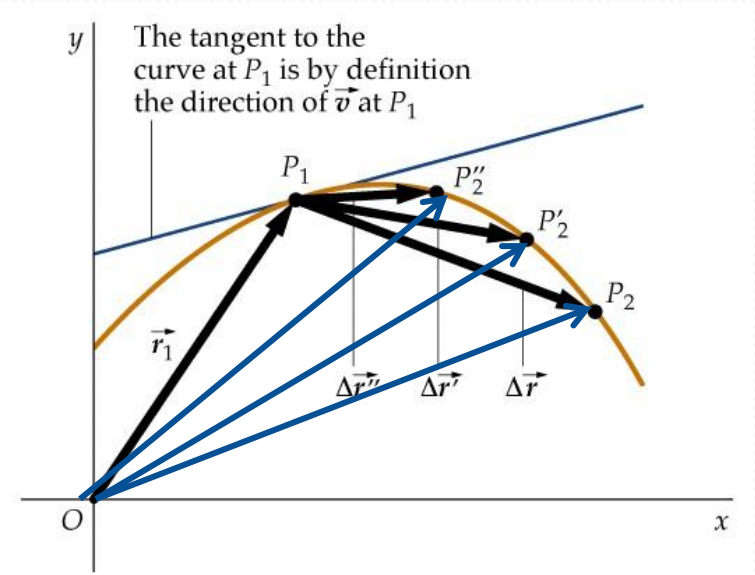
Módulo do deslocamento

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

velocidade e aceleração

Velocidade média

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad \Delta \vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$$



Velocidade instantânea

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{dx\hat{i}}{dt} + \frac{dy\hat{j}}{dt} + \frac{dz\hat{k}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

Módulo da Velocidade

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Aceleração instantânea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Vetores e Movimento Tridimensional

Uma bola é lançada e sua posição é dada pelo vetor posição r.

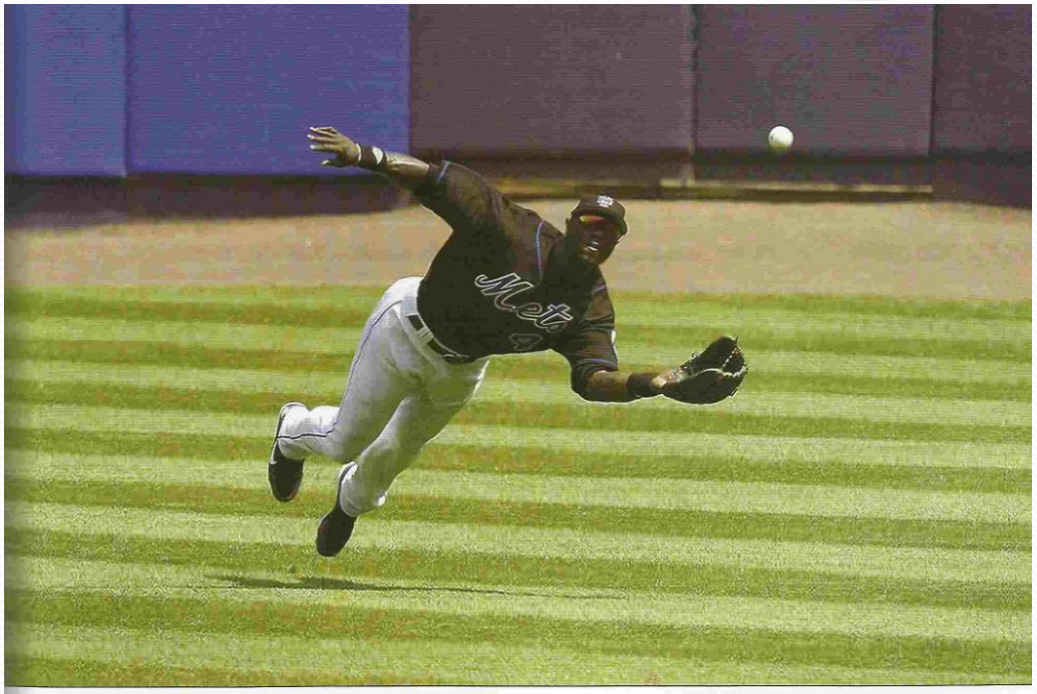
Encontre suas velocidades e acelerações como função do tempo.

Quais são as posição e velocidade iniciais ?

$$\vec{r}(t) = [1{,}5m + (12m/s)t]\hat{i} + [(1{,}6m/s)t - (4{,}9m/s^2)t^2]\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = (1{,}5 + 12t)\hat{i} + (1{,}6t - 4{,}9t^2)\hat{j}$$

Vetores e Movimento Tridimensional



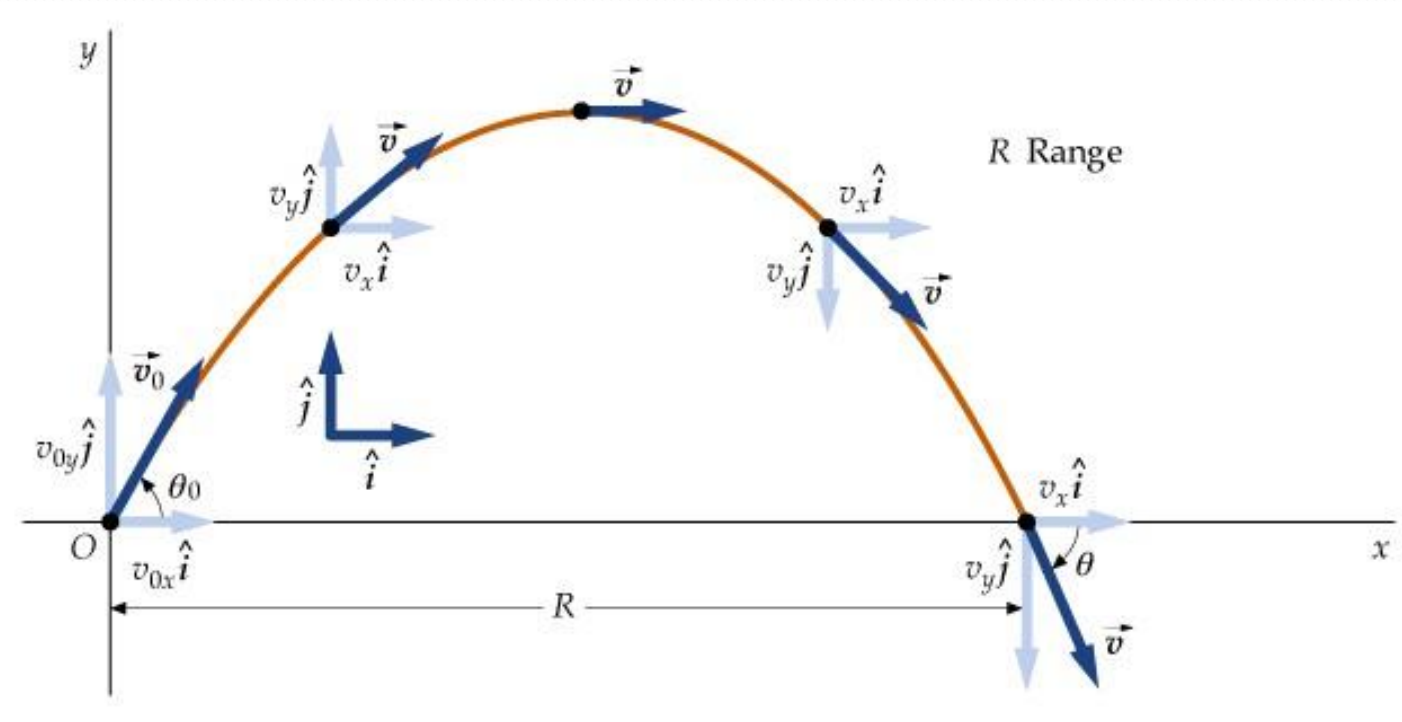
Fonte: Rob Tringali/Sports Chrome Inc.

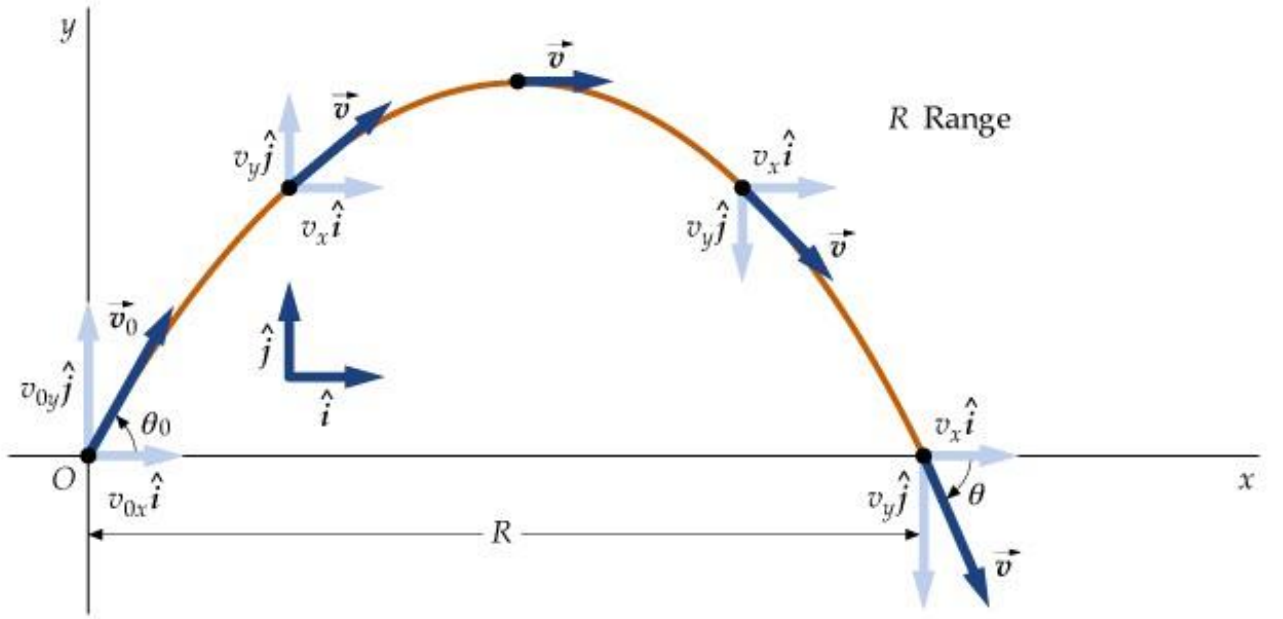
Quando uma bola de beisebol é rebatida e se aproxima de um jogador, como ele sabe onde deve estar para apanhá-la? Freqüentemente, o jogador caminha ou corre para um certo local do campo, chegando ali ao mesmo tempo que a bola. A experiência de jogo certamente ajuda, mas algum outro fator parece estar envolvido.

O que um jogador faz para saber onde deve estar para apanhar uma bola de beisebol?

Movimento de projéteis

O projétil é lançado em uma trajetória bidimensional, a partir da posição inicial (r_0), com uma velocidade inicial (v_0), com um ângulo θ em relação à horizontal, ficando em sua trajetória, submetido à uma aceleração vertical (-g).





Decomposição do movimento nas duas coordenadas

Equações do movimento geral

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a}{2}t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a}{2}t^2$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

Equação da trajetória (para $x_0=y_0=0$)

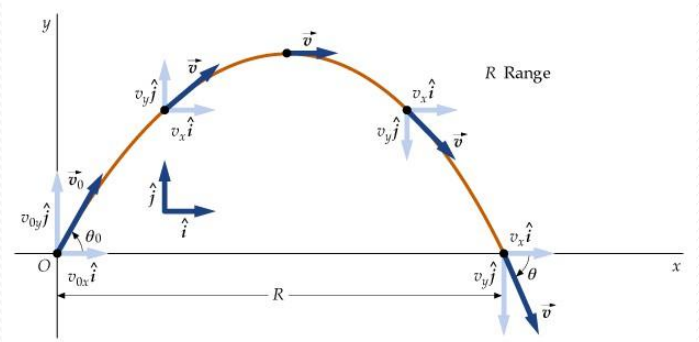
$$x(t) = v_{0x}t$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

para $t = x/v_{0x}$

$$y(x) = v_{0y}(x/v_{0x}) - \frac{g}{2}(x/v_{0x})^2$$

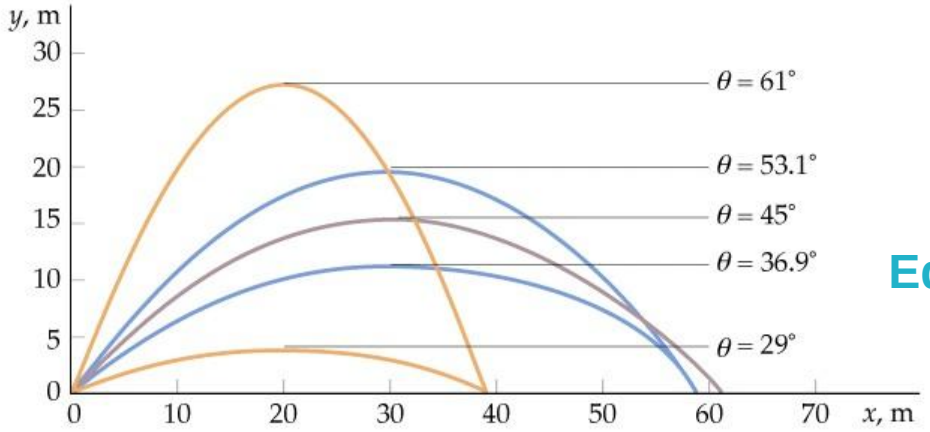
$$y(x) = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right)x^2$$



$$v_{0x} = v_0\cos\theta_0$$

$$v_{0y} = v_0\sin\theta_0$$

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = tg\,\theta_0$$

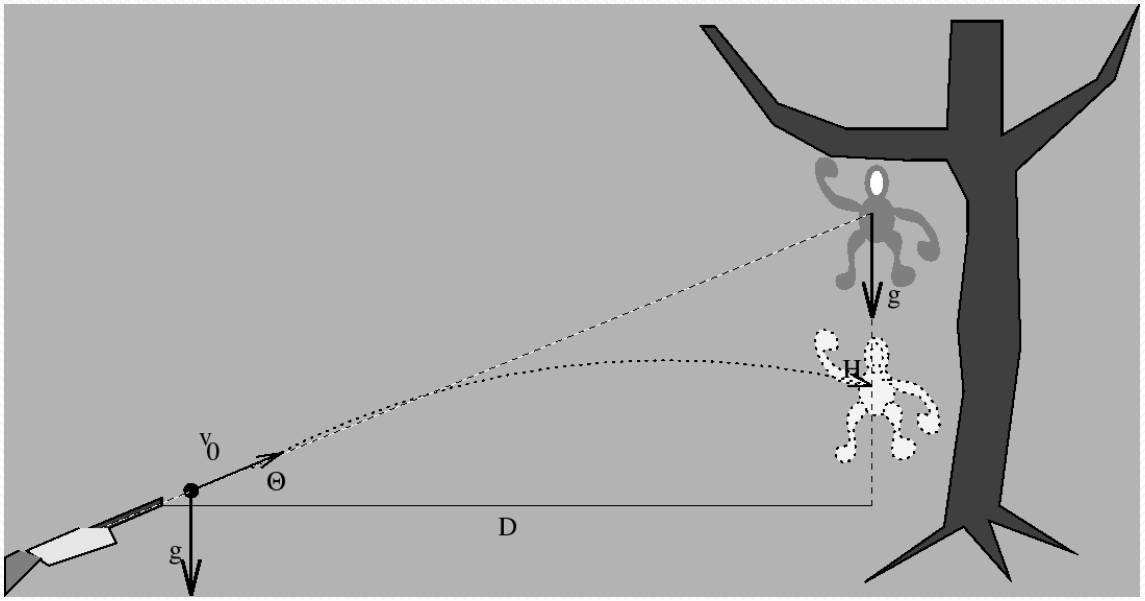


Equação da trajetória é uma parabola

$$y(x) = (tg\,\theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2$$

Problema do macaco e do caçador

http://science.sbcc.edu/physics/flash/The%20Monkey%20and%20the%20Hunter.html



Tempo total de vôo (T)

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a}{2}t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a}{2}t^2$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

Saindo de x=0 e y=0
com v=v_0
num ângulo θ_0

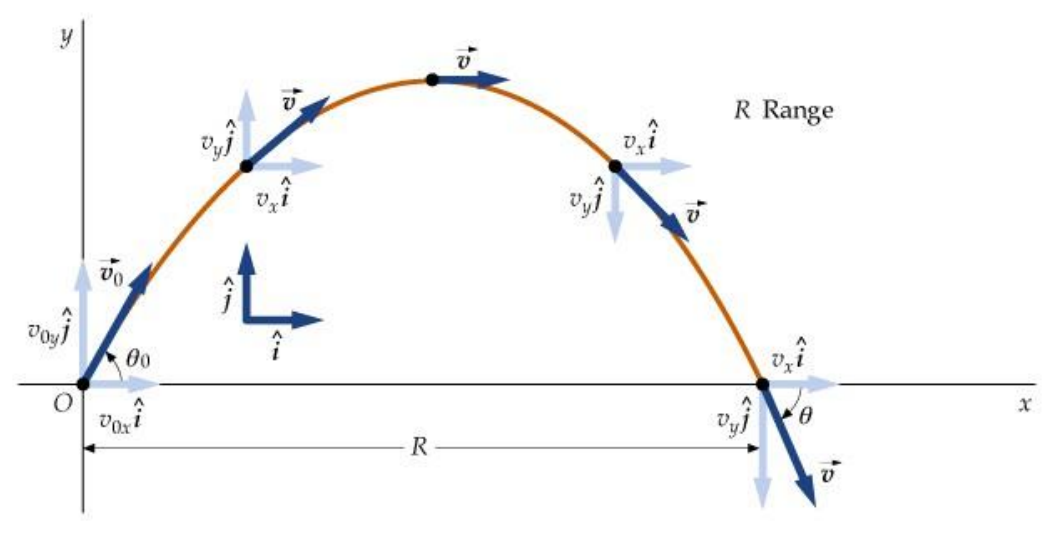
$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

Para t=T y=0

$$0 = v_{0y}T - \frac{g}{2}T^2$$

$$0 = v_{0y} - \frac{g}{2}T$$

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0}{g}sen\theta_0$$



Alcance horizontal (R) quando x(T)= R

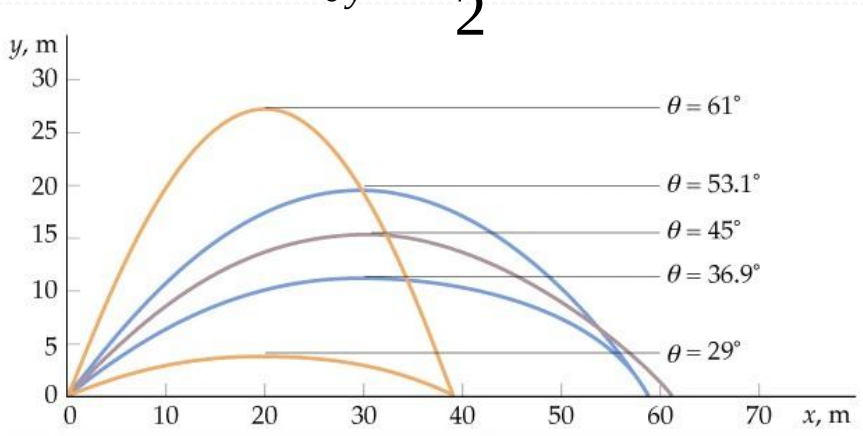
$$x(t) = v_{0x}t$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

$$R = v_{0x}T$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0$$



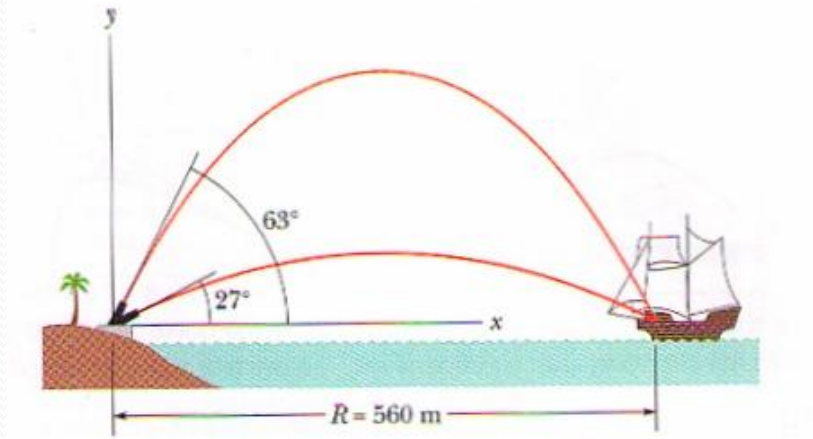


FIG. 4-16 Um navio pirata sendo atacado.

Para qual ângulo R é máximo ?

Equação da velocidade

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_{0x}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_{0y} - gt$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Sendo que:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

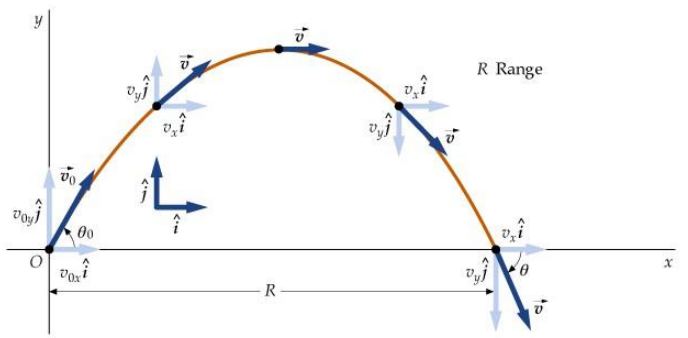
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

Tempo de subida (Ts)

Para t=Ts, v_y=0

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

$$v_x = v_{0x}$$
$$v_y = v_{0y} - gt$$



$$0 = v_{0y} - gT_s$$

$$T_s = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0}{g}\sin\theta_0$$

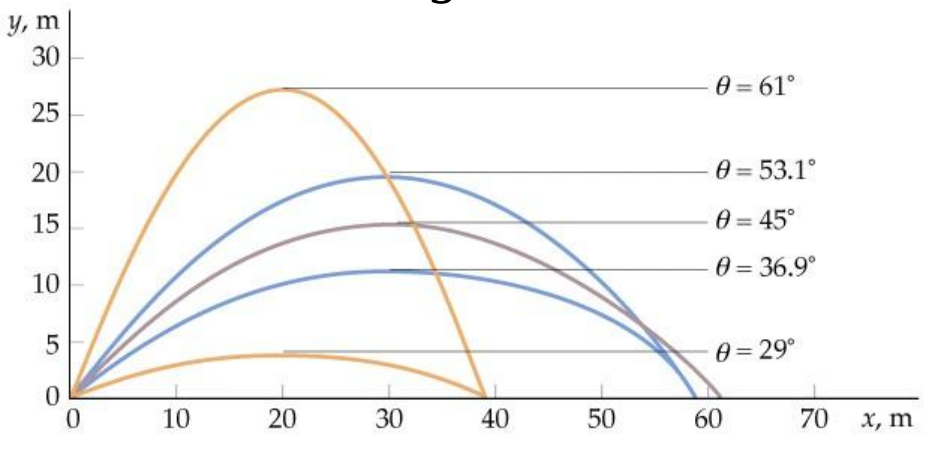
Altura máxima (H)

$$x(t) = v_{0x}t$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

$$H = v_{0y}T_s - \frac{g}{2}T_s^2$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta_0$$



Para qual ângulo H é máximo ?

Movimento Circular Uniforme

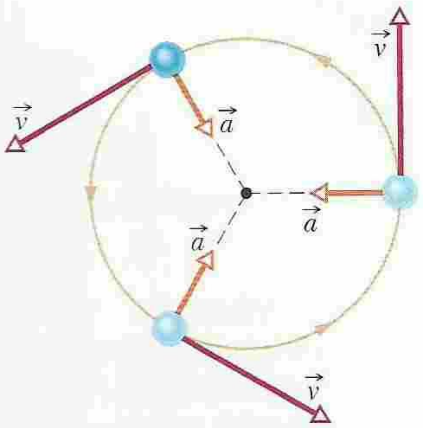


FIG. 4-19 Os vetores velocidade e aceleração de uma partícula em movimento circular uniforme.

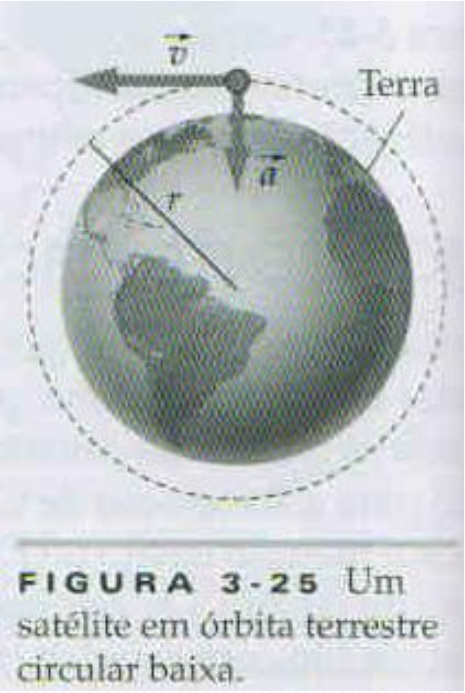


FIGURA 3-25 Um satélite em órbita terrestre circular baixa.

Aceleração centrípeta

$$a_{centr} = \frac{v^2}{r}$$

Período (T)

tempo necessário para uma volta completa

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Movimento Circular Uniforme

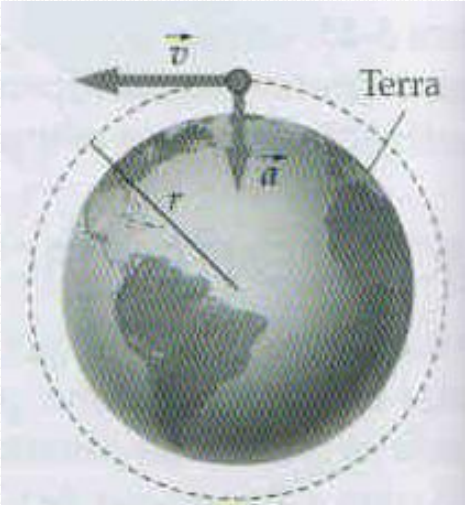
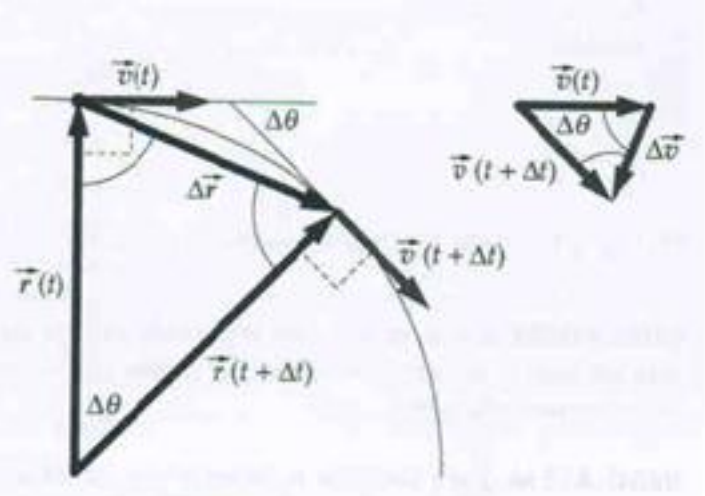


FIGURA 3-25 Um satélite em órbita terrestre circular baixa.

Calcule o módulo da velocidade e o período de um satélite com órbita "baixa".

R_T= 6370 km e g= 9,81 m/s^2

Movimento Circular



Por semelhança de triângulos

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{v}{r}$$

$$|\Delta\vec{v}| = \frac{v}{r}|\Delta\vec{r}|$$

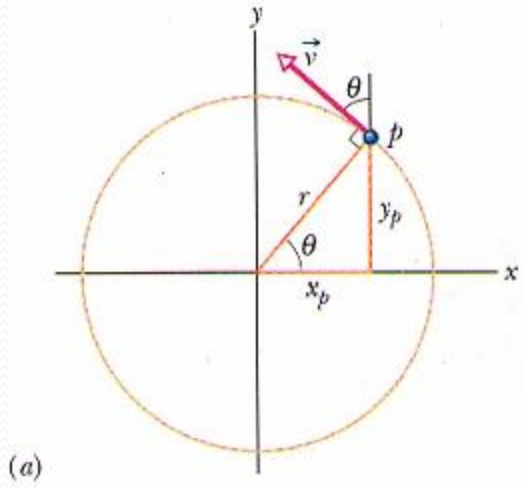
$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta t|} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{|\Delta t|}$$

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{|\Delta t|}\right) = \frac{v}{r}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{|\Delta t|}$$

Aceleração centrípeta

$$a = \frac{v}{r}v = \frac{v^2}{r} = a_c$$

Movimento Circular Uniforme



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

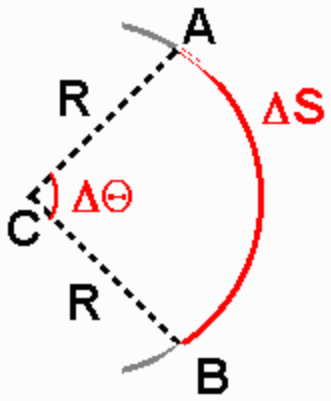
no movimento Circular

com R constante

$$x = R\cos\theta$$

$$y = R\sin\theta$$

$$\vec{r} = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}$$



$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

e

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\theta = \omega t$$

$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\hat{i} + R\sin(\omega t)\,\hat{j}$$

Tratamento vetorial

velocidade

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d[R\cos(\omega t)]}{dt}\hat{i} + \frac{d[R\sin(\omega t)]}{dt}\hat{j}$$

$$\vec{v} = -R\omega\sin\theta\hat{i} + R\omega\cos\theta\hat{j}$$

Aceleração

$$\vec{v} = -R\omega\sin\omega t\hat{i} + R\omega\cos\omega t\hat{j}$$

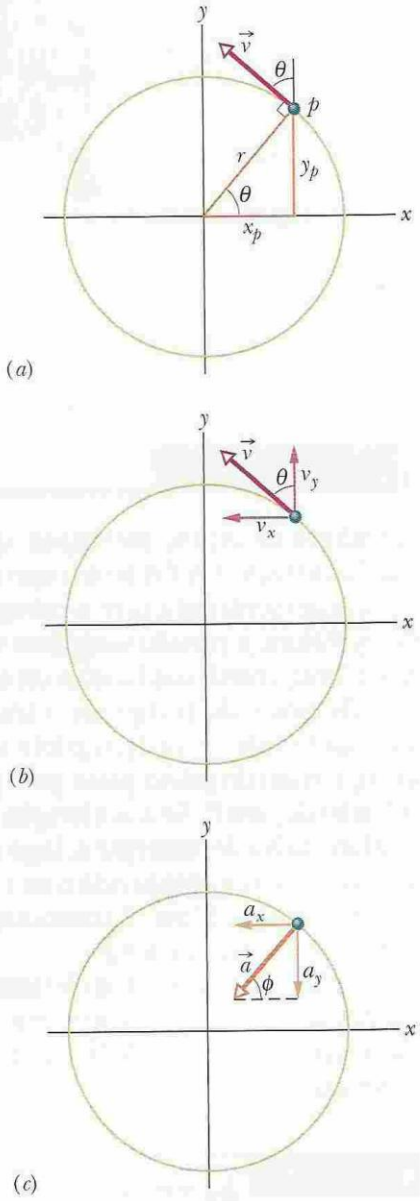
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2\cos\omega t\hat{i} - R\omega^2\sin\omega t\hat{j}$$

$$\vec{a} = -\omega^2(R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}) = -\omega^2\vec{r}$$

Aceleração centrípeta

$$\vec{a}_c = -\omega^2\vec{r} = -\frac{v^2}{r^2}\vec{r} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

Vetores e Movimento Tridimensional



Movimento não retilíneo qualquer

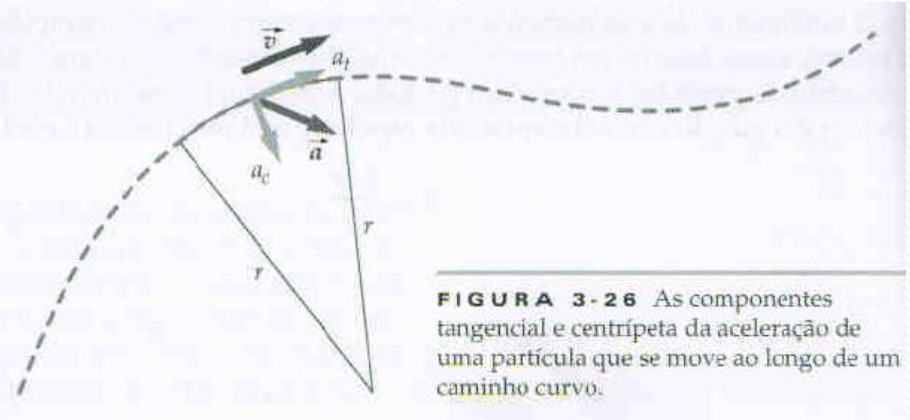


FIGURA 3-26 As componentes tangencial e centrípeta da aceleração de uma partícula que se move ao longo de um caminho curvo.

Além da aceleração centrípeta, podemos ter também uma componente da aceleração paralela à direção do movimento (aceleração tangencial)

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Aceleração total

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

Movimento Circular

Caso do movimento pendular

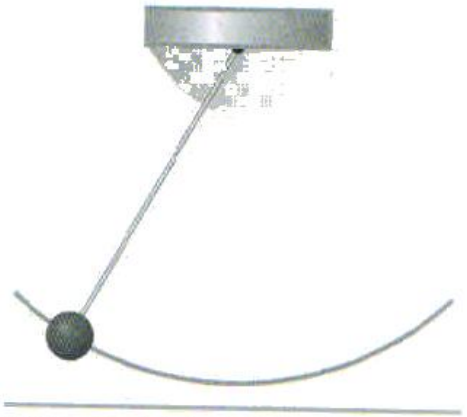
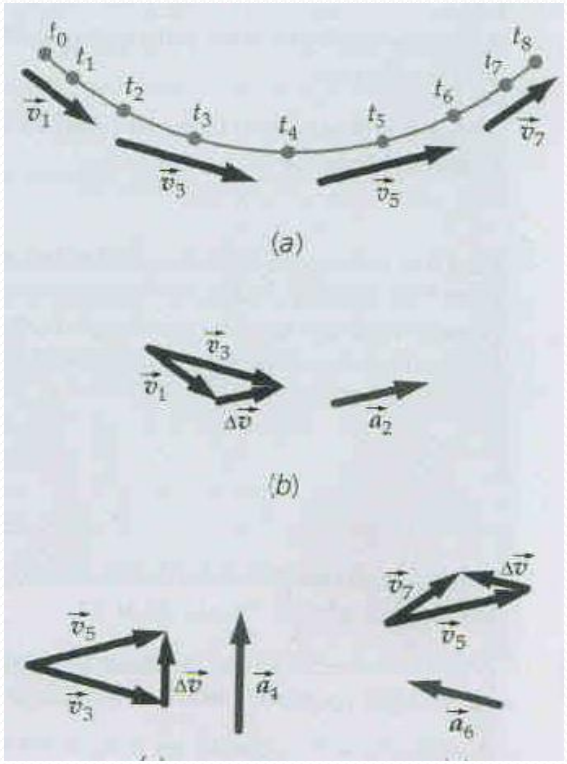
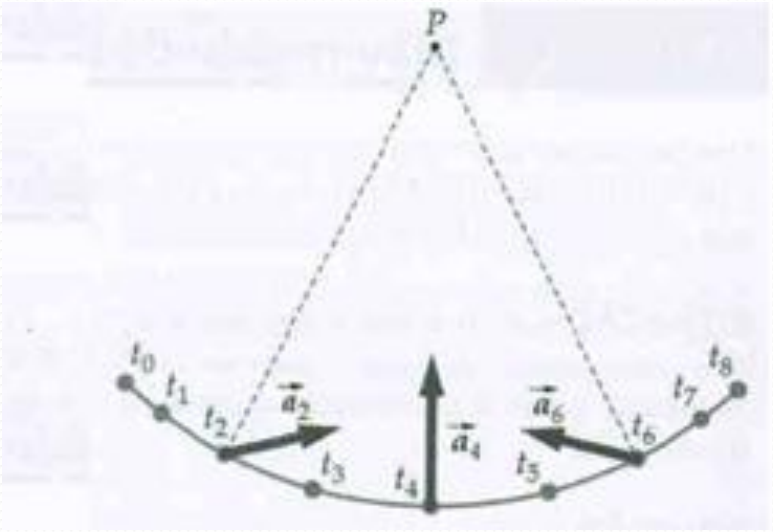


FIGURA 3-21 A massa de um pêndulo oscila ao longo de um arco circular centrado no ponto de suspensão do fio.

Analisando a aceleração



Pêndulo