Prova P1, 14 de Setembro

Agora, imagine que você quisera calcular

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^{-ikx}}{x^2+a^2}$$ onde k é real positivo

Que tipo de contorno fechado você usaria? Calcule o valor dessa integral nesse caso.

Como consequência dos cálculos acima, podemos afirmar as seguintes propriedades gerais para uma integral do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{ikx} f(x)$$

- Se $f(z)$ não possui nenhum pólo em cima do eixo real e $\lim_{|z|\to\infty} f(z) \to 0$ e $k>0$ então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = 2\pi i \sum_{Im(z_j)>0}' \mathrm{Res}[f(z_j) e^{ikz_j}]$$

onde o somatório é sobre todos os pólos no semi-plano superior de z. Como uma conseqüência imediata, se $f(z)$ não possui nenhum pólo no plano superior, inclusive no eixo real, então o valor da integral é nulo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{ikx} f(x) = 0$$

Analogamente, se $\lim_{|z|\to\infty} f(z) \to 0$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = 2\pi i \sum_{Im(z_j)<0} \mathrm{Res}\left[f(z_j)\, e^{-ikz_j}\right]$$

onde o somatório é sobre todos os pólos no semi-plano inferior de z. Quando $f(z)$ não possui nenhum pólo no plano inferior então

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\, e^{-ikx} = 0$$

⊛ Nós veremos depois que essas propriedades serão muito importante quando discutirmos propagação de ondas e causalidade.

Note que, no lugar de e^{ikx}, poderíamos considerar as integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \cos(kx) \quad , \quad \int_{0}^{\infty} f(x) \cos(kx)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \mathrm{Sen}(kx) \quad , \quad \int_{0}^{\infty} dx\, f(x)\, \mathrm{sen}(kx)$$

Por exemplo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \cos x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \left(e^{ikx} + e^{-ikx} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \right\}$$

faz $x \to -x$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(-x)\, e^{ikx}\, dx \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\left(f(x) + f(-x) \right)}{2} e^{ikx}$$

Exercício: Calcule a integral

$$\int_{0}^{\infty} dx\, \frac{\cos x}{x^2 + 1}$$

Exemplo: O que acontece quando há um pólo no eixo real?

Vamos considerar a integral

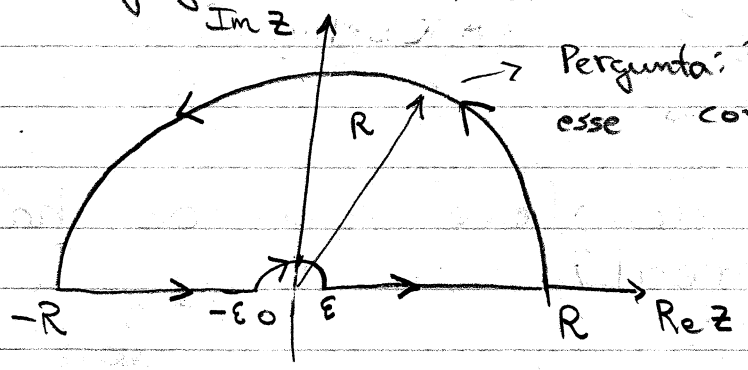
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ix}}{x}$$

Note que essa integral não é bem definida da forma que escrevemos. De fato, no ponto $x=0$, a função $\frac{1}{x}$ não é definida e, dependendo de como nos aproximamos desse

ponto, o valor da integral varia. Para evitar esses problemas com "indefinição" introduzimos o conceito de "Valor principal de Cauchy"

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{e^{ix}}{x}\,dx$$

ou seja, os passos da integral se aproximam pelos dois lados do ponto $x=0$ igualmente. Uma vez definido como se aproximar do pólo, podemos escolher o contorno C da figura abaixo



→ Pergunta: Porque usamos esse contorno?

Então,

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \left\{\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right) + \int_{\cap=\varepsilon} + \int_{\cap=R}\right\}\frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

C → união de todos os caminhos

$\cap=\varepsilon$ → semi-círculo de raio ε centrado na origem

$\cap=R$ → semi-círculo de raio R

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\cap=R} dz\,\frac{e^{iz}}{z} \to 0,$$ como vimos anteriormente $\left(\frac{1}{z}\to 0 \text{ se } |z|\to\infty\right)$

$z = \varepsilon e^{i\theta}, \quad dz = z\, i\, d\theta$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma = \varepsilon} dz \frac{e^{iz}}{z} = i \int_{\pi}^{0} \varepsilon e^{i\theta} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta \Bigg|_{\varepsilon \to 0} = -i\pi$$

Note que, pelo teorema dos Resíduos,

$\oint_C dz \frac{e^{iz}}{z} = 0$ já que não existem pólos dentro do contorno fechado. Assim,

$$0 = \lim_{R \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} \right) \frac{e^{ix}}{x} dx}_{\text{valor principal de Cauchy}} - \pi i$$

e dessa forma

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ix}}{x} = i\pi \quad //$$

Prove: <u>O lema de Jordan</u>

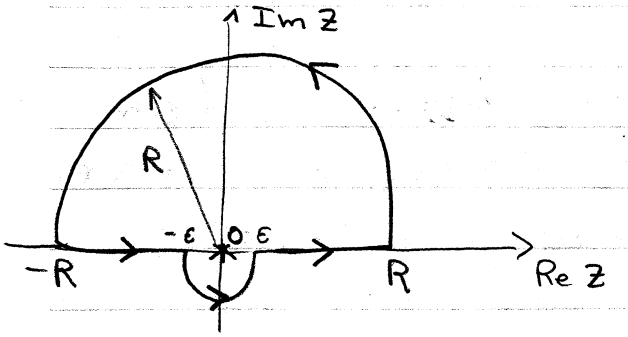
$$\left| \int_{C_R} e^{ikz} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{k} \max_{\theta \in [0,\pi]} |f(Re^{i\theta})|$$

onde C_R é o semi-círculo definido por

$C_R = \{ z = Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi] \}$ e $R > 0$.
centrada na origem.

Aula 9 22/8/2011

O que aconteceria se tivéssemos fechado o contorno anterior dessa forma?



Neste caso, existe um pólo simples de ordem 1 em $z=0$.

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ Qual é o resíduo?

$$\text{Res} f(0) = \lim_{z\to 0}\left(z\frac{e^{iz}}{z}\right) = 1$$ ou

poderíamos ter expandido $e^{iz} = 1 + iz + O(z^2)$

para encontrar a Série de Laurent

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2} + \cdots$$

Resíduo é 1. Assim,

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} + \int_{\Gamma=\varepsilon} + \int_{\Gamma=R}\right\}\frac{e^{iz}}{z}$$

$$= 2\pi i\,\text{Res} f(0) = 2\pi i$$

De novo, $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma=R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma=\varepsilon} dz \frac{e^{iz}}{z} = \lim_{\varepsilon\to 0} -i \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \, e^{i\varepsilon e^{i\theta}} = i\pi$$

ao longo do semi-círculo de raio ε

$z = \varepsilon e^{i\theta}$

$dz = z\, i d\theta$

$\theta \in (\pi, 2\pi)$

Assim,

$$\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{e^{ix}}{x} dx = 2\pi i - i\pi \quad \text{ou}$$

$$P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ix}}{x} = i\pi$$

como havíamos encontrado antes?

Agora, sabendo desse resultado, como você calcularia

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

de "cabeça"?

Primeiro, note que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é uma função par. Assim,

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Agora, essa integral é bem definida em $x=0$?

Sim! $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right]$

$= 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)$ Ok, agora se fizermos

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ix}}{x}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\{i\pi\} = \frac{\pi}{2}$$ e assim

$$\int_0^{\infty} dx\, \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{2} \quad //$$

Agora, vimos que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é bem definida em $x=0$, porém $\frac{e^{ix}}{x}$ não é ??? Porque?

$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ e

$\frac{e^{ix}}{x} = \frac{\cos x}{x} + i\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ agora, note que

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + O(x^5)$$

$\rightarrow$ singularidade em $x=0$!

Ex: Integral do tipo $\int_0^{2\pi} d\theta \; F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

Vamos considerar a integral

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \; F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \qquad \text{Seja } z \equiv e^{i\theta}$$

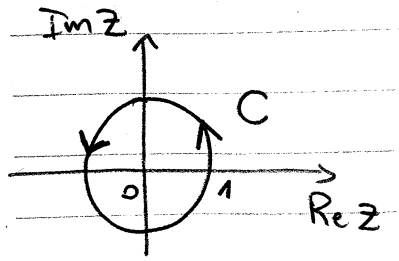
então

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

e $dz = i\,d\theta\, e^{i\theta} = i z\, d\theta$

Agora, nos podemos considerar a integral fechada ao longo do círculo de raio 1 centrado na origem



e assim

$$I = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \; F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

Então, se a função

$$f(z) \equiv \frac{1}{zi} F\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{zi}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

possui N pólos z_k $(k=1,\dots,N)$ dentro do círculo $|z|=1$

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{N}{}' \operatorname{Res}(f(z_k))$$

Por exemplo: Vamos calcular

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - a\cos\theta} \quad \text{onde} \quad a < 1 \text{ (real)}$$

Usando nossos resultados anteriores, vemos que

$$I = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{1}{\left[1 - \frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}$$

$$= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} dz \frac{1}{(2z - az^2 + a)}$$

$$= 2i \oint_{|z|=1} dz \frac{1}{az^2 - 2z + a}$$

Agora, essa função tem 2 pólos dados por

$$az^2 - 2z + a = 0 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4a^2}}{2a}$$

$$z = \frac{1}{a} \pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

Agora, quais são os pólos dentro do contorno C?

$$z_1 \equiv \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \quad z_2 \equiv \frac{1}{a} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

Se $a < 1$ então, $az_1 > 1 \Rightarrow z_1 > 1$ então, ele está fora do contorno.

Se convença de que $|z_2| < 1$. Assim, esse pólo está dentro do contorno e assim o resíduo é

$$f(z) = \frac{2i}{az^2 - 2z + a} = \frac{2i}{(z - z_1)(z - z_2)a} \quad e$$

$$\text{Res } f(z_2) = \lim_{z \to z_2} \frac{2i}{(z - z_1)} \frac{\cancel{(z - z_2)}}{\cancel{(z - z_2)}} = \frac{2i}{(z_2 - z_1)a}$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{Res } f(z_2)$$

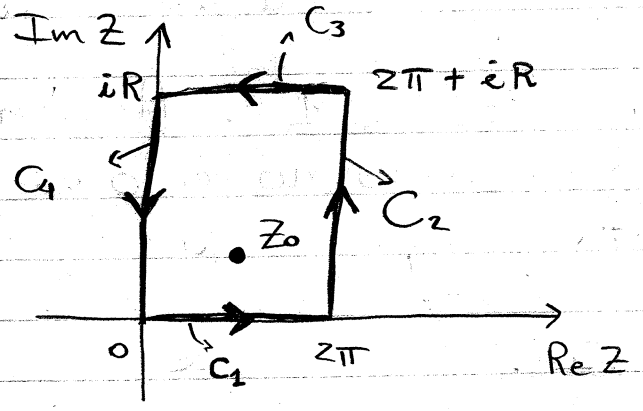
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \quad //$$

Ex: Contorno Retangular

A integral acima pode ser feita de outra forma. Vamos considerar diretamente a integral na forma

$$\oint_C \frac{dz}{1 - a\cos z}$$

e escolhamos a curva fechada como o retângulo indicado na figura abaixo



$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

O pólo fica no ponto

$$\cos z = \frac{1}{a}$$

e $a < 1$. Note que esta equação só tem soluções para z complexo.

Escrevendo, $z = x + iy$ assim

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy$$

$$= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = \frac{1}{a}$$

$$\operatorname{sen} iy = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}$$

Assim,

$\cos x \cosh y = \frac{1}{a}$, $\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = 0$

Se

$\operatorname{senh} y = 0$ se $y = 0$ mas $\cosh y = 1$ o que implicaria em $\cos x = \frac{1}{a}$, o que não faz sentido uma vez que $a < 1$ e $x \in \mathbb{R}$. Então, $\operatorname{senh} y = 0$ não é solução. Assim, fazemos

$\operatorname{sen} x = 0$, $\cos x = \pm 1$ e $\cosh y = \frac{1}{a}$

No intervalo entre $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$, temos apenas um pólo em

$\rightarrow$ assim $\cos x = -1$

$x = \pi$ e $y = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$ ou

$$z_0 = \pi + i \cosh^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$$

O resíduo em z_0 é (definindo $f(z) \equiv \frac{1}{1 - a\cos z}$)

$\operatorname{Res} f(z_0)$? Lembram da nossa fórmula para pólos de ordem 1

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f}\right)\Big|_{z=z_0}}$$? Aqui essa fórmula é muito útil

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1-a\cos z}\right)\Bigg|_{z=z_0} = \frac{1}{\frac{d}{dz}\left(1-a\cos z\right)\Big|_{z=z_0}} \quad e$$

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{a\,\operatorname{sen} z_0} = \frac{1}{a\sqrt{1-\cos^2 z_0}}$$

$$\cos z_0 = \cos(x_0 + i y_0) \quad , \quad x_0 = \pi \ , \ y_0 = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \cos z_0 = \cos x_0 \cosh y_0 - \cancel{i \operatorname{sen} x_0 \operatorname{senh} y_0}$$

$$= (-1)\cosh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{a} \quad e \quad \text{então} \quad \cos^2 z_0 = \frac{1}{a^2} \quad e$$

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{a\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{1}{i\sqrt{1-a^2}} \quad //$$

Vamos ver agora como ficam as integrais sobre os quatro lados do retângulo C.

Sabemos que

$$\oint_C \frac{dz}{1-a\cos z} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

Agora, sobre o caminho C_2

$z \to 2\pi$ até $2\pi + iR$

$(2\pi, 0) \longrightarrow (2\pi, iR)$

Parametrização $z = 2\pi + iy$, $y \in [0, R]$

$dz = i\,dy$

$$\int_{C_2} \frac{dz}{1 - a\cos z} = \int_0^R \frac{i\,dy}{1 - a\cosh y} \quad //$$

Agora, sobre o caminho C_4

$z \to (0, iR) \longrightarrow (0, 0)$

Parametrização $z = 0 + iy$, $y \in [R, 0]$.

$dz = i\,dy$

$$\int_{C_4} \frac{dz}{1 - a\cos z} = i\int_R^0 \frac{dy}{1 - a\cosh y} = -\int_{C_2} \frac{dz}{1 - a\cos z}$$

Assim, na soma envolvida em $\oint_C \frac{dz}{1 - a\cos z}$ essas integrais ao longo de C_2 e C_4 se cancelam. Vamos ver agora a integral ao longo de C_3.

Em C_3, $z \to (2\pi, iR) \longrightarrow (0, iR)$

Param. $z = x + iR \Rightarrow dx = dz$.

$x \in [2\pi, 0]$

$$\int_{C_3} \frac{dz}{1 - a\cos z} = \int_{2\pi}^0 dx \, \frac{1}{1 - a\cos(x + iR)}$$

$$= \int_{2\pi}^{0} dx \frac{1}{1 - a[\cos x \cosh R - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} R]}$$

Agora, note que temos a liberdade de tomar $R \to \infty$. Fazendo isso

$$\lim_{R\to\infty} -\int_0^{2\pi} dx \frac{1}{1 - a[\cos x \cosh R - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} R]} = 0$$

pois $\lim_{R\to\infty} \cosh R = \lim_{R\to\infty} \operatorname{senh} R = \lim_{R\to\infty} e^R$

Dessa forma, restou apenas o contorno C_1 onde

$$z \to (0,0) \longrightarrow (2\pi, 0)$$

$$z = x \to dz = dx$$

$$z \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{C_1} \frac{dz}{(1 - a\cos z)} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - a\cos x} \quad e$$

$$\oint_C \frac{dz}{1 - a\cos z} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - a\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

Como havíamos achado antes usando um contorno e etc COMPLETAMENTE diferente.

Ex: <u>Mais sobre contorno retangular</u>

Por exemplo, vamos calcular

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh(ax)} \quad , \quad a > 0.$$

Vamos determinar os pólos de $f(z) \equiv \dfrac{1}{\cosh(az)}$

$z = x + iy$

$\cosh(az)$? Lembrem que $\cosh(z) = \cos(iz)$

e $\operatorname{senh}(z) = \operatorname{sen}(iz)$

e assim

$$\cosh(\overset{z}{ax + iay}) = \cos[iax - ay]$$

$$= \cos(ay)\cos(iax) + \operatorname{sen}(iax)\operatorname{sen}(ay)$$

$$= \cosh(ax)\cos(ay) + i\operatorname{senh}(ax)\operatorname{sen}(ay)$$

$\cosh(az) = 0 \Rightarrow \cosh(ax)\cos(ay) + i\operatorname{senh}(ax)\operatorname{sen}(ay) = 0$

$x, y \in \mathbb{R}$

Fazendo uma analise parecida com o exercício anterior, se fazemos

$\operatorname{senh} ax = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \cos(ay) = 0$

o que significa que $y = \pm (2m+1)\dfrac{\pi}{2a}$

onde $m = 0, 1, 2, \ldots$

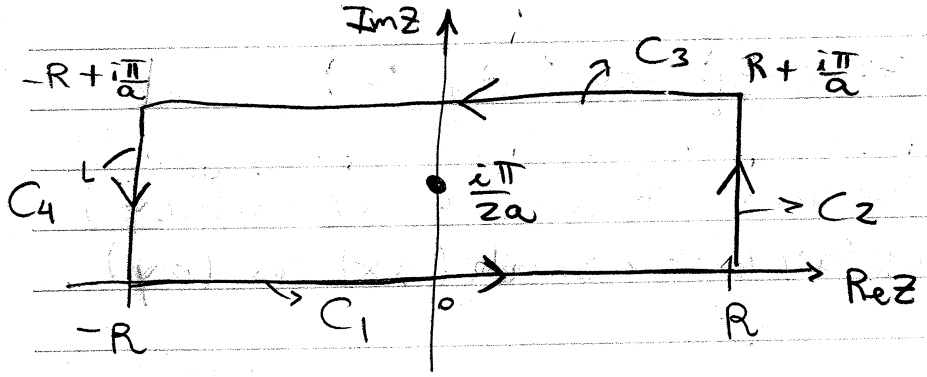
Pólos $z_m = \pm i (2m+1)\dfrac{\pi}{2a}$, $m = 0, 1, \ldots \rightarrow$ infinitos pólos

O resíduo em, por exemplo, $z_0 = i\frac{\pi}{2a}$ é (de novo pólo de ordem 1)

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\cosh az}\right)\Bigg|_{z=z_0} = \frac{1}{\frac{d}{dz}\left(\cosh az\right)}\Bigg|_{\frac{i\pi}{2a}}$$

$$= \frac{1}{a\,\operatorname{senh}\left(\frac{i\pi}{2}\right)} = \frac{1}{ia} \quad //$$

Vamos escolher o contorno retangular C



$C = \bigcup_{k=1}^{4} C_k$ Note que claramente queremos saber o limite onde $R \to \infty$.

Note que o pólo mais próximo estaria em $z_1 = \frac{3i\pi}{2a}$. Assim, pelo teorema dos resíduos

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_0) = \frac{2\pi}{a}$$

Vamos ver as integrais sobre os caminhos que definem C.

Em C_2: $z \to (R,0) \to (R, \frac{i\pi}{a})$

$z = R+iy$, $dz = i\,dy$, $y \in [0, \frac{\pi}{a}]$

Assim,

$$\int_{C_2} f(z)dz = i\int_0^{\frac{\pi}{a}} dy \frac{1}{\cosh(aR+iay)}$$

$$= i\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{dy}{[\cosh(aR)\cos(ay) + i\,\mathrm{senh}(aR)\,\mathrm{sen}(ay)]}$$

Em C_4: $z \to (-R, \frac{i\pi}{a}) \to (-R, 0)$

$z = -R+iy$, $dz = i\,dy$, $y \in [\frac{i\pi}{a}, 0]$

Assim,

$$\int_{C_4} f(z)dz = i\int_{\frac{\pi}{a}}^{0} dy \frac{1}{\cosh(-aR+iay)}$$

$$= -i\int_0^{\frac{\pi}{a}} dy \frac{1}{[\cosh(aR)\cos(ay) - i\,\mathrm{Senh}(aR)\,\mathrm{Sen}(ay)]}$$

Note que

$$\frac{1}{\cosh(\pm aR+iay)} = \frac{\cosh(aR)\cos(ay) \mp i\,\mathrm{senh}(aR)\,\mathrm{Sen}(ay)}{\cosh^2(aR)\cos^2(ay) + \mathrm{Senh}^2(aR)\,\mathrm{Sen}^2(ay)}$$

Assim $\int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)\,dz =$

$$= i\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{dy}{\left[\cosh^2(aR)\cos^2(ay) + \operatorname{senh}^2(aR)\operatorname{sen}^2(ay)\right]} \times \Big\{$$

$$\cosh(aR)\cos(ay) - i\operatorname{senh}(aR)\operatorname{sen}(ay)$$

$$-\left(\cosh(aR)\cos(ay) + i\operatorname{senh}(aR)\operatorname{sen}(ay)\right)\Big\}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{dy}{\left[\cosh^2(aR)\cos^2(ay) + \operatorname{senh}^2(aR)\operatorname{sen}^2(ay)\right]} \times$$

$\operatorname{senh}(aR)\operatorname{sen}(ay)$ mas quando $R \to \infty$

$\sim \lim_{R\to\infty} 2\int dy\, e^{-R} \to 0$. Dessa forma, não precisamos nos preocupar com C_2 e C_4.

Agora, vamos ver a integral sobre C_1

Claramente,

$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh ax}$. Entretanto, para C_3

Em C_3 : $z \to (R, \frac{\pi}{a}) \to (-R, \frac{\pi}{a})$

$z = x + \frac{i\pi}{a}$, $dz = dx$, $x \in [+R, -R]$ e

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_R^{-R} dx \frac{1}{\cosh(ax + i\pi)}$$ mas

$\cosh(ax + i\pi) = \cosh ax \cos\pi = -\cosh(ax)$,

assim, $$\int_{C_3} f(z)dz = -\int_R^{-R} dx \frac{1}{\cosh ax}$$ agora,

fazemos $x \to -x$, $dx \to -dx$ e assim

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_{-R}^{R} dx \frac{1}{\cosh(ax)} = \int_{C_1} f(z)dz$$

Dessa forma, obtemos que

$$\oint_C f(z)dz = \lim_{R\to\infty} 2\int_{-R}^{R} \frac{dx}{\cosh(xa)} = \frac{2\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh(xa)} = \frac{\pi}{a}$$

Como faríamos isso de "cabeça"?

define $\xi = xa$

Note que $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh(xa)} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\cosh\xi}$$

mas $$\int \frac{d\xi}{\cosh\xi} = 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)$$ e

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$ e assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh(ax)} = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{a} \quad // \quad ☺$$

(*) OK, esse aqui eu acho que é mais provável que o aluno faça via resíduo do que via integração direta...

Aula 10 24/8/2011

Ex: Integração via teorema dos resíduos para uma função com ponto de ramificação e linha de corte

Vamos considerar a integral do tipo

$$\boxed{I = \int_0^\infty dx \, \frac{F(x)}{x^\alpha}}$$

onde $F(x)$ é uma função racional que não tem pólo no eixo real positivo e $\boxed{0 < \alpha < 1}$. Note que x^α é uma função plurívoca nesse caso.

⊛ Note que, perto de $x \to 0$, o integrando fica

$\sim \frac{F(0)}{x^\alpha}$ que diverge em $x=0$ mas essa singularidade é <u>integrável</u> no sentido de que $\int \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \to 0$ se $x \to 0$.

Assim, essa integral é bem definida em $x \to 0$.

⊛ Agora, seja também $F(x)$ tal que

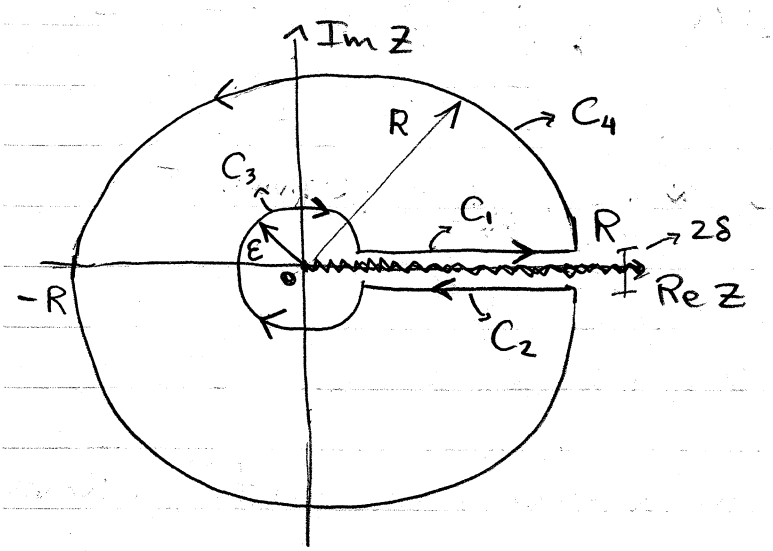
$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha} < \frac{1}{x}$, ou seja, não diverge logaritmicamente.

Nesse caso, queremos

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} F(x) = 0.}$$

Essa é a condição importante que usaremos agora.

Então, uma vez que essas condições são satisfeitas, vamos considerar o contorno abaixo



$$C = \bigcup_{k=1}^{4} C_k$$

Agora

$$f(z) \equiv \frac{F(z)}{z^{\alpha}}$$

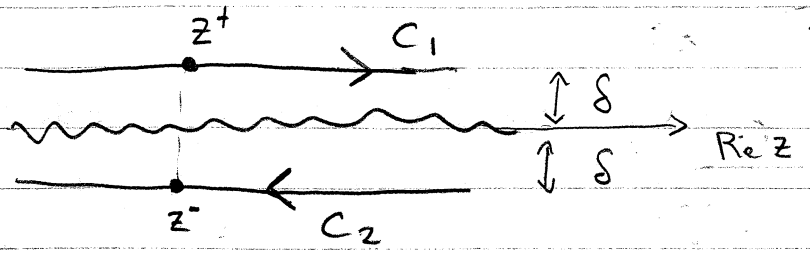
Agora, claramente queremos tomar o limite $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, e $\delta \to 0$

Uma vez que a função $1/x^{\alpha}$ é multivalente, note que $x=0$ é um ponto de ramificação e existe uma linha de corte de $x=0$ até infinito.

Escolhemos aqui colocar a linha de corte dessa forma. Note que essa linha de corte representa uma descontinuidade da função $1/x^{\alpha}$. Para usar o teorema dos resíduos, a linha de corte não pode estar dentro da região limitada pelo contorno fechado.

A descontinuida representada pela linha de corte funciona da seguinte forma:

Fazendo um zoom na linha de corte



Imagine dois pontos z^+ e z^-

$z^+ = x + i\delta$, $z^- = x - i\delta$ $\longrightarrow$ descontinuidade!

Essa função multivalente é definida em geral com a ajuda de uma superfície de Riemann.

Vamos escolher uma folha de Riemann onde o domínio cercado por este contorno fica inteiramente nesta folha. Ou seja, escolhemos o <u>ramo principal</u> em que

$$z^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln z} = e^{-\alpha[\ln r + i\theta]}$$

$$\underline{\underline{z = re^{i\theta}}}$$

onde $0 < \theta < 2\pi$

$r > 0$ Assim,

$$z^{-\alpha} = r^{-\alpha} e^{-\alpha i\theta} , \quad 0 < \theta < 2\pi$$

Note que, por construção, a função $\frac{F(z)}{z^\alpha}$ só tem pólos (se houver) fora do eixo Real se $F(z)$ os possuir.

A função $\frac{1}{z^\alpha}$ é analítica no domínio tirando o pto de ramificação e o corte.

Assim, pelo teorema dos Resíduos

$$\oint_C \frac{F(z)}{z^\alpha}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N}{}' \operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z^\alpha}\right)\Bigg|_{z=z_k}$$

$\downarrow$

soma sobre os pólos de $R(z)$ dentro do domínio

Em termos dos caminhos que definem o contorno fechado C, temos que

$$\oint_C \frac{F(z)}{z^\alpha}\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz$$

$$+ \int_{C_3} f(z)\, dz + \int_{C_4} f(z)\, dz$$

Separadamente:

Para C_1, $\underline{z = x + i\delta}$

$$\int_{C_1} f(z)dz = -\int_{\varepsilon}^{R} dx \, \frac{F(x+i\delta)}{(x+i\delta)^{\alpha}}$$

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{R}^{\varepsilon} dx \, \frac{F(x-i\delta)}{(x-i\delta)^{\alpha}}$$

Em C_2, $\underline{z = x - i\delta}$

$$\int_{C_3} f(z)dz = -\int_{0}^{2\pi} i d\theta \, \frac{F(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon^{\alpha} e^{i\alpha\theta}} \varepsilon e^{i\theta}$$

$z = \varepsilon e^{i\theta}$

$dz = z i d\theta$

$$\int_{C_4} f(z)dz = \int_{0}^{2\pi} d\theta \, i \, \frac{Re^{i\theta}}{R^{\alpha} e^{i\alpha\theta}} F(Re^{i\theta})$$

$z = Re^{i\theta}$

$dz = iz d\theta$

Note que, devido as propriedades da função $F(z)$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_4} f(z)dz = 0 \quad e \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_3} f(z)dz = 0$$

Além disso, $\lim_{\delta \to 0} (x+i\delta)^{\alpha} = x^{\alpha}$, $\lim_{\delta \to 0} (x-i\delta)^{\alpha} = x^{\alpha} e^{2\pi i \alpha}$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \delta \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{F(x+i\delta)}{(x+i\delta)^{\alpha}} dx \longrightarrow \int_{0}^{\infty} dx \frac{F(x)}{x^{\alpha}}$$

para C_1

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \delta \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{R}^{\varepsilon} dx \frac{F(x-i\delta)}{(x-i\delta)^{\alpha}} = -\int_{0}^{\infty} dx \frac{F(x)}{x^{\alpha}} e^{-2\pi\alpha i}$$

para C_2

Assim,

$$\oint_C f(z)\, dz = \int_0^{\infty} dx \frac{F(x)}{x^{\alpha}} \left(1 - e^{-i2\pi\alpha}\right)$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res} f(z_k)$$ e assim

$$\boxed{\int_0^{\infty} dx \frac{F(x)}{x^{\alpha}} = \frac{2\pi i}{\left(1 - e^{-2\pi\alpha i}\right)} \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res} f(z_k)}$$

Vamos ver um exemplo?

$$I = \int_0^{\infty} dx \left(\frac{1}{1+x}\right) x^{\alpha-1} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} \rightarrow$$ pólo simples em $z=-1$. (ordem 1)

(não está no eixo positivo).

Note que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x} = 0$

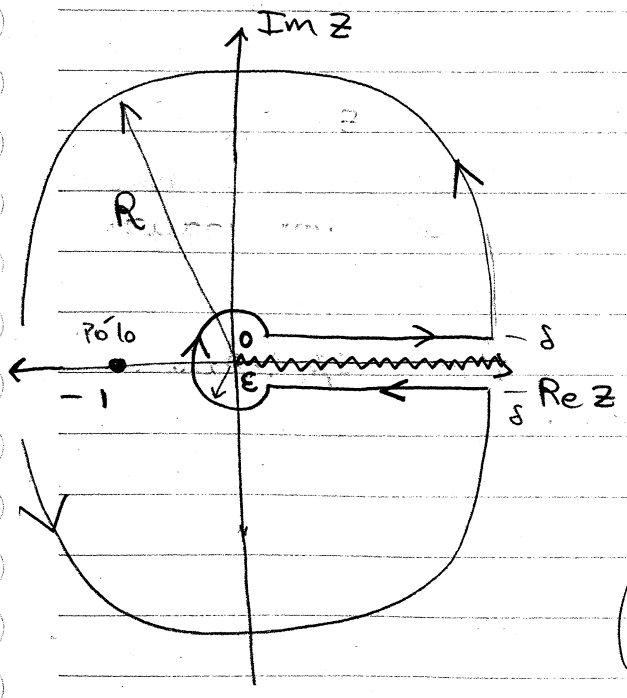
O resíduo em $z=-1$ é

$$\text{Res } f(-1) = \lim_{z\to -1} (z+1)\frac{z^{\alpha-1}}{z+1} = (-1)^{\alpha-1}$$

fazendo

$-1 = e^{i\pi}$ temos

$$\text{Res } f(-1) = e^{i\pi(\alpha-1)}$$



Fazendo o contorno, e usando os resultados derivados anteriormente obtemos que

$$\oint_C f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{\left(1-e^{-(1-\alpha)2\pi i}\right)} \text{Res} f(-1)$$

$$= \int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$$

Assim,

$$I = \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \frac{2\pi i \, e^{i\pi(\alpha-1)}}{1 - e^{2\pi i(\alpha-1)}}$$

$$I = \frac{2\pi i}{\left(e^{-i\pi(\alpha-1)} - e^{i\pi(\alpha-1)}\right)} = \frac{\pi}{(-1)\,\mathrm{Sen}[(\alpha-1)\pi]}$$

teorema do sabiá...

$$I = \frac{\pi}{\mathrm{Sen}\,\pi\alpha} \quad //$$

Truques com integrais definidas

(sem uso do teorema dos resíduos)

$$I = \int_0^\infty dx \, e^{-ax^2} = ? \qquad a>0$$

Esse truque, aparentemente, foi descoberto por Gauss

e^{-ax^2} é função par, então

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ax^2}$$

$$I^2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ax^2} \, \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dy \, e^{-ay^2}$$

$$I^2 = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\; e^{-a(x^2+y^2)}$$

Agora, em coordenadas polares

$x = a\cos\theta$, $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$y = a\,\text{sen}\,\theta$

Assim, temos que

$$I^2 = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} dr\, r \int_0^{2\pi} d\theta\; e^{-ar^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} dr\; r\, e^{-ar^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} dr\; \frac{(-2a)}{(-2a)}\, r\, e^{-ar^2} \qquad a>0$$

$$= \frac{\pi}{2(-2a)}\, e^{-ar^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4a} \qquad \text{assim}$$

$$I = \int_0^{\infty} dx\; e^{-ar^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad //$$

$a>0$

Agora, como você faria

$$I_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\; x^2 e^{-x^2} \;?$$

O truque aqui é: Defina

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{função de } a}}{I(a)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a > 0$$

Assim,

$$\frac{d}{da} I(a) = \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d}{da}\left(e^{-ax^2}\right)$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-ax^2}$$

Note que $-\frac{d}{da} I(a)\Big|_{a=1} = I_1$. Mas se

$I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\frac{d}{da} I(a) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}}$ e

$-\frac{d}{da} I(a)\Big|_{a=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e assim

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} x^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ex: Calcule $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} x^n$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Prove que:

$$\prod_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \, e^{-\sum_{j,l} x_j A_{jl} x_l} = \sqrt{\frac{\pi}{\det A}}$$

onde $A_{ij} = A_{ji}$ (matrix simétrica com autovalores não nulos)

Se você souber fazer isso, você já pode assistir um curso de Teoria quântica de campos ☺.

Aula 11 26/08/2011

Função Gama

Definição via limite (Euler)

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n)}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \cdot n^z$$

$z \neq 0, -1, -2, -3 \ldots$

$z \in \mathbb{C}$.

Fazendo $z \to z+1$ obtemos a seguinte propriedade

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1\times 2\times 3\times \dots \times n)}{(z+1)(z+2)\dots(z+1+n)} \, n^{z+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \cdot \frac{(1\times 2\times 3\times \dots \times n)}{z(z+1)\dots(z+n)} \cdot n^{z}$$

$$= z \lim_{n\to\infty} \frac{(1\times 2\times 3\times \dots \times n)}{z(z+1)\dots(z+n)} \cdot n^{z}$$

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)}$$ //

Da definição,

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n}{(n+1)!} = \frac{n!\,n}{n!(n+1)} = 1$$ //

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\,\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\,\Gamma(2) = 2$$, Claramente

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$ (Prove isso!)

Definição via integral

Considere a integral

$$\int_0^\infty dt\, e^{-t}\, t^{n-1} \qquad \text{onde} \quad n = 1, 2, \ldots$$

quanto dá essa integral? Podemos calculá-la da seguinte forma. Definimos

$$I(\alpha) \equiv \int_0^\infty dt\, e^{-\alpha t} \qquad \alpha \geq 1$$

Claramente, podemos calcular essa integral diretamente.

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

Note que

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^\infty dt\, (-t)\, e^{-\alpha t} = -\frac{1}{\alpha^2}$$

e

$$\frac{d^2 I}{d\alpha^2} = \int_0^\infty dt\, t^2\, e^{-\alpha t} = \frac{2}{\alpha^3}$$

e assim, em geral

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} I(\alpha) = \int_0^\infty dt\, (-1)^n\, t^n\, e^{-\alpha t} = \frac{(-1)^n\, n!}{\alpha^{n+1}}$$

Assim, vemos que, fazendo $\alpha = 1$

$$\int_0^\infty dt\, t^{n-1} e^{-t} = (n-1)!$$

Assim, para $\operatorname{Re} z > 0$.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t} \quad //$$

Note que essa representação integral compartilha a propriedade fundamental

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

De fato, usando a representação integral

Defina $I_{z+1}(\alpha) = \int_0^\infty dt\, t^z e^{-t\alpha}$ quando

$\alpha = 1$, $I_{z+1}(1) = \Gamma(z+1)$. Assim,

$$I_{z+1}(\alpha) = \int_0^\infty dt\, t^z e^{-\alpha t} = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} t\, e^{-\alpha t} = -\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-\alpha t}$$

Mas note que $\int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-\alpha t} \underset{\boxed{\alpha t = \xi}}{=} \frac{1}{\alpha^z}\int_0^\infty d\xi\, \xi^{z-1} e^{-\xi}$

$= \frac{1}{\alpha^z}\Gamma(z)$ Assim

$$I_{z+1}(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^z}\Gamma(z)\right) = z\,\frac{\Gamma(z)}{\alpha^{z+1}}$$

e $I_{z+1}(\alpha=1) = \boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)}$

<u>Prove que</u>: as duas definições dadas anteriormente (aquela em termos do limite de um produto e a da integral) são equivalentes.

Dica: Defina $F(z,n) \equiv \int_0^n dt\, t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$

$\mathrm{Re}\, z > 0$

e mostre que $\lim_{n\to\infty} F(z,n)$ pode ser escrita tanto como a integral (via Euler) ou o limite do produtório.

⊛ Uma propriedade interessante é a <u>da reflexão</u>

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$$

que vem da definição da função beta

$$\beta(z,s) \equiv \frac{\Gamma(z)\Gamma(s)}{\Gamma(z+s)} = \int_0^1 dx\, x^{z-1}(1-x)^{s-1}$$

rep. integral válida se $\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Re}\, s > 0$.

Notação fatorial

Com a função gama, podemos definir o que o fatorial de um número complexo z

$$z! \equiv \int_0^\infty dt\, t^z e^{-t} = \Gamma(z+1)$$

$\mathrm{Re}\, z > -1$

Note que, a propriedade fundamental da função gama implica em

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \Rightarrow z! = z\,(z-1)!$$

Assim, se $z = 1 \Rightarrow 0! = \frac{1!}{1} = 1$

Fatorial duplo

Da definição do fatorial para "n" inteiro positivo

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Podemos definir os fatoriais duplos

$$(2n+1)!! \equiv 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$$

envolvendo somente os números ímpares

e $(2n)!! \equiv 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n$

Obviamente, essas quantidades estão relacionadas. De fato, mostre que

$$(2n)!! = 2^n n!$$ e

$$(2n)!!\,(2n+1)!! = (2n+1)!$$

Ex: Em mecânica estatística, a energia total irradiada por um corpo negro (calculada por Planck) para um gás de fótons é

$$E = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{c^3 h^3} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}}_{\downarrow} = \sigma T^4$$

Lei de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = \frac{8\pi k_B^4}{c^3 h^3} \underbrace{3!\,\zeta(4)}$$

Vamos fazer o caso mais geral dessa integral

$$\int_0^\infty dx \frac{x^s}{e^x - 1} \qquad \mathrm{Re}\, s > 0$$

Resíduo? Não, tem um truque legal...

$$I = \int_0^\infty dx \, \frac{x^s}{e^x - 1} = \int_0^\infty dx \, \frac{x^s e^{-x}}{\underbrace{1 - e^{-x}}_{\text{expande em série geométrica}}}$$

$$I = \int_0^\infty dx \, x^s e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty dx \, x^s e^{-(n+1)x} \quad , \quad \xi \equiv (n+1)x$$

$$d\xi = (n+1)\,dx$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{s+1}} \right) \boxed{\int_0^\infty d\xi \, \xi^s e^{-\xi}} \rightarrow \Gamma(s+1) = s!$$

Da definição da função Zeta de Riemann

$$\zeta(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^z}$$ temos que

$\mathrm{Re}\, z > 1$

$$I = s! \, \zeta(s+1)$$ Agora, para o caso dos fótons

$$s = 3 \Rightarrow \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

//

Prove que: $\displaystyle\int_0^\infty dx \, \frac{x^s}{e^x+1} = s!\,(1-2^{-s})\,\zeta(s+1)$

$\mathrm{Re}\, s > 0$

(Essa integral, com $s=3$, aparece na distribuição de densidade de energia de neutrinos no início do universo)

Séries assintóticas

Esse tipo de série aparece muito em física. Veremos um exemplo, descoberto por Freeman Dyson, no fim da aula.

Considere a <u>função gama incompleta</u>

$$\Gamma(x,s) \equiv \int_x^\infty du\, e^{-u}\, u^{s-1}$$

e suponha que queiramos saber o limite $x \gg 1$ de

$$\Gamma(1-p,x) = \int_x^\infty du\, \underbrace{e^{-u}}_{dv}\, \underbrace{u^{-p}}_{u}$$

p, x positivos

Vamos integrar por partes.

$$\Gamma(1-p,x) = -\frac{e^{-u}}{u^p}\Big|_x^\infty + \int_x^\infty du\, e^{-u}\frac{(-p)}{u^{p+1}}$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^p} - p\int_x^\infty du\, \frac{e^{-u}}{u^{p+1}} \rightarrow$$ faz partes de novo

$$= \frac{e^{-x}}{x^p} - p\left[-\frac{e^{-u}}{u^{p+1}}\Big|_x^\infty + \int_x^\infty du\, e^{-u} \frac{(-1)(p+1)}{u^{p+2}} \right]$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^p} - p\frac{e^{-x}}{x^{p+1}} + p(p+1)\int_x^\infty du \frac{e^{-u}}{u^{p+2}}$$

Continuando a integração por partes, encontramos depois de fazer isso n vezes

$$\Gamma(1-p, x) = e^{-x}\left[\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} + \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^{n+1} \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!\, x^{p+n}} \right] + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \int_x^\infty du \frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}}}_{\text{integral resto}}$$

Vamos checar a convergência disso? Pegue os termos da série

<u>Teste da razão</u>

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\text{termo } n+1}{\text{termo } n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \frac{\frac{(p+n)!}{(p-1)!}}{\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}(p+n) \longrightarrow \infty$$

Para todos os valores de x (finito) !

Assim, essa série, considerada separadamente (sem a integral resto) como uma série infinita, diverge para todo x ! Raio de convergência é nulo!

Isso não quer dizer que a série é necessariamente inútil... para ver que esse é o caso, considere a diferença entre a função gama incompleta em questão e a soma parcial

$$\Gamma(1-p,x) - S_n(p,x) = (-1)^{n+1}\frac{(p+n)!}{(p-1)!}\int_x^\infty du\,\frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}}$$

$$= \underbrace{R_n(p,x)}_{\text{resto}}$$

O módulo dessa diferença fica (usando des. triangular)

$$|\Gamma(1-p,x) - S_n(p,x)| \leq \frac{(p+n)!}{(p-1)!}\int_x^\infty du\,\frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}}$$

Fazemos agora $u = v + x$ e a integral acima se torna

$$\int_x^\infty du\,\frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}} = e^{-x}\int_0^\infty dv\,\frac{e^{-v}}{(x+v)^{p+n+1}}$$ coloca x em evidência no denominador

$$= \frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}}\int_0^\infty dv\,\frac{e^{-v}}{\left(1+\frac{v}{x}\right)^{p+n+1}}$$

Fazendo o limite $x \gg 1$

$$\int_0^\infty dv \frac{e^{-v}}{\left(1+\frac{v}{x}\right)^{p+n+1}} \simeq \int_0^\infty dv\, e^{-v} = 1$$

Assim

$$\lim_{x \gg 1} \left| \Gamma(1-p,x) - S_n(p,x) \right| \approx \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}}$$

Note que, fazendo x ser grande o suficiente, podemos tornar a soma parcial S_n tão próxima da função original quanto se queira!

<u>O ponto principal</u> é que uma dada série parcial (de número de termos finito) pode ser uma excelente representação de uma dada função calculada num valor assintótico. Esse tipo de série é chamada de <u>série assintótica</u> (ou semi-convergente).

Ex: Para a função exp. integral

$$E_1(x) = \int_x^\infty du \frac{e^{-u}}{u}$$

podemos encontrar a série assintótica válida quando $x \gg 1$.

Fazendo a integral por partes

$$\int_x^\infty du\,\frac{e^{-u}}{u} = \frac{-e^{-u}}{u}\Big|_x^\infty - \int_x^\infty du\,\frac{e^{-u}}{u^2}$$

$$= \frac{e^{-x}}{x} - \left[\frac{-e^{-u}}{u^2}\Big|_x^\infty - 2\int_x^\infty du\,\frac{e^{-u}}{u^3}\right]$$

$$= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2\int_x^\infty du\,\frac{e^{-u}}{u^3}$$ e assim

$$\int_x^\infty du\,\frac{e^{-u}}{u} = e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\right] - (-1)^n(n+1)!\int_x^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u^{n+2}}$$

Novamente, o teste da razão diria que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\text{termo } n|}{|\text{termo } n-1|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{x} \longrightarrow \infty$$

Entretanto, a série assintótica

$$\underset{x\gg 1}{E_1(x)} \sim \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots\right)$$

é muito boa para calcular $E_1(x)$ quando $x \gg 1$.

De fato, pegando os primeiros 4 termos da série

$$S(x) \equiv e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right)$$ podemos

obter (usando mathematica) que

$$\left|\frac{E_1(20) - S(20)}{E_1(20)}\right| \sim 0{,}0001$$

Em geral, seguindo Poincaré, dada uma função $f(x)$, uma série

$$S_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n},$$

e uma função resto definida por

$$R_n(x) \equiv f(x) - S_n(x)$$ a série

$S_n(x)$ será uma série assintótica se

$$\lim_{x\to\infty} x^n R_n(x) = 0$$ para um dado n (finito)

e

$$\lim_{n\to\infty} x^n R_n(x) \to \infty$$ para um dado x (finito).

Neste caso, escrevemos

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{a_n}{x^n}$$

Note que usamos $\approx$ e não $=$?

A $f(x)$ só é igual a essa série assintótica quando $x \to \infty$.

⊛ Séries assintóticas podem ser multiplicadas e o resultado é uma série assintótica do produto das funções envolvidas.

⊛ Séries assintóticas podem ser integradas termo a termo e o resultado será uma série assint. para a integral da função. Diferenciação termo a termo precisa de um certo cuidado.

⊛ O método do ponto de sela, que veremos na próxima aula, é um método muito poderoso para gerar séries assintóticas.

Outros exemplos...

⊛ A aproximação WKB, muito usada em mecânica quântica, é uma série assintótica.

⊛ Divergência da teoria de perturbação em eletrodinâmica quântica (Dyson, 1952)

Em QED, a amplitude para um dado processo físico, por exemplo, o espalhamento entre elétrons, é definido via diagramas de Feynman que descrevem todas as possíveis maneiras daquilo ocorrer. O parâmetro de expansão (no vácuo) é a constante de estrutura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

carga do eletron

e a amplitude fica

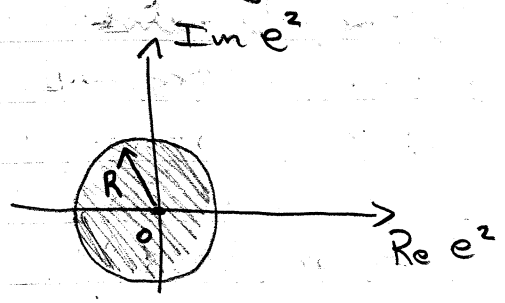
$$A(e^2) = A_0 + e^2 A_1 + e^4 A_2 + \cdots$$

Dyson mostrou (ou argumentou) que essa série diverge e deve ser interpretada como uma série assintótica.

A idéia é muito simples (e genial):

<u>Suponha que a série</u>

$A(e^2)$ convirja num dado raio de convergência R ao redor do $e^2 = 0$



Assim, $A(e^2)$ é uma função analítica de e^2 em $e^2 = 0$ e isso implica que, para valores de e^2 suficientemente próximos de zero,

$A(-e^2)$ será também uma função

analítica bem definida com uma série de potências convergente ali (note que tudo depende da hipótese de que $A(e^2)$ é analítica em $e^2=0$).
Mas esse mundo onde $A(-e^2)$ seria um mundo fictício onde cargos de sinais opostos seriam repelidas e cargos iguais seriam atraídas (lembrem da força de Coubmb e façam $e^2 \to -e^2$ lá).

Assim, o vácuo (estado de mínima energia sem nenhum elétron ou pósitron) seria instável com relação a formação de um estado patológico onde haveria um cluster enorme de elétrons de um lado do universo e um outro de pósitrons do outro lado. De fato, haveria geração espontânea de pares elétron-pósitrons que alimentaria mais e mais cada "nuvem" (de elétrons e pósitrons) Assim, como isso nunca pararia, é muito improvável que $A(-e^2)$ exista. Dessa forma, $A(e^2)$ não pode ser analítica em $e^2=0$ e a série de fato tem raio de convergência ZERO.

Entretanto, $A(e^2)$ é vista hoje em dia como uma série assintótica para $e^2 \to 0$ e QED é a teoria mais bem sucedida (em termos de comparações com experimentos) que possuímos.

Todas as expansões perturbativas em teoria quântica de campos são comumente entendidas como séries assintóticas.

Aula 12 29/08/2011

Método do ponto de Sela

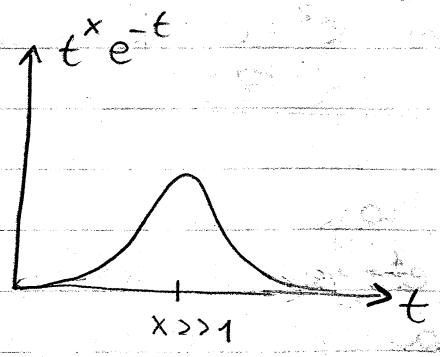
Hoje veremos um método muito importante para fazer aproximações de integrais.

Vamos começar com um exemplo onde faremos uma aproximação para $\Gamma(x)$ válida para $x \gg 1$ (e real).

A função gama (para $x \in \mathbb{R}$) é

$$\Gamma(1+x) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^x$$

Quando $x \gg 1$, o integrando se torna algo assim



É fácil ver que essa função tem um máximo. De fato

$$\frac{d}{dt}(e^{-t}t^x) = \left[-e^{-t}t^x + x e^{-t} t^{x-1}\right]$$

$$= 0 \Rightarrow \cancel{e^{-t}} t^x = x \cancel{e^{-t}} t^{x-1} \Rightarrow t = x$$

Como $t^x e^{-t} > 0$, $t = x$ é um máximo.

Agora, vamos fazer o seguinte:

Reescrevemos o integrando dessa forma

$$e^{-t}\, t^{x} = e^{-t}\, e^{x \ln t} = e^{-t + x \ln t} = e^{f(t)}$$

Define

$f(t) \equiv -t + x \ln t$ e agora expandimos $f(t)$ em torno do máximo $t = x$.

$$f'(t)\Big|_{t=x} = -1 + \frac{x}{t}\Big|_{t=x} = 0$$

$$f''(t)\Big|_{t=x} = -\frac{x}{t^2}\Big|_{t=x} = -\frac{1}{x}$$ Assim

$$f(t) = -x + x \ln x - \frac{1}{2x}(t-x)^2 + \dots$$

Assim,

$$\Gamma(1+x) = \int_0^\infty dt\, t^x e^{-t} = \int_0^\infty dt\, e^{x \ln t - t}$$

Para

$\boxed{x \gg 1}$

$$\simeq \int_0^\infty dt\, e^{-x + x\ln x - \frac{1}{2x}(t-x)^2}$$

$$\simeq e^{-x + x \ln x} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}}$$

$-\infty \rightarrow$ quando $x \gg 1$ podemos fazer $-\infty$ aqui.

Vamos fazer essa integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} \underset{\substack{t-x=\xi \\ dt=d\xi}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; e^{-\frac{\xi^2}{2x}}$$

$$= \sqrt{2\pi x}$$ Assim,

$$\lim_{x \gg 1} \Gamma(x+1) \simeq e^{-x+x\ln x}\sqrt{2\pi x} = \sqrt{2\pi x}\, e^{-x} x^{x}$$

Este é o primeiro termo da famosa série de Stirling, que é a série assintótica para $n! = \Gamma(n+1)$. De fato, pode-se mostrar que

$$\lim_{n \gg 1} n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^{n} e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right)$$

Veremos agora o <u>método do ponto de sela</u>, que é muito útil para encontrar expansões assintóticas para integrais da forma

$$I(s) = \int_C g(z)\, e^{s f(z)}\, dz \qquad (s \gg 1 \text{ - positivo})$$

onde C é um caminho no plano complexo cuja fronteira não contribui de maneira significante para integral. De fato, este método fornece o primeiro termo da expansão assintótica para $I(s)$ quando $s \gg 1$.

⊛ Escolheremos C de tal forma que a parte real de $f(z)$ tende para $-\infty$ e assim o integrando $\to 0$ na fronteira de C. Poderíamos também definir C como um contorno fechado.

⊛ Assumimos também que $g(z)$ é dominado por $e^{sf(z)}$ na região de interesse.

⊛ Claramente, se $s \gg 1$ o integrando será grande quando a parte real de $f(z)$ for grande (analogamente, se a parte real for pequena ou negativa, o integrando será pequeno).

⊛ Quando $s \gg 1$, a maior contribuição para o integrando virá da região onde a parte real de $f(z)$ toma seu valor máximo. Nesse caso, fora dessa região de máximo de $\mathrm{Re}\, f(z)$, o integrando pode ser desconsiderado em comparação.

De fato, fazendo

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$$ a

integral fica

$$I(s) = \int_C g(z)\, e^{s u(x,y)}\, e^{i s v(x,y)}\, dz$$

Agora, se impusermos a condição de que a parte imaginária do expoente,

$$i v(x,y) = i v(x_0,y_0) = i v_0 = \underline{\underline{cte}}$$ na

região do máximo de $u(x,y)$, podemos <u>aproximar</u> a integral da seguinte forma

$$I(s) \simeq e^{i s v_0} \int_C g(z)\, e^{s u(x,y)}\, dz$$

Fora da região de máximo de $u(x,y)$, a parte imaginária pode variar à vontade mas isso não importa pois nessa região longe do máximo o integrando é muito pequeno e esse fator de fase se torna irrelevante.

O máximo de $\mathrm{Re}\, s f(z) = s u(x,y)$ ocorre quando $u(x,y)$ é máximo. Isso implica em

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{no máximo}$$

Agora, assumindo que $f(z)$ é analítica nessa região, podemos usar as condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad e$$

assim, $\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ no máximo

e nós temos que achar os zeros dessa equação para encontrar os pontos de máximo.

⊛ IPC

É essencial lembrar que esse máximo de $u(x,y)$ é apenas um máximo local, ao longo do contorno C.

Nós sabemos, devido a condição de analiticidade, que ambos u e v são funções harmônicas (satisfazem a eq. de Laplace)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Assim, u não possui máximo (ou mínimo) global. Além disso, pontos singulares não estão incluídos pois $f(z)$ é analítica nessa região.

Dessa forma, o ponto onde $f'(z) = 0$ só pode ser um ponto de sela onde u é máximo numa direção e mínimo na outra.

Então, nosso problema se reduz a encontrar o contorno C que satisfaz as condições:

1) $u(x,y)$ tem um máximo no ponto de sela

2) O contorno deve ser tal que no ponto de sela $v(x,y)$ é constante.

Suficientemente próximo de z_0 (pto de sela), podemos expandir $f(z)$ em Taylor

$$f(z) = f(z_0) + \cancel{f'(z_0)} + \frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0) + \dots$$

$$f(z) - f(z_0) \approx \underbrace{\frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0)}$$

Esse termo é real (pois a parte imaginária $v(x_0,y_0)$ é constante) e negativo pois estamos saindo (ou descendo) do ponto

de sela. Assim,

$$f(z) - f(z_0) \approx \frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0) = -\frac{t^2}{2s}$$

onde definimos a variável real t.

Escrevendo $z - z_0$ em coord. polares

$$z - z_0 = \delta e^{i\alpha} \quad (\text{onde } \alpha = \underline{\underline{\text{cte}}},\ \delta > 0) \quad \text{temos que}$$

$$t^2 = -s f''(z_0)\delta^2 e^{2i\alpha} \quad \text{e já que } t \text{ é real}$$

$$t = \delta |s f''(z_0)|^{\frac{1}{2}} \quad (\text{escolhi } t > 0)$$

Agora substituímos a expansão para $f(z)$ na integral

$$I(s) = \int_C dz\, g(z) e^{sf(z)} \approx g(z_0) e^{sf(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \frac{dz}{dt} dt$$

(Jacobiano)

e $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dt}{dz}\right)^{-1} = \left(\frac{dt}{d\delta}\frac{d\delta}{dz}\right)^{-1} = |s f''(z_0)|^{-\frac{1}{2}} e^{i\alpha}$ e

obtemos

$$I(s) \approx \frac{g(z_0) e^{sf(z_0)} e^{i\alpha}}{|s f''(z_0)|^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Note que colocamos os limites da integral de $-\infty$ para ∞. Isso é permitido pois o integrando é essencialmente zero quando $t \neq 0$ (já que $s >> 1$).

A integral que sobrou é uma integral gaussiana simples e assim

$$\underset{s>>1}{I(s)} \simeq \frac{\sqrt{2\pi}\, g(z_0)\, e^{sf(z_0)}\, e^{i\alpha}}{|sf''(z_0)|^{\frac{1}{2}}}$$

$z_0 \rightarrow$ ponto de sela
onde $f'(z) = 0$
$\alpha \rightarrow$ fase constante no contorno através do pto de sela

⊛ Note que o contorno C foi escolhido de forma que
$\mathrm{Re}\, f(z) = \text{máx}$
$\alpha = \underline{\text{cte}}$.

⊛ Se houverem mais de um ponto de sela, teremos que adicionar a contribuição de cada um deles para a integral.

⊛ Note também que assumimos que a única parte relevante da integral veio da vizinhança imediata de z_0

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u(x,y) << u(x_0,y_0)$$

se $(x,y) \neq z_0 = (x_0,y_0) \rightarrow$ Pto de sela

Sobre todo o contorno fora de $z_0 = x_0 + i y_0$. Em geral, essa condição tem que ser checada caso a caso.

Ex: Expressão assintótica da função fatorial $s!$

$$s! = \int_0^\infty dt\, t^s e^{-t} \underset{t=zs}{=} s^{s+1} \int_0^\infty dz\, e^{s\overbrace{(\ln z - z)}^{f(z)}}$$

$\rightarrow$ contorno C segue eixo real

$\boxed{s > 0}$ Vamos calcular o pto de sela

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz}(\ln z - z) = \frac{1}{z} - 1 = 0$$

$\Rightarrow z = 1$ é o ponto de sela. Fazendo

$$z - 1 = \delta e^{i\alpha}$$

onde $\delta \ll 1$ (pois estamos perto do ponto de sela).

Usando isso obtemos (expansão perto do pto de sela)

$$f(z) = \ln z - z = \ln(1 + \delta e^{i\alpha}) - (1 + \delta e^{i\alpha})$$

$\delta \ll 1$

$$= \delta e^{i\alpha} - \frac{\delta^2 e^{2i\alpha}}{2} + \dots - 1 - \delta e^{i\alpha}$$

$$= -1 - \frac{\delta^2}{2} e^{2i\alpha} + \dots$$

Em geral
$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$
$|z| \to 0$

O integrando toma valor máximo (e^{-s}) no ponto de sela no contorno C ao longo do eixo real $(\alpha = 0)$

Assim, uma vez que

$$f''(z) = -\frac{1}{z^2} \quad e \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ponto} \\ \text{de sela}}}{f''(1)} = -1 \quad \text{temos}$$

$$\underset{s \gg 1}{s!} \simeq \left. \frac{s^{s+1}\sqrt{2\pi}\, e^{s(\ln z - z)}}{s^{\frac{1}{2}}} \right|_{z=1} = \sqrt{2\pi s}\; s^s e^{-s} \quad //$$

Exercício: Escreva

$$\underset{s \gg 1}{\Gamma(s)} \sim \sqrt{2\pi}\, s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} \left(1 + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \cdots\right) \quad e$$

Use $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para encontrar

$A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{1}{288}$ e etc...

Método da fase estacionária

Considere a integral

$$I(\alpha) = \int_C e^{i\alpha f(z)}\, dz \qquad \alpha \gg 1$$

e $f(z)$ é real ao longo de C. A menos que $f'(z)=0$, as contribuições para $I(\alpha)$ vindo da vizinhança do ponto de sela irão se cancelar devido ao caráter rapidamente oscilatório da integral. Assim procuramos por pontos do contorno onde $f'(z)=0$ e usamos o resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{i\alpha u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{i(\pi/4)}$$

para chegar em uma fórmula similar aquela derivada anteriormente.

Nesse caso, escolhemos C onde $\mathrm{Re}\, f(z) = \underline{\underline{cte}}$.

Aplicação do método da fase estacionária em física

Integrais de trajetória de Feynman

Mecânica clássica $\equiv$ princípio da mínima ação.

Ex: Leis de Newton

$$m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$$ podem ser encontradas via

$$S = \int dt \left[\frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} - V(\vec{x})\right]$$ fazendo

$$\frac{\delta S}{\delta \vec{x}} = 0 \Rightarrow$$ <u>Derivada funcional.</u>

No mínimo da ação $\frac{\delta S}{\delta \vec{x}} = 0$.

Mecânica quântica (à la Feynman)

Amplitude de probabilidade para uma partícula ser encontrada em x_1 e depois em x_2

$$\langle x_1 | x_2 \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{D}\vec{x}\, e^{\frac{iS}{\hbar}} \qquad \text{Se } \frac{S(x_{cl})}{\hbar} \to \infty$$

Expande S ao redor da ação clássica (mínimo da ação)

$$S = S_{cl} + \cancel{\frac{\delta S}{\delta \vec{x}}\Big|_{\vec{x}_{cl}}} + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_{cl})^2 \frac{\delta^2 S}{\delta \vec{x}^2}\Big|_{x_{cl}} \qquad \text{Se } \hbar \to 0$$

$$\langle x_1 | x_2 \rangle \sim e^{\frac{i S_{cl}(x_{cl})}{\hbar}}$$

Isso foi visto por Dirac mas Feyman revolucionou a física com essa nova maneira de entender a mecânica quântica.