Aula 13 31/08/2011

Adiar P2 para 24/10/2011

Série de Fourier

Considere a série de senos e cossenos do tipo ($x \in \mathbb{R}$)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \right]$$

Provável não ver porque essa matéria está a pouco depois

essa série é chamada série trigonométrica

se $x \in \mathbb{R}$. Note que $0 \leq \begin{matrix} |\cos nx| \\ |\operatorname{sen} nx| \end{matrix} \leq 1$

Em geral, essa série converge sob condições bem fracas impostas aos coeficientes

a_n e b_n.

Se a série trigonométrica converge (absolutamente ou não) ela representa uma função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \right]$$

Qual a grande com essas séries não polinomiais?

Lembrem que para uma função analítica numa dada região é garantida a existência da série de Taylor naquela região e essa série é única.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (f(z) \text{ analítica em } z=0)$$

Vimos também que é possível generalizar essa série de séries de potências e obter a série de Laurent (que também é única) ao redor de uma singularidade da função, i.e.,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

⊛ A série de Laurent (e seu caso particular - a série de Taylor) quando existem descrevem COMPLETAMENTE a função naquela região.

Entretanto, note que a série de Laurent não fica bem definida para funções descontínuas

<u>Fourier</u> descobriu que séries trigonométricas podem ser usadas para descrever

funções descontínuas (por fato, toda a teoria de distribuições começou a ver daí).

(*) Note que, devido a sua própria definição, séries trigonométricas descrevem somente

funções Periódicas (devido ao $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$)

de período 2π e múltiplos (podemos, eventualmente encontrar funções com período $-\infty \to \infty$).

Nós iremos calcular a fórmula geral para os coeficientes caqui há pouco.

Em geral, as condições suficientes (mas não necessárias) para que a série

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

seja válida são:

1) $f(x)$ possui apenas um número finito de descontinuidades finitas.

2) $f(x)$ possui apenas um número finito de valores extremos, máximos e mínimos, no intervalo $[0, 2\pi]$.
(ou $[-\pi, \pi]$)

Funções que obedecem essas condições são chamadas de piecewise regular ou "contínua por pedaços" (ou regular).

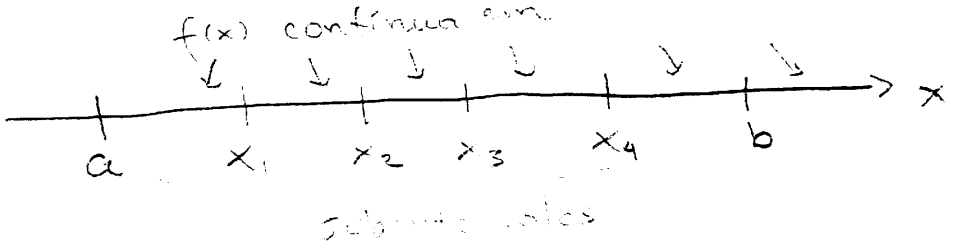
Em geral, para a grande maioria dos exemplos vistos em aplicações possuí séries em física, é necessário saber apenas esses dois teoremas (e definições)

<u>Definição 1</u>: Uma função definida num intervalo fechado $a \leq x \leq b$ é (contínua por pedaços) <u>seccionalmente contínua</u> quando o intervalo pode ser dividido em um <u>número finito</u> de subintervalos tais que em cada subintervalo

a) $f(x)$ é contínua
b) $f(x)$ possui limites finitos nas extremidades esquerda e direita de cada subintervalo.

Isso significa que $\lim_{\varepsilon \to 0^+, 0^-} f(x_i + \varepsilon)$ <u>existe</u> para cada subintervalo e nas extremidades

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f(a+\varepsilon)$ e $\lim_{\varepsilon \to 0} f(b-\varepsilon)$ existem.

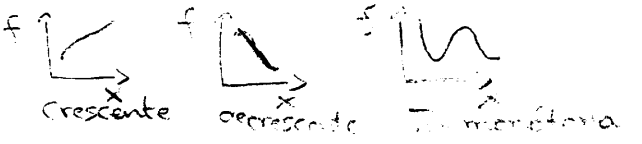


a) $f(x)$ é seccionalmente suave (ou por pedaços) se $f(x)$ é contínua por pedaços e $f'(x)$ também. Analogamente, se $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas por pedaços, então $f(x)$ é "muito suave" por pedaços.

<u>Definição 2</u>: uma função definida num intervalo fechado $a \leq x \leq b$ satisfaz as <u>condições de Dirichlet</u> se

a) $f(x)$ é contínua por pedaços.

b) O intervalo (a, b) pode ser dividido em um número finito de subintervalos onde $f(x)$ é <u>monótona</u>.



<u>Teorema 1</u>: Se $f(x)$ é muito suave por pedaços no intervalo $(-L, L)$ então sua série de Fourier converge para

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2}\left[f(x-\varepsilon) + f(x+\varepsilon)\right] \qquad -L < x < L$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2}\left[f(-L+\varepsilon) + f(L-\varepsilon)\right] \qquad (x = \pm L)$$

Teorema 2: A afirmativa com relação aos limites no teorema 1 é verdadeira também se $f(x)$, ao invés de ser "muito suave" por pedaços, satisfaz as condições de Dirichlet no intervalo entre $-L \leq x \leq L$.

(*) Em geral, trabalharemos com funções que obedecem as condições de Dirichlet.

Completeza da base cos nx, sen nx

Vamos expressar cos nx e sen nx na forma exponencial usando a fórmula de De Moivre

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

$\boxed{x \in \mathbb{R}}$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n) e^{-inx}$$

Assim,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \quad \text{onde}$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad n > 0 \quad \text{e} \quad C_0 \equiv \frac{a_0}{2}$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

Agora, chame $e^{ix} = z$. Assim

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$ → equivalente a uma série de Laurent no círculo de raio 1 (no plano complexo)

Como a série de Laurent, quando existem é única, vemos que o conjunto (ou base) e^{inx} forma um conjunto completo no intervalo $[0, 2\pi]$ (ou $[-\pi, \pi]$ não importa).

Esse argumento é "bonitinho" mas está longe de mostrar de fato a completeza de um dado conjunto de funções. Nós veremos a idéia de completeza em detalhe quando estudarmos o problema de Sturm-Liouville.

Note, entretanto que sen nx e cos nx no intervalo $[-\pi, \pi]$ são <u>funções ortogonais</u>, ou seja,

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \, \text{sen}\, mx \, \text{sen}\, nx = \begin{cases} \pi \, \delta_{mn} & m \neq 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi \, \delta_{mn} & m \neq 0 \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ esse é [illegible] $\sin mx$ e [illegible] é par

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \, \sin mx \, \cos nx = 0 \qquad \forall \, m, n \in \mathbb{Z}$$

Como vocês provariam isso?

O jeito mais fácil é primeiro mostrar que

$\rightarrow$ ortogonalidade da base e^{inx}.

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \, \left(e^{imx}\right)^* e^{inx} = 2\pi \, \delta_{mn}$$

Isso é trivial. De fato,

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \, e^{i(n-m)x} = \begin{cases} \text{se } n \neq m \Rightarrow n-m = p \in \text{inteiro} \neq 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} dx \, e^{ipx} = \left.\dfrac{e^{ipx}}{ip}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \text{Se } n = m \\ \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi \end{cases}$$

Assim, mostramos facilmente a identidade acima.

Agora, fica fácil mostrar aquelas identidades que definiram a ortogonalidade de $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$. De fato,

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \, e^{i(n-m)x} = 2\pi \, \delta_{mn}$$

abre $e^{i(m-n)x}$ via De Moivre

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\cos(m-n)x + i\,\mathrm{sen}(m-n)x\right] = 2\pi\,\delta_{mn}$$

(comparando parte real e imaginária)

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos(m-n)x = 2\pi\,\delta_{mn}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \mathrm{sen}(m-n)x = 0$$ → trivial pelo teorema do "sabiá".

Agora, usando propriedades gerais de senos e cosenos (teorema do "sabiá"), vemos que

$$\frac{1}{2}\cos(m-n)x - \frac{1}{2}\cos(m+n)x = \mathrm{sen}\, mx\, \mathrm{sen}\, nx$$

e assim

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \mathrm{sen}\, mx\, \mathrm{sen}\, nx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2}\cos(m-n)x$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{\cos(m+n)x}{2}$$

$$= \begin{cases} \text{se } m = n \neq 0, \text{ obtemos } \pi \\ \text{se } m \neq n, \text{ obtemos } 0 \end{cases}$$ assim

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \mathrm{sen}\, mx\, \mathrm{sen}\, nx = \pi\,\delta_{mn}$$ //

Mostre que $\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \cos mx = \pi \delta_{mn}$

Agora, podemos calcular os coeficientes da Série de Fourier. De fato,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2} + \int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Como a série existe (por hipótese) podemos comutar $\int_{-\pi}^{\pi}$ com a $\sum_{n=1}^{\infty}$. Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) = a_0 \pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} nx}_{0 \text{ pois } \operatorname{sen} nx \text{ é ímpar}}$$

$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx = \pi \delta_{n0}$ e, como na soma $n > 0$, esse termo não contribui. Assim

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)$$ → é como se fosse a média de $f(x)$ no intervalo

Vamos mostrar agora que

$$\boxed{\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos mx \quad , \quad n \geq 0 \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\,\mathrm{sen}\, mx \quad , \quad n > 0 \end{aligned}}$$

De fato,

zero!

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos mx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{a_0}{2}\cos mx$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n\,\mathrm{sen}\, nx\right]\cos mx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos nx \cos mx$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \mathrm{sen}\, nx \cos mx$$

zero pois sen nx e cos mx são ortogonais

Então, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos mx = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \cos mx$

pelo ortogonalidade

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{m,n} = a_m$$

Analogamente, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen}(nx) f(x)$

Essa série, construída com esses coeficientes é chamada de <u>série de Fourier</u>.

Ex: $f(x) = x^2$. Os coeficientes são

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2 = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \underbrace{x^2}_{\text{par}}\, \underbrace{\operatorname{sen} nx}_{\text{ímpar}} = 0 \qquad \underline{\underline{n>0}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2 \cos nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2 e^{inx}$$

Partes:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2 e^{inx} = \frac{e^{inx}}{in} x^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{e^{inx}}{in} 2x$$

Integração por partes de novo

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{e^{inx}}{in}\, 2x = -\frac{e^{inx}}{(in)^2}\, 2x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{2e^{inx}}{(in)^2}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[2\pi e^{in\pi} + 2\pi e^{-in\pi}\right] = \frac{4\pi}{n^2}\cos(n\pi) + \underbrace{\frac{2}{(in)^3}\, e^{inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0}$$

Então, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2 e^{inx} = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n$. Assim,

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \qquad n > 0$$

Então,

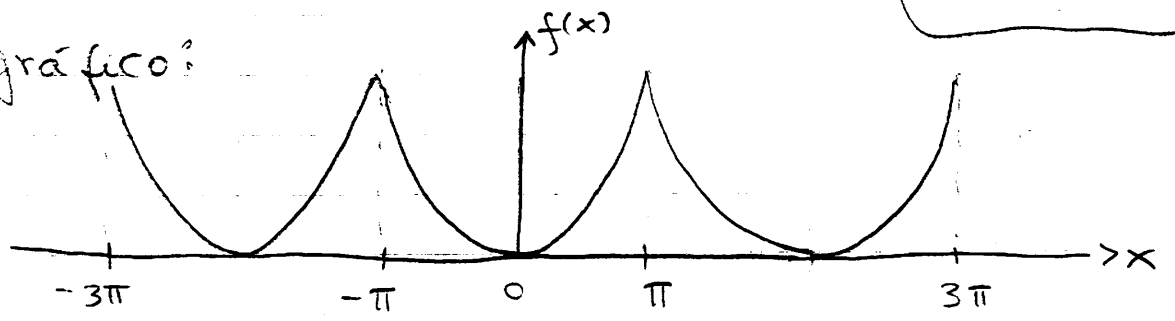
$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

Se $x = \pi$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

gráfico:



⊛ Fica claro que a série de Fourier representa a extensão periódica dos valores de $f(x)$ no intervalo $(-\pi, \pi)$.

⊛ Fica claro também, através desse exemplo, que se

$n>0$

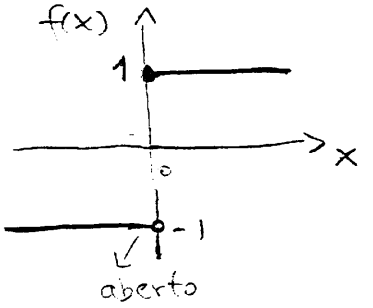
- $f(x)$ é par $\rightarrow b_n = 0$ (não há termos com $\operatorname{sen} nx$)

- $f(x)$ é ímpar $\rightarrow a_n = 0$ $n \geq 0$ (não há termos com $\cos nx$)

Aula 14, 2/9/11

Ex: Considere agora a função $\boxed{\text{descontínua}}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



Vamos calcular os coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx\,(-1)$$

$$a_0 = 0 \;//$$

Note que essa função é como se fosse a função sinal

$$\operatorname{Sign} x \equiv \frac{x}{|x|} \quad \text{se } x \neq 0.$$

A $\operatorname{sign} x$ é ímpar. Logo, esperamos que $a_n = 0$. De fato,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx\,(-\cos nx) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx \cos nx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx\,(-\operatorname{sen} nx) \quad + \quad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\,\operatorname{sen} nx$$

$x \to -x$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\,\operatorname{sen} nx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\,\operatorname{sen} nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\,\operatorname{sen} nx \neq 0 \quad \text{em geral.}$$

Fazendo separadamente em detalhe

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\,\operatorname{sen} nx = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left\{\int_{0}^{\pi} dx\, e^{inx}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{inx}}{in}\Big|_{0}^{\pi}\right\} = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{in\pi}}{in} - \frac{1}{in}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left\{\frac{(e^{in\pi}-1)(-in)}{n^2}\right\} = \frac{2}{\pi n^2}\operatorname{Im}\left\{(\cos n\pi$$

$$+ \cancel{i\operatorname{sen} n\pi} - 1)(-in)\right\} = \frac{2}{\pi n^2}\operatorname{Im}\left\{[(-1)^n - 1](-in)\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = \text{par} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{se } n = \text{ímpar} \end{cases}$$

Assim,

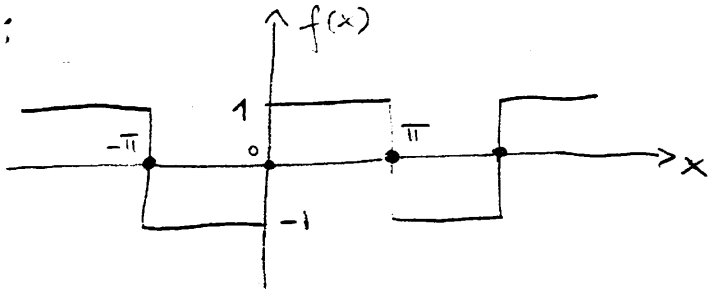
$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = \text{par} \\ \frac{4}{\pi n}, & \text{se } n = \text{ímpar} \end{cases}$$

e a Série de Fourier será

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \quad \text{ou}$$

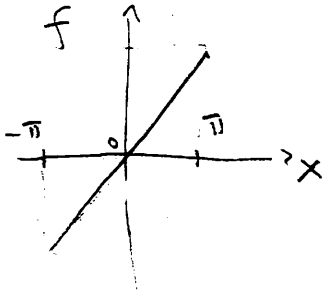
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \operatorname{sen}(2n+1)x \quad //.$$

Gráfico:



Note que $f(0) = 0$ de acordo com nossa série acima. Isso mostra o fato geral mencionado antes que, numa descontinuidade a série de Fourier converge para a "média aritmética" nesse caso esse valor é zero já que essa função é -1 para $x<0$ e 1 para $x>0$.

Ex: "Onda de Serra"



$f(x) = x$ se $-\pi \leq x \leq \pi$

Série de Fourier fica com coeficientes

$a_n = 0$ pois o $f(x)$ é ímpar.
$n \geq 0$

por partes

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \; x \operatorname{sen} nx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\, x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right.$$

$-(\cos n\pi)\pi - \cos(-n\pi)\pi$

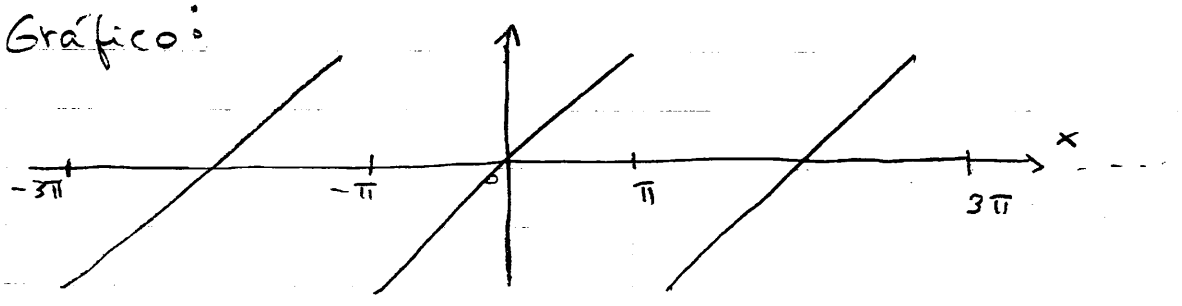
$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi} dx \; \frac{\cos nx}{n} \right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \; \frac{\cos nx}{n}$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \cancel{\frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}}$$

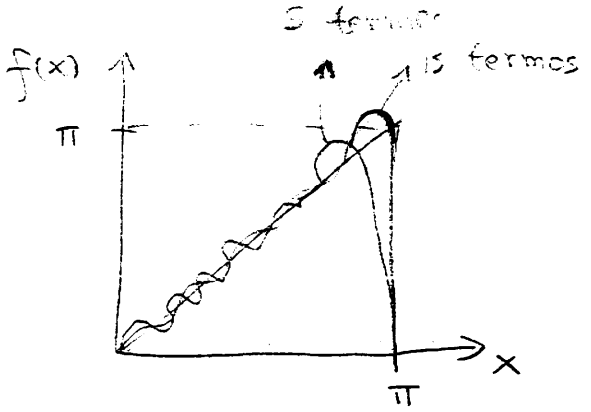
$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$ Assim,

$$\boxed{x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx}$$

Gráfico:



Imagine agora que consideremos apenas um número finito de termos...



Note que:

1) Quando incluímos mais termos na série a acurácia com a qual a série finita representa f(x) aumenta.

2) Todas as curvas vão para zero quando $x = \pi$.

3) Na vizinhança de $x = \pi$ (onde a descontinuidade aparece) a série tem um "overshoot" que persiste e não diminui quando incluímos mais termos na série. Esse é um exemplo do conhecido "fenômeno de Gibbs", que vocês podem ler mais sobre no livro do Arfken. (cap. 14)

Truque envolvendo série de Fourier

Considere a soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{(série harmônica)}$$

Essa série infinita obviamente diverge. Porém, Considere a série de Fourier

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$$ $\longrightarrow$ essa série não converge quando $x \to 0$ ou $x \to 2\pi$.

$x \in (0, 2\pi)$

Agora, considere

$$S(r) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos nx}{n}$$

essa série é absolutamente convergente se $|r| < 1$.

(supomos agora $0 < r < 1$)

Claramente, $\underset{r \to 1}{S(r)} = S$. Agora, será que $S(r)$ pode ser escrito em termos de funções elementares?

SIM! Para ver isso, primeiro escreva $\cos nx = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ e assim

$$S(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n e^{inx}}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n e^{-inx}}{2n}$$

Defina $z = r e^{ix}$ e assim

$$S(r) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{n}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-z) - \frac{1}{2}\ln(1-z^*)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-e^{ix}r) - \frac{1}{2}\ln(1-re^{-ix})$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left[1 - 2r\cos x + r^2\right]$$

$\lim r \to 1$ encontramos

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left[2 - 2\cos x\right]^{\frac{1}{2}}$$

mas $2 - 2\cos x = 2(1-\cos x) = 4\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \underbrace{-\ln\left(2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\right)}_{\text{Diverge se } x\to 0,\ x\to 2\pi} \qquad x \in (0, 2\pi)$$

Note que, por essa fórmula, quando $x = \pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln\left(2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = -\ln 2$$

Mudança de Intervalo

Até agora, nosso intervalo em x era de 2π (ou $0 \to 2\pi$ ou $-\pi \to \pi$). Isso não é uma restrição para a aplicabilidade da série de Fourier. De fato, se $f(x)$ tem período $2L$, podemos escrever

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(Note que $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ tem período $2L$).

e os coeficientes ficarão.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dt\, f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dt\, f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(Mostre essas relações)

⊛ Obviamente, qualquer intervalo $(x_0, x_0 + 2L)$ serve. Escolhemos de $-L \to L$ por conveniência.

Fatos interessantes...

1) Naquele exemplo onde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

a série de Fourier era tal que o n-ésimo coeficiente ia $\sim \frac{1}{n}$. Esse tipo de dependência é o mesmo que ocorre na série harmônica, que é divergente. Convergência, nesse caso para esse tipo de série é bem lenta. O fato de que $a_n \sim \frac{1}{n}$ geralmente ocorre quando a função tem descontinuidades.

2) Se $f(x)$ é contínua (mas talvez com derivadas descontínuas), geralmente o n-ésimo coeficiente $\sim \frac{1}{n^2}$ (convergência é muito mais rápida).

Integração da Série de Fourier

Se a série de Fourier de $f(x)$ converge podemos fazer a integral termo a termo. (trocar $\int \Sigma \to \Sigma \int$)

$$\int_{x_0}^{x} d\tilde{x}\, f(\tilde{x}) = a_0 \frac{\tilde{x}}{2}\Big|_{x_0}^{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\,\mathrm{sen}\, n\tilde{x}\Big|_{x_0}^{x} - \frac{b_n}{n}\cos n\tilde{x}\Big|_{x_0}^{x}\right]$$

Note que a integral da série, em geral, convergirá mais rápido do que a série original devido ao fator extra $\sim \frac{1}{n}$ que vem da integração de $\cos nx$ e $\mathrm{sen}\, nx$.

Derivada da Série de Fourier

Integração, como vimos acima, melhora as propriedades de convergência da série de Fourier. Derivadas, por outro lado, em geral pioram bastante a convergência da série.

Por exemplo: Considere a série de Fourier para

$$f(x) = x \qquad -\pi < x < \pi$$

Vimos anteriormente que

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

Vamos agora tirar a derivada $\frac{d}{dx}$ dos dois lados... Encontramos

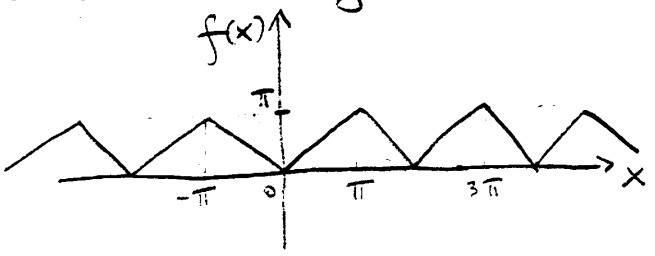
$$1 = 2 \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$ e agora?

Trocando $\frac{d}{dx} \sum_n \rightarrow \sum_n \frac{d}{dx}$ encontramos

$$1 = 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos nx}_{\text{essa série não é convergente !}}$$

Agora, se a sua série convergir mais rapidamente, tudo está ok.

Ex: Onda triangular



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

A série de Fourier só tem cosenos (explique porquê) e encontramos

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

Note que o coeficiente $\lim_{n \gg 1} a_n \sim \frac{1}{n^2}$.

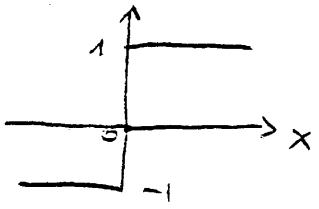
Tirando a derivada dos dois lados

$$\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{Bmatrix} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{(2n+1)}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{Bmatrix} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$$

que é exatamente a série de Fourier

que calculamos anteriormente para a função



lembram? Nesse caso tudo ficou ok pois a série de Fourier original convergia rapidamente devido ao fato de que o n-ésimo coeficiente $\sim \frac{1}{n^2}$.

Em geral, por causa desse fator $\sim n$ que aparece devido a diferenciação, a rapidez da convergência da série pode diminuir bastante e, às vezes, transformar a série em uma série divergente.

X AULA 15, 16/9/2011 X

Convergência em média das séries de Fourier

Vamos primeiro lembrar da idéia de <u>convergência ponto a ponto</u>. Imagine que você tenha uma função

$f(x)$ em $a \leq x \leq b$ e você tenha uma sequência de funções $\{f_n(x)\}$. Essa sequência converge para $f(x)$ <u>ponto a ponto</u> se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{em } a \leq x \leq b$$

O teorema 1, enunciado na pág. 168, é muito "forte" no sentido de que, quando $f(x)$ for muito suave a série de Fourier converge nesse caso <u>ponto a ponto</u>.

Veremos agora que a série de Fourier converge em média.

Vamos lembrar um pouco de Física experimental I ...

Imagine que você tenha um conjunto de dados experimentais $\{y_i\}$ e você quer saber quão bem sua curva teórica $\{\bar{y}_i\}$ representa os dados. Como você mede isso?

<u>Desvio médio quadrado</u>: Para uma seqüência de n pontos experimentais

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2 \geq 0$$

Defina agora $n = \frac{L}{\Delta x}$ onde $L = b - a$ e tomemos $\Delta x \to 0$, $n \to \infty \Rightarrow L$ finito $\neq 0$

$$D = \frac{1}{L} \int_a^b dx \, [y(x) - \bar{y}(x)]^2 \geq 0$$

Assim, caso existam alguns parâmetros

por ser determinados em $\bar{y}(x)$, você poderia encontrá-los minimizando D. Isso faria com que a diferença entre as funções $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ fosse mínima.

— Aula 16, 19/09/2011

Em geral, dizemos que uma ~~sua~~ sequência de funções converge em média para uma outra função se

Sequência: $\{f_n(x)\}$ função: $f(x)$

Convergência em média num intervalo $[a,b]$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx = 0}$$

⊕ Note que, convergência ponto a ponto definida via

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$ (convergência ponto a ponto).

NÃO necessariamente implica em convergência em média.

Analogamente, convergência em média não implica em convergência ponto a ponto. Esses conceitos são equivalentes somente se pudermos comutar $\lim_{n\to\infty}$ com a $\int_a^b dx$ (o que não é sempre possível)

Então, depois dessa discussão, podemos <u>definir</u> a integral

$$D \equiv \int_a^b dx \left[f(x) - g(x)\right]^2 \quad \text{para 2}$$

funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas para $x \in [a,b]$ como <u>desvio quadrado</u> de $f(x)$ e $g(x)$.

Vamos agora aplicar essa idéia às séries de Fourier.

Suponha que tenhamos <u>uma $f(x)$</u> dada em $x \in [-\pi, \pi]$ e que queremos <u>aproximar</u> $f(x)$ pela <u>série trigonométrica</u> com um número <u>N de termos (finito)</u>

(assume que converge)

$$g_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx\right)$$

onde A_k e B_k <u>não são a priori conhecidos.</u>

Podemos <u>obter A_k e B_k</u> de forma que o desvio <u>quadrado D</u> entre $f(x)$ e $g_n(x)$ <u>seja mínimo</u> para $x \in [-\pi, \pi]$. Assim

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x) - g_n(x)\right]^2 \longrightarrow \text{mínimo}$$

Vamos colocar todos os termos de forma explícita em D_n.

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x) - g_n(x)\right]^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f^2(x) - 2 f(x) g_n(x) + g_n(x)^2\right]$$

cada termo com $g_n(x)$ fica

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\, g_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{A_0}{2} f(x) + \sum_{k=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, B_k f(x) \operatorname{sen} kx$$

$$= \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) + \sum_{k=1}^{N} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \cos kx + \sum_{k=1}^{N} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \operatorname{sen} kx$$

agora

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, g_n^2(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx\right] \times \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{N} A_\ell \cos \ell x + B_\ell \operatorname{sen} \ell x\right]$$

$$= \frac{A_0^2 \pi}{2} + \frac{A_0}{2}\left[\sum_{\ell=1}^{N}\left(A_\ell \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos \ell x} + B_\ell \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} \ell x}\right)\right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} A_k A_\ell \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \cos \ell x}_{\pi \delta_{k\ell}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k A_0}{2} \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx}$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} A_k B_\ell \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \operatorname{sen} \ell x$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} B_k A_\ell \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} kx \cos \ell x$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} B_k B_\ell \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \ell x$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} B_k \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} kx$$

Usando as relações de ortogonalidade de $\operatorname{sen} kx$ e $\cos kx$, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, g_n^2(x) = \frac{A_0^2 \pi}{2} + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} \left[A_k A_\ell \pi \delta_{k\ell} + B_k B_\ell \pi \delta_{k\ell} \right]$$

$$= \frac{A_0^2 \pi}{2} + \sum_{k=1}^{N} (A_k^2 + B_k^2) \pi.$$ Assim,

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) - 2 \sum_{k=1}^{N} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx\, f(x)$$

$$-2 \sum_{k=1}^{N} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \operatorname{sen} kx + \frac{A_0^2 \pi}{2} + \sum_{k=1}^{N} (A_k^2 + B_k^2) \pi$$

Vamos agora minimizar D_n com relação aos A_k, B_k.

$D_n = D_n(A_k, B_k)$ e assim, no mínimo,

$$\frac{\partial D_n}{\partial A_0} = 0 = -\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) + A_0 \pi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)}$$

Esse é o valor de A_0 que minimiza D_n.

$$\frac{\partial D_n}{\partial A_\ell} = 0 = -2A_\ell \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos \ell x + 2A_\ell \pi = 0$$

$\ell > 0$

$$\Rightarrow \boxed{A_\ell = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos \ell x} \qquad \ell > 0$$

$$\frac{\partial D_n}{\partial B_\ell} = 0 = -2B_\ell \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\,\mathrm{sen}\,\ell x + 2B_\ell \pi = 0$$

$\ell > 0$

$$\Rightarrow \boxed{B_\ell = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\,\mathrm{sen}\,\ell x} \qquad \ell > 0$$

Assim, vemos que os valores dos coeficientes A_k e B_k que minimizam D_n são exatamente aquelas expressões vinda da Série de Fourier!

⊗ Note que de fato temos um mínimo pois

$$\frac{\partial^2 D_n}{\partial A_\ell^2} = 2\pi > 0 .$$

Vamos agora substituir esses novos A_k e B_k no D_n para calcular

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f^2(x) + A_0 \pi \left[\frac{A_0}{2} - \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{f(x)}{\pi} \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} A_k \pi \left[A_k - 2 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \cos kx \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} B_k \pi \left[B_k - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \operatorname{sen} kx \right]$$

no mínimo...

$$D_n \Big|_{min} = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f^2(x) - \left[\frac{a_0^2}{2} \pi + \pi \sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2 \right]$$

onde

$$a_k \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \cos kx$$

$$b_k \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \operatorname{sen} kx$$

Note que $\underset{\text{por definição}}{D_n \geq 0} \Longrightarrow D_n \Big|_{min} \geq 0$ e assim

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f^2(x)$$

Agora, nesse ponto podemos tomar $n \to \infty$, a série trigonométrica com número de termos finito vira uma série de Fourier e assim

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f^2(x)}$$

Essa é a desigualdade de Bessel

Nesse aspecto, a série de Fourier é considera uma <u>representação fiel</u> (ou adequada) da função <u>$f(x)$ se</u>

$$\lim_{n \to \infty} D_n \Big|_{min} = 0$$

o que equivale a dizer que converge em média pois

$$\lim_{n \to \infty} D_n \Big|_{min} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x) - g_n^{Fourier}(x) \right]^2 = 0$$

↓ coeficientes a_k e B_k.

Assim, se a série de Fourier de $f(x)$ convergir em média para $f(x)$, a desigualdade de Bessel se torna a famosa relação de Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f^2(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k^2 + b_k^2)$$

onde $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \cos kx \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \operatorname{sen} kx \qquad //.$

⊛ Dizemos que $\{\operatorname{sen} kx, \cos kx\}_{k=0,1,\ldots}$ forma um <u>conjunto completo</u> em relação a uma dada classe de funções <u>se a relação de Parseval é satisfeita</u> para essa classe de funções.

<u>Teorema</u>: O sistema $\{\operatorname{sen} nx, \cos nx\}_{n=0,1,\ldots}$ é <u>completo</u> para todas <u>as funções contínuas por partes</u> no intervalo <u>$x \in [-\pi, \pi]$</u>.

⊛ Note que existe algo similar a relação de Parseval para espaços vetoriais de dimensão finita.

Defina $\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} a_i \hat{e}_i$ onde $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ base ortonormal

produto escalar é definido por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{N} a_i \hat{e}_i \sum_{k=1}^{N} b_k \hat{e}_k = \sum_{i,k=1}^{N} a_i b_k \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k$$

$$= \sum_{i}^{N} a_i b_i$$

Agora $\vec{a}\cdot\vec{a} = \sum_{k=1}^{N} a_k^2$ os coeficientes na base

Fazendo a analogia

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\, g(x) \qquad e$$

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} a_i \hat{e}_i \longrightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left[a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right]$$

Vemos que

$\hat{e}_i$ é base e assim temos o sinal de =

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f^2(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2$$

(* Note que a base $\{\operatorname{sen} nx, \cos nx\}$ é ortogonal mas não ortonormal). $n = 0, 1, 2, \ldots$

Comentário sobre Séries de Funções

Suponha que tenhamos uma soma parcial (com n termos) de funções da variável (real) x

$$S_n(x) \equiv u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

A soma dessa série seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \equiv \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

Vamos ver agora a idéia de convergência uniforme

(Revisão sobre)

Convergência uniforme

Se, para $\forall\ \varepsilon > 0$ existe um número N, independente de x no intervalo $a \leq x \leq b$ de tal forma que

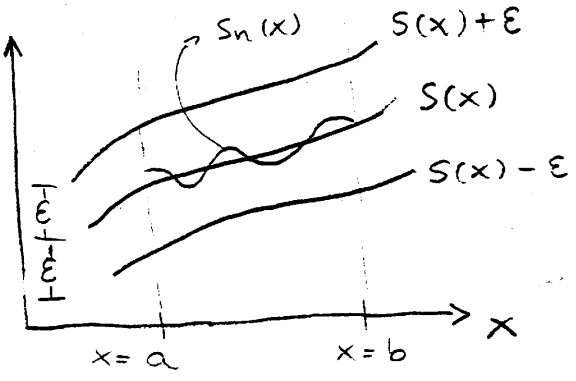
$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall\ n \geq N$$

dizemos que a série é uniformemente convergente no intervalo $[a,b]$.

O que isso quer dizer é: para uma série ser uniformemente convergente, tem que ser possível encontrar um número finito N de tal forma que a "cauda" da série infinita

$\left| \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i(x) \right|$, será menor que um número ε arbitrariamente pequeno $\forall\ x$ no intervalo.

Graficamente, seria assim



Ex: Suponha que

$$S(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} u_\ell(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{x}{[(\ell-1)x+1][\ell x+1]}$$

Defina a soma parcial

$$S_n(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x}{[(\ell-1)x+1][\ell x+1]}$$

e formalmente $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$

Note que $S_n(x)$ pode ser somada e o resultado é

$$S_n(x) = \frac{nx}{(1+nx)}$$

n finito

(prove isso por indução matemática)

Agora, note que

$$S(0) = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty}(S_n(0)) = 0$$

toma o $x=0$ primeiro depois faz limite

Porém, $S(x\neq 0) = \lim_{n\to\infty} S_n(x\neq 0) = 1$

Assim, existe uma descontinuidade na função $S(x)$ em $x=0$. Porém, note que a série parcial $S_n(x)$ é contínua para $0 \leq x \leq 1$, $\forall n$ finito.

Dessa forma, $|S(x) - S_n(x)|$ não vai ser menor que um ε (suficientemente pequeno) para todo n finito. Não converge uniformemente.

Essa série não converge uniformemente.

Da definição de convergência uniforme, pode-se mostrar que qualquer série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

não pode convergir uniformemente em qualquer intervalo que inclui uma descontinuidade de $f(x)$.

Teste M de Weierstrass

O teste mais comum para estudar se uma série converge uniformemente é o teste M de Weierstrass. Basicamente, isso funciona dessa forma:

"Se pudermos construir uma série de números $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ onde $M_i \geq |u_i(x)|$ $\forall x$ no intervalo $[a,b]$ e $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ é convergente, a série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ será uniformemente convergente em $[a,b]$."

Prova: Se $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ converge, existe um número N tal que para $n+1 \geq N$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \varepsilon$$ (isso segue da definição de convergência)

Assim, com $|u_i(x)| \leq M_i$ para todo $a \leq x \leq b$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i(x)| < \varepsilon \quad \text{e dessa forma}$$

$$\underbrace{|S(x)}_{\text{soma}} - \underbrace{S_n(x)}_{\text{soma parcial}}| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)\right| < \varepsilon$$

e $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ é uniformemente convergente em $[a,b]$.

Note que, por esse teste, $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ também converge absolutamente.

Note, entretanto, que convergência uniforme e convergência absoluta são propriedades independentes. Uma não implica na outra.

Séries uniformemente convergentes possuem as propriedades

1) Se $u_n(x)$ são contínuas, a soma da série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \text{também é contínua.}$$

2) Se $u_n(x)$ são contínuas, a série pode ser integrada termo a termo.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b dx\, u_n(x)$$

(podemos comutar $\int$ e $\sum$)

③ A derivada da soma da série $f(x)$ é igual a derivada dos termos individuais

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d u_n(x)}{dx}$$

$\boxed{\text{Se}}$ as seguintes condições são satisfeitas:

$u_n(x)$ e $\frac{d u_n(x)}{dx}$ são contínuos em $[a,b]$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d u_n(x)}{dx}$ é uniformemente convergente em $[a,b]$.

Note que, como sempre, integração é muito mais simples que derivadas.

⊛ O fenômeno de Gibbs, em geral, significa que a série (finita) de Fourier vai ser diferente do valor original da função na discontinuidade (finita) por ~18%.

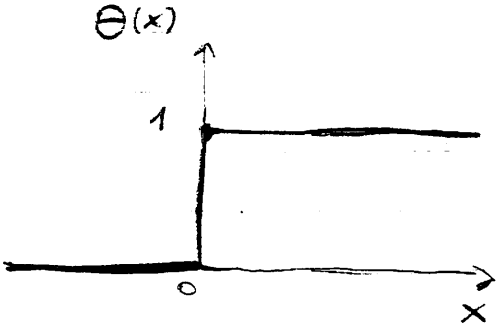
(Aula 16/9/2011)

Ex: Função theta de Heaviside

Considere a função

(16/9/2011)

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Qual a representação dessa função via Série de Fourier? (período 2L)

Coeficientes: $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\, \Theta(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ $n>0$

Assim,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx \cos\frac{n x \pi}{L} = \frac{L}{\pi}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L = 0$$

$n>0$

Para $n=0$, $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\, \Theta(x) = \frac{1}{L}\int_0^L dx = 1.$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Theta(x) = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{(-1)}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\underset{n>0}{b_n} = \frac{(-1)}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2p, \ p = 0,1,\ldots \\ \frac{2}{n\pi} & \text{se } n = 2p+1 \end{cases}$$

Assim,

$$\Theta(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi}\, \text{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right]$$

16/9/2011 Só esta pequenina

Note que a representação de $\Theta(x)$ via Fourier dá $\Theta(0)_{\text{Fourier}} = \frac{1}{2}$.

Essa função vai aparecer de novo quando falarmos da <u>Delta de Dirac</u>.

Transformada de Fourier e Teoria das Distribuições

Considere a série de Fourier de uma função $f(x)$ no intervalo $[-L, L]$. Vamos assumir que $f(x)$ é uma função suave e de quadrado integrável, i.e.,

$$\int_{-L}^{L} dx\, |f(x)|^2 < \infty$$

Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\, f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\, f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

Forma complexa da série:

Defina $c_n = L(a_n - i b_n)$, $c_{-n} = L(a_n + i b_n)$