Note que a representação de $\theta(x)$ via Fourier dá $\theta_{\text{Fourier}}(0) = \frac{1}{2}$.

Essa função vai aparecer de novo quando falarmos da <u>Delta de Dirac</u>.

Transformada de Fourier e Teoria das Distribuições

Considere a série de Fourier de uma função $f(x)$ no intervalo $[-L, L]$. Vamos assumir que $f(x)$ é uma função suave e de quadrado integrável, i.e.,

$$\int_{-L}^{L} dx\, |f(x)|^2 < \infty$$

Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\, f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\, f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

Forma complexa da série:

Defina $c_n = L(a_n - i b_n)$, $c_{-n} = L(a_n + i b_n)$

$$C_n = \int_{-L}^{L} dx\, f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$ então

$$\boxed{C_n = \int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}$$ obviamente,

$$C_{-n} = \int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$ Assim,

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' C_n\, e^{i\frac{n\pi x}{L}}}$$

Agora, vamos definir

$$\Delta k \equiv \frac{\pi}{L} \quad e \quad k_n \equiv n\,\Delta k$$ e

$$F(k_n) \equiv C_n = \int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, e^{-i k_m x}$$ e obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' F(k_n)\, \Delta k\, e^{i k_n x}$$

Consideremos agora o limite $\Delta k \to 0$ (ou $L \to \infty$)
Os "k_n" viram uma variável contínua "k"

$$F(k_n) \longrightarrow F(k) \qquad k_n \to k$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \Delta k \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk$$

e obtemos que

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, F(k)\, e^{ikx} \\ F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \end{aligned}}$$

e

$F(k)$ é chamada de transformada de Fourier de $f(x)$ que, por sua vez é chamada de transformada de Fourier inversa de $F(k)$.

Linearidade da transformada de Fourier

Note que para duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, com transformadas de Fourier individuais

$$F_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_1(x)\, e^{-ikx}$$

$$F_2(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_2(x)\, e^{-ikx}$$

temos que

a transformada de Fourier de $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

é claramente $\alpha_1 F_1(k) + \alpha_2 F_2(k)$. Assim, a transformada de Fourier é um operador linear no espaço de funções que leva uma uma função $f(x)$ em outra $F(k)$.

Paridade da Transformada de Fourier

Claramente, se $f(x)$ é par

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} = 2\int_0^{\infty} dx\, f(x) \cos kx$$

Se $f(x)$ é ímpar

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} = -2i\int_0^{\infty} dx\, f(x)\, \text{sen}\, kx$$

Ex: (Normalizada) <u>Gaussiana</u> $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ $\quad \sigma > 0$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

transf. Fourier

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

Truque: Complete o quadrado! Note que

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2} - ikx = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x + ik\sigma^2\right)^2 - \frac{k^2\sigma^2}{2}$$

e assim

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x + ik\sigma^2\right)^2}$$

transf. variável

$x + ik\sigma^2 = \xi$

$dx = d\xi$

$$F(k) = e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \underbrace{e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}}_{\text{Gaussiana!}}$$

Note que $f(x)$ pode ser entendido como uma densidade de probabilidade já que $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) = 1$.

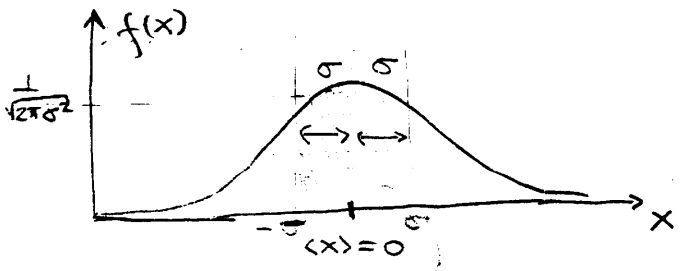
(entre outras coisas)

Assim, o valor médio $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \overbrace{x}^{\text{ímpar}} = 0$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^2 = \sigma^2$$

Assim, o <u>desvio padrão</u> do valor médio é

$\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sigma \longrightarrow \sigma$ é a largura da Gaussiana



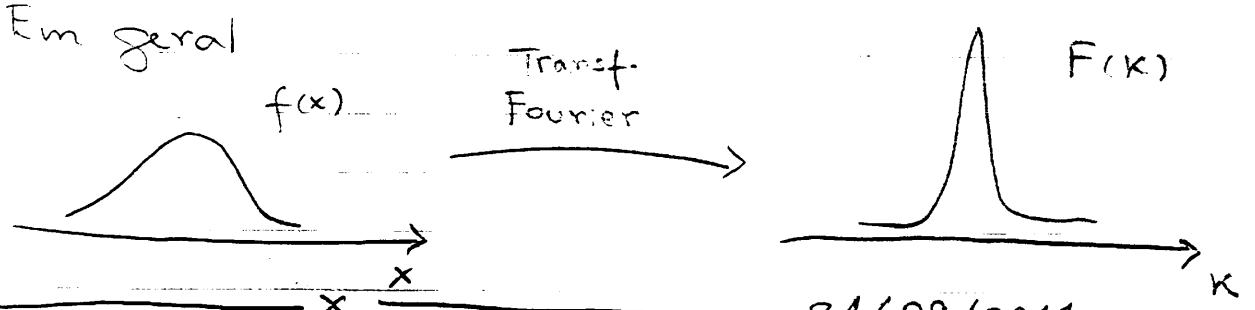
esta área é ~ 68,2 %

Agora, no espaço de Fourier $F(k) = e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}$

$\Rightarrow$ O desvio padrão é $\sqrt{\langle k^2\rangle - \cancel{\langle k\rangle^2}} = \frac{1}{\sigma}$

Então, se a largura em x aumenta, a largura em k diminui. Essa característica é sempre presente em transformadas de distribuições de probabilidade e é a base matemática para o princípio da incerteza de Heisenberg.

Em geral



X X 21/09/2011

Versão simétrica da Transformada de Fourier

É costume dividir o fator $\frac{1}{2\pi}$ em dois fatores de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ de forma que a transformada de Fourier, e sua inversa sejam dadas pela forma mais simétrica

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, F(k)\, e^{-ikx}$$

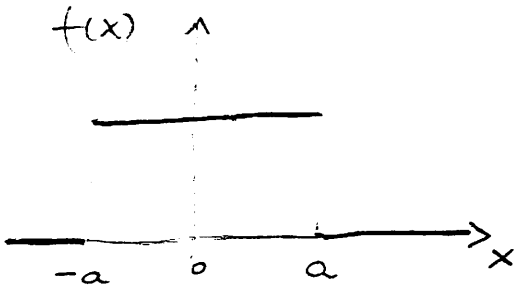
(faz $k \to -k$) também

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{ikx}$$

Essa é a notação usada pelos livros do Butkov e Arfkén. Usaremos essa notação nas aulas.

Outro exemplo: Onda retangular

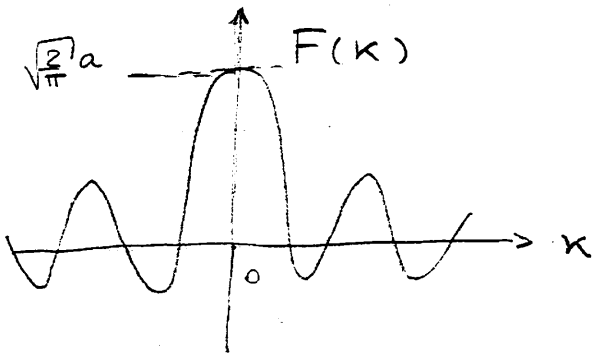
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \quad a > 0$$



$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} f(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dx\, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, ik} \left(e^{ika} - e^{-ika}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\operatorname{sen}(ak)}{k}$$



⊛ Em geral, para que exista $F(k)$ precisamos de que $f(x)$ tenha, na pior das hipóteses, descontinuidades finitas ou infinitas "razoáveis"

(integráveis como $f(x) = |x|^{\alpha} e^{-x^2}$ que diverge em $x = 0$)
$0 < \alpha < 1$

A condição que sempre teremos em mente (ela é <u>suficiente</u> mas não necessária) é a que diz que $f(x)$ é <u>absolutamente integrável</u>

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 \quad \underline{\text{existe}}$$

Como $|f(x)\, e^{ikx}| = |f(x)|$ vemos que

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} f(x)$$

e assim

$$|F(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)| \longrightarrow \text{finito}$$

⊛ Em geral, por causa do e^{ikx}, $F(k)$ é uma função complexa de variável real k.

⊛ Se $f(x)$ é real vemos que

$$F^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) = F(-k)$$

⊛ Se $f(x)$ é par então

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{+ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \cos kx \rightarrow \underline{\underline{\text{real}}}$$

Evidentemente, se [illegible] par, $F(k)$ é imaginário puro.

Integral de Fourier

Vimos que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{-ikx} F(k)$$

Mas $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, f(x') \, e^{ikx'}$ assim

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, f(x') \, e^{ikx'}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, f(x') \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{ik(x'-x)}$$

Assumindo que podemos comutar as integrais.

Vamos estudar esse objeto...

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{ik(x'-x)}$$

Esse objeto nem é bem definido como uma integral pois o limite

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} dk \; e^{ik(x'-x)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{ik(x'-x)}}{i(x'-x)} \Bigg|_{-n}^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}[(x'-x)n]}{(x'-x)} \longrightarrow \infty$$

Esse limite não existe. Por outro lado, da equação anterior

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x'-x)} \right]$$

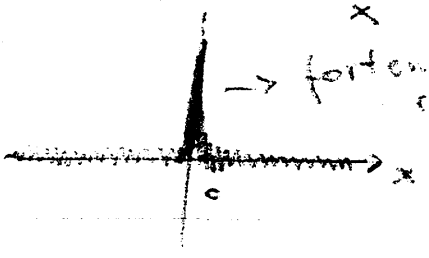
Se escrevermos [ ] vê o limite essa equação acima fica bem definida

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} dk\, e^{ik(x'-x)}}_{\text{essa integral, antes de tomar o limite, pode ser feita}}$$

Então,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \frac{f(x')}{\pi} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(n(x'-x))}{(x'-x)}}_{\text{é uma função bem definida (antes de tomar o limite)}}$$

Note que $\frac{\operatorname{sen}(nx)}{x}$ quando $n \gg 1$



→ fortemente concentrada em $x=0$ quando $n \to \infty$. De fato, o pico vai para o infinito se $n \to \infty$ e fora do pico ela vai para zero.

(*) Coloquei esse exemplo no MATHEMATICA (veja STOA)

Vamos definir a função $\underline{\delta_n(x)} \equiv \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\pi x}$

Note que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_n(x) = 1$

Tomar o limite $n \to \infty$ acima significa dizer que a função fica com pico $\to \infty$ em $x=0$ (e $=0$ fora de $x=0$) mas a "área" abaixo da curva (ou seja, a integral) mantém seu valor igual à 1.

Agora,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \frac{\operatorname{sen}(n(x'-x))}{\pi(x'-x)}$$

<u>subs. variável</u>

$$x'-x = \frac{y}{n} \quad \to \quad dx' = \frac{dy}{n}$$

(antecipando $n\to\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{f\left(\frac{y}{n}+x\right)}{\cancel{n}} \left(\frac{\operatorname{sen} y}{\pi y}\right) \cancel{n}$$

tomamos o limite

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x) \frac{\operatorname{sen} y}{\pi y} = f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\operatorname{sen} y}{y\pi}}_{1}$$

(vimos antes que $\int_0^\infty dy \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \frac{\pi}{2}$)

$$= f(x) \quad //$$

O físico inglês P. A. M. Dirac introduziu a "função" delta de Dirac definida via

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, \delta(x-x') f(x')$$

onde por isso entendemos que existe sempre um limite envolvido

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} dk \, e^{i(x-x')k} \longrightarrow \delta(x-x')$$

embora tenhamos visto que esse limite rigorosamente não existe. Além disso, o objeto $\delta(x-x')$ definido via a equação acima não existe como uma função normal já que ela seria basicamente

$$\delta(x-x') = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = x' \\ 0, & \text{se } x \neq x' \end{cases}$$

Esse tipo de coisa causou muitas discussões entre físicos e matemáticos no início da mecânica quântica (~1930). O impasse foi resolvido quando L. Schwartz introduziu o conceito de função generalizada ou distribuição.

A idéia básica é que quando vemos algo do tipo

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x)\, f(x)$$ devemos entender

todas as operações envolvendo limites feitas anteriormente.

⊛ A $\delta(x)$ não é uma função — não existe função que desempenhe o papel que a $\delta(x)$ faz.

⊛ Devemos ter em mente a idéia de <u>Sequências delta</u>

Ex: $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2x^2}$ ou, por exemplo,

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\, \frac{1}{1+n^2x^2}$$ e etc

Porém, $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_n(x) = 1$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_n(x)\, f(x) = f(0).$$

(Prove isso para as duas sequências delta acima)

⊛ Note que, quando escrevemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) f(x)$$

não temos de fato uma integral e sim o limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_n(x) f(x)$$

Definição de Distribuições e suas derivadas

<u>Funções rapidamente decrescentes</u> (r.d.): Uma função $f(x)$, definida em $(-\infty, \infty)$ é dita uma fs rapidamente decrescente, quando satisfaz as seguintes propriedades:

1- $f(x)$ é infinitamente diferenciável, i.e.,

$$f(x) \in C^{(\infty)}$$

2- Para números inteiros positivos arbitrários N e K, sempre

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^N \, |f^{(K)}(x)| \to 0$$

k-ésima derivada

<u>Exemplo de fs r.d.</u> $\to e^{-x^2}$. De fato, $e^{-x^2} \in C^{(\infty)}$

e $\lim_{x\to\infty} x^N e^{-x^2} \to 0$, $\forall N$ positivo

Prove que se $f(x)$ é r.d. então sua transformada de Fourier

Muito importante

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\, e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

é uma fç r.d. em k.

Oops... esqueci de definir isso quando fiz a série de Fourier...

Aula 16/9/2011

Série de Fourier $\begin{cases} \text{em Senos} \\ \text{em Co-senos} \end{cases}$

Suponha $f(x)$ arbitrária (não necessariamente par ou ímpar). Se calcularmos as "integrais sobre a metade do domínio" e definirmos

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

e formarmos a série

$$g_c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

esta série representará a extensão par ou simétrica de $f(x)$, ou seja

$$g_c(x) = \begin{cases} f(x), & 0<x<L \\ f(-x), & -L<x<0 \end{cases}$$

$g_c(x)$ é a série de Fourier em co-senos de $f(x)$. Analogamente podemos definir

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$ e construir

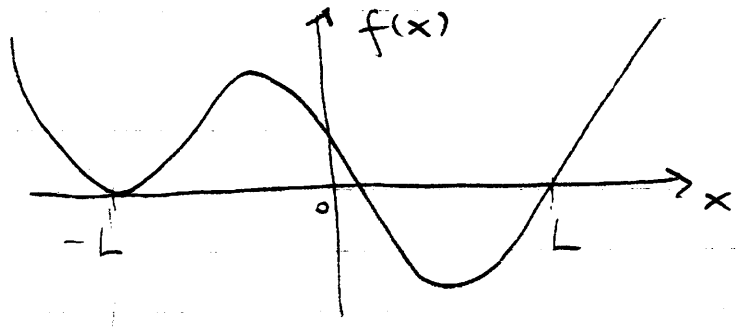
a série

$$g_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$ onde

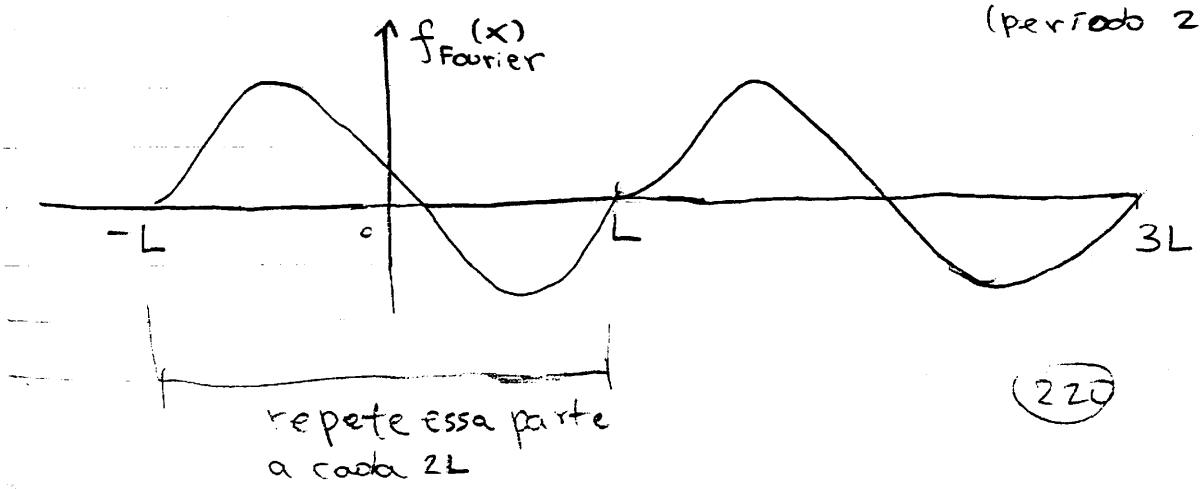
$$g_s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x < L \\ -f(-x) & \text{se } -L < x < 0 \end{cases}$$

é a extensão anti-simétrica (ou ímpar) de $f(x)$.

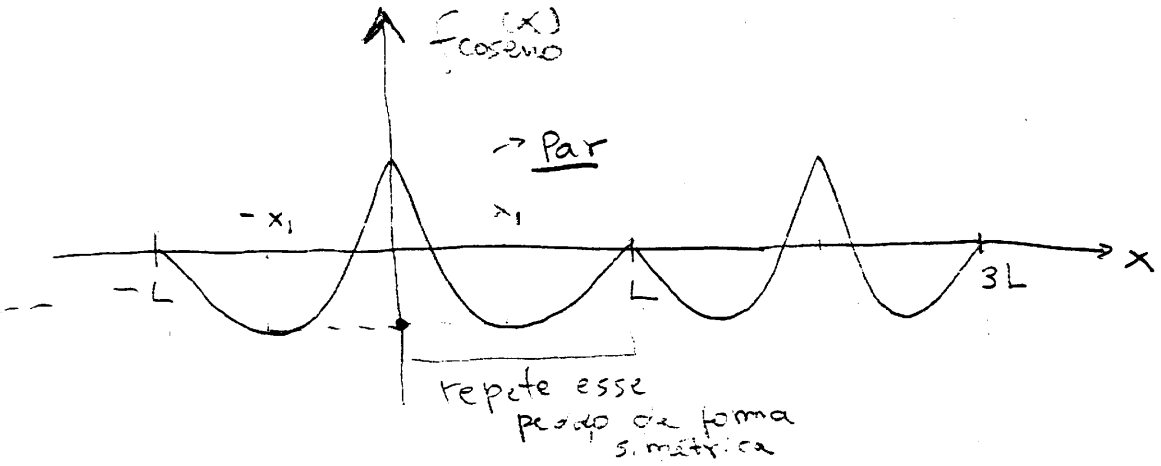
Ex: Suponha que $f(x)$ seja



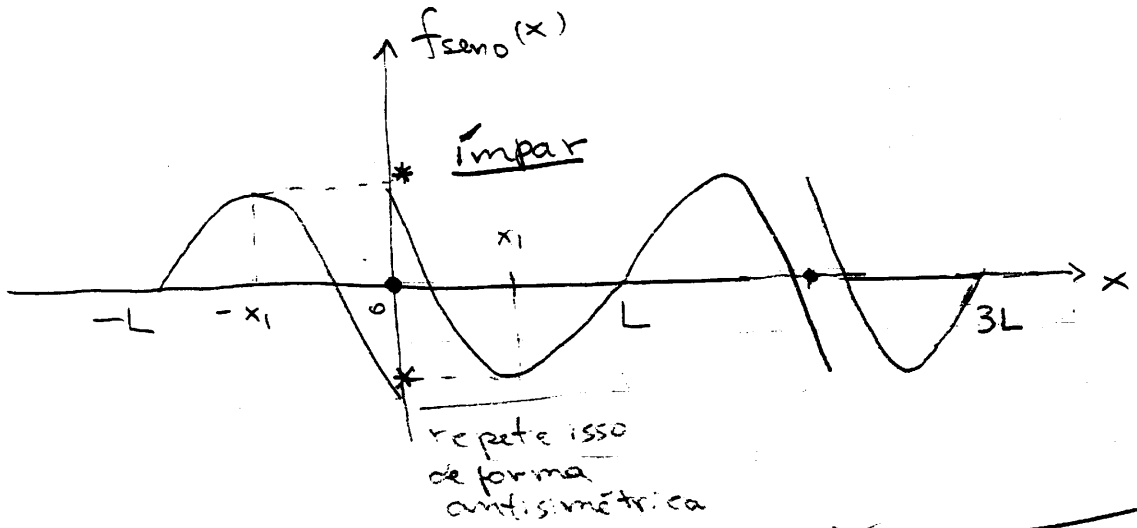
a série de Fourier será (período 2L)



A série em co-senos será - Aula 16/9/2011



A série em senos será



Além disso... se o período for L, obviamente

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

Até aqui, pertence à 16/9/2011

Vocês vão precisar disso na lista de exercícios 7.

21/09/2011

Continuando com distribuições ...

Quando a sequência de funções r.d. $\{f_n(x), n=1,\dots\}$ satisfaz a condição

Condição: Se $\forall$ funções r.d. $\varphi(x)$ o limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_n(x)\, \varphi(x)$$

é finito dizemos que a sequência de funções $\{f_n(x)\}$ define uma distribuição (ou função generalizada) $f(x)$

$$\{f_n(x), n=1,\dots\} \approx f(x)$$

Este valor do limite define um funcional linear no conjunto de funções r.d. $\varphi(x)$. Note que, em geral, um funcional é um mapeamento do espaço de funções em um escalar, ou seja, é a associação de um número para cada função no espaço das funções. Por exemplo, a integral definida de uma função é um funcional.

Notação: Às vezes encontramos a notação envolvendo seqüências de funções r.d. da forma

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_n(x)\, \varphi(x) \equiv f * g \qquad \text{ou}$$

SIMBOLICAMENTE, escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_n(x)\, g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, g(x)$$

onde $f(x)$ é a distribuição associada com a seqüência de funções. Por exemplo, para a distribuição $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x)\, f(x) .$$

⊛ Distribuições são funcionais lineares definidos no espaço das funções r.d.

A função r.d. $\varphi(x)$ usada anteriormente é chamada de função teste. Note que a distribuição $f(x)$ não está definida ponto a ponto, mas para cada função teste $\varphi(x)$ fica definido um valor, que escrevemos simbolicamente como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \varphi(x)$$

A Distribuição delta de Dirac $\delta(x)$

Essa distribuição, como vimos, satisfaz a equação

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x)\, \varphi(x) = \varphi(0)$$

Qualquer seqüência de funções r.d. que satisfaz essa propriedade converge para $\delta(x)$.

Paridade de Distribuições

Seja $f(x)$ uma distribuição (no sentido definido anteriormente). Se, para qualquer função teste $\varphi(x)$ par

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \varphi(x) = 0 \Rightarrow f(x) \text{ é uma dist. ímpar.}$$

$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

Analogamente, se $\forall\, \varphi(x)$ ímpar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx = 0 \Rightarrow f(x) \text{ é uma dist. par}$$

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

Prove que $\delta(x)$ é uma distribuição par.

Derivadas de Distribuições

Seja uma dada sequência de funções que convergem para uma distribuição, i.e.,

$$\{f_n(x),\ n=1,\dots\} \approx f(x)$$

A sequência formada pelas derivadas também é uma distribuição.

escrevemos dessa forma

$$\left\{ \frac{df_n}{dx}(x),\ n=1,\dots \right\} \approx \frac{df}{dx}$$

Prove que: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{df}{dx}(x)\, \varphi(x)$

para $f(x)$ uma distribuição e $\forall$ função teste $\varphi(x)$.

Use esse resultado, e as propriedades "rapidamente decrescentes" das funções teste $\varphi(x)$ para provar que

Prove que: uma distribuição é infinitamente diferenciável e sua m-ésima derivada é dada por

$$\varphi(x) \frac{d^m f(x)}{dx^m} = (-1)^m f(x) \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m}$$

Ex: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d\delta(x)}{dx} f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) f'(x) = -f'(0)$

Mostre que: $\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$ onde $\theta(x)$ é a função de Heaviside.

Mostre: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas distribuições. Defina a soma $f(x) + g(x)$ e demonstre que

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) + g(x)\right] = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

Mostre que: $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$

23/9/2011

A distribuição delta de Dirac aparece quando derivamos uma função contínua por pedaços. Seja $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x < a \\ f_2(x) & \text{se } x > a \end{cases}$$

f_1 e f_2 contínuas onde definidas

Podemos usar a função θ para escrever

$$f(x) = f_1(x)\,\theta(a-x) + f_2(x)\,\theta(x-a)$$

Assim, usando que $\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$ obtemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{dx}\theta(a-x) + f_1(x)\frac{d\theta(a-x)}{dx} + \frac{df_2}{dx}\theta(x-a) + f_2(x)\frac{d\theta(x-a)}{dx}$$

$$= \frac{df_1}{dx}\theta(a-x) + \frac{df_2}{dx}\theta(x-a) - f_1(x)\delta(a-x) + f_2(x)\delta(x-a)$$

é par

$$= \frac{df_1}{dx}\theta(a-x) + \frac{df_2}{dx}\theta(x-a) + \delta(x-a)\left[f_2(x) - f_1(x)\right]$$

Porém, já que $\delta(x-a)f(x) = f(a)$ $\boxed{\text{Prove isso}}$

obtemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{dx}(x)\theta(a-x) + \frac{df_2}{dx}(x)\theta(x-a) + \delta(x-a)\underbrace{\left[f_2(a) - f_1(a)\right]}$$

Esse é o valor do salto na descontinuidade em $x = a$

Convolução (Muito importante)

Seja a função $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, G(x,x')\, g(x')$

Vamos assumir que:

- $G(x,x') = G(x-x')$ (invariância por translação)

- Tanto $f(x)$, $G(x)$, e $g(x)$ possuem transformada de Fourier dadas, respectivamente, por

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{ikx} f(x)$$

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx}\, G(x) \quad e \quad \tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx}\, g(x)$$

Nesse caso, o seguinte resultado é válido

$$\tilde{f}(k) = \tilde{G}(k)\, \tilde{g}(k) \sqrt{2\pi}$$ (na def. simétrica da transformada)

<u>Prova</u>: Começamos com a definição de $f(x)$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, G(x-x')\, g(x')$$

Agora usamos as trans. Fourier inversas

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx}\, \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{e^{-ik(x-x')}}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{G}(k)\, g(x')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{G}(k)\, e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{ikx'}\, g(x')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{G}(k)\, \tilde{g}(k)\, e^{-ikx}$$ e assim

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}\, \tilde{G}(k)\, \tilde{g}(k) \quad //.$$

Essa é a propriedade de convolução da transf. de Fourier.

$\boxed{\text{Mostre que:}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^*(x)\, g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}^*(k)\, \tilde{g}(k)$

Prova: Vamos expressar $f^*(x)$ e $g(x)$ no lado direito usando suas transf. de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1\, e^{-ik_1 x}\, \tilde{f}(k_1)\right]^* \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_2\, e^{-ik_2 x}\, \tilde{g}(k_2)$$

$$= \int_{+\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1\, e^{ik_1 x}\, \tilde{f}^*(k_1)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_2\, e^{-ik_2 x}\, \tilde{g}(k_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2\, \tilde{f}^*(k_1)\, \tilde{g}(k_2) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{i(k_1-k_2)x}}{2\pi}}_{\delta(k_1-k_2)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2\, \tilde{f}^*(k_1)\, \tilde{g}(k_2)\, \delta(k_1-k_2)$$

então $k_1 = k_2 = k$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}^*(k)\, \tilde{g}(k) \quad //$$

Note que, devido a propriedade acima,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, |\tilde{f}(k)|^2 \quad //$$

Teorema de Parseval

Isso, em mecânica quântica, expressa a idéia de que a probabidade é conservada (não importa se você está descrevendo a função de onda no espaço das coordenadas x ou no espaço dos "momentos" k).

Transformadas seno e cosseno de Fourier

Seja $f(x)$ uma função real par. Usamos a integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{-ikx} \tilde{f}(k)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \; e^{ikx'} f(x')$$

Mas $f(x)$ é real e par então

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{-ikx} \, 2 \int_{0}^{\infty} dx' \cos(kx') f(x')$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \; f(x') \int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{-ikx} \cos(kx')$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \; f(x') \int_{0}^{\infty} dk \; \cos(kx) \cos(kx')$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk \cos kx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x') \cos kx' \, dx'$$

Essa fórmula sugere algo similar ao que fizemos na Série de Fourier:

Suponha que $f(x)$ (agora sem paridade definida em princípio) esteja definida somente no <u>intervalo</u> $[0, \infty)$. Podemos construir a sua extensão simétrica (ou par) como

$$f_{par}(x) \equiv \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ou $\quad f_{par}(x) = f(x)\,\Theta(x) + f(-x)\,\Theta(-x)$

Note que a integral de Fourier dessa $f_{par}(x)$ fica

$$f_{par}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, e^{ikx'} f_{par}(x')$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikx} \left[\int_0^\infty dx' \, e^{ikx'} f(x) + \int_{-\infty}^{0} dx' \, e^{ikx'} f(-x) \right]$$

(faça $x' \to -x'$)

$$f_{par}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx} \int_0^{\infty} dx'\, \cos kx'\, f(x')$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dx'\, f(x') \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx} \cos kx'$$

somente $\cos kx$ sobrevive

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dk\, \cos kx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx'\, f(x') \cos kx'$$

Nesta perspectiva, <u>definimos</u> a <u>transformada de Fourier</u> em co-seno como

$$F_c(k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx\, f(x) \cos kx \qquad e$$

a inversa $\quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dk\, \cos kx\, F_c(k)$

A versão ímpar dessa transformada, chamada de <u>transformada em seno de Fourier</u>, é definida de forma análoga

$$F_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx\, \operatorname{sen} kx\, f(x) \qquad e$$

sua inversa

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dk\, F_s(k) \operatorname{sen} kx$$

⊛ Estude o que ocorre com a convolução dessas transformadas.