Monitoria de reforço para Matemática Elementar e Cálculo I - AULA #3

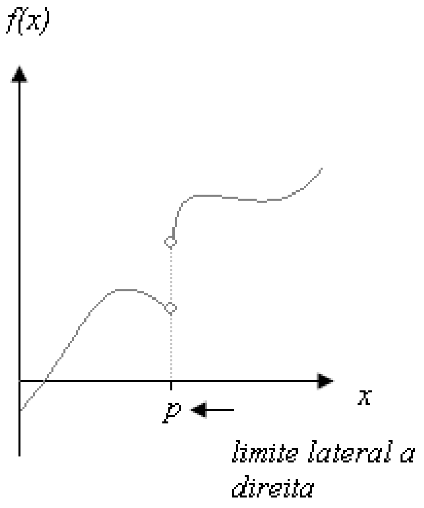
Limites laterais

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L$$

O número L, quando existe, denomina-se limite lateral a direita de f em p.
De modo análogo:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = M$$

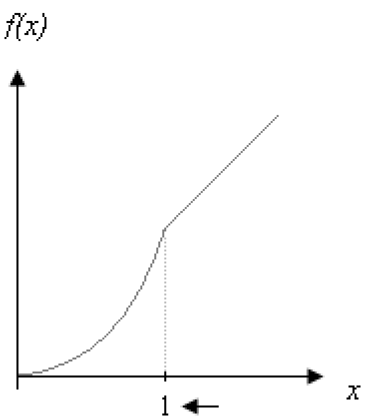
O número M quando existe denomina-se limite lateral a esquerda de g em p.



É uma conseqüência da definição de limite que se:

$\lim_{x \to p^+} f(x)$ e $\lim_{x \to p^-} f(x)$ existem e forem diferentes, então $\lim_{x \to p} f(x)$ não existirá.

Calcule:

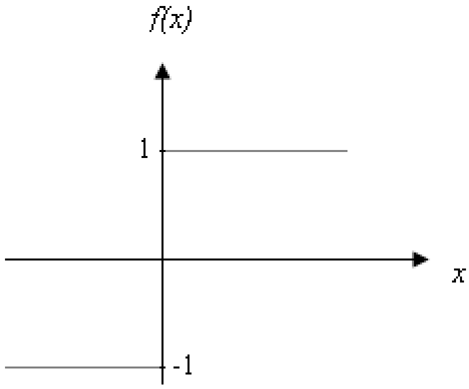


- $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ sendo $f(x) = x^2$ se $x < 1$, e $f(x) = 2x$ se $x \geq 1$ (figura ao lado).

Temos que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$.

Temos que $f(x)$ nesse caso é: $f(x)=\begin{cases} 1, & se \quad x>0 \\ -1, & se \quad x<0 \end{cases}$.



Temos que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$. Então $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe? (Não)

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, sendo $f(x)=\begin{cases} x^2, & se \quad x\le 1 \\ 2x-1, & se \quad x>1 \end{cases}$.

Temos que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-1-1}{x-1}=\dfrac{2x-2}{x-1}=2\dfrac{(x-1)}{(x-1)}=2$.

Por outro lado, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2.$ Logo, esse limite existe.

<u>Para casa:</u>

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

Resolução por Bháskara:

$\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1$, então $x=\dfrac{3\pm 1}{2}\rightarrow\begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$.

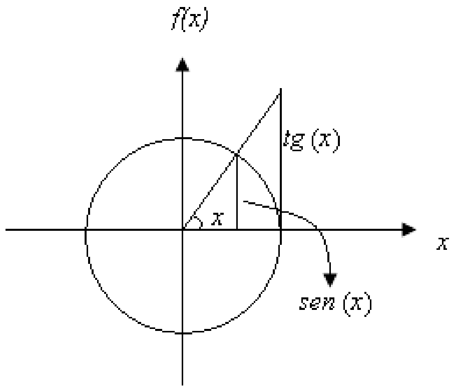
$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$, então:

$\lim\limits_{x\to 1^+} x-2=-1$, e $\lim\limits_{x\to 1^-} x-2=-1$. A função é contínua em *1*? Não, pois a função não está definida em *1*.

<u>1º Limite fundamental</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Como mostrar:



Temos que $0 < sen(x) < x < tg(x) \quad \Rightarrow \quad sen(x) < x < \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, dividindo por $sen(x)$: $1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$, logo $\cos(x) < \frac{sen(x)}{x} < 1$. Como $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$, pelo Teorema do Confronto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Assim:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(5x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} 5\left(\frac{sen(5x)}{5x}\right) = 5$$

<u>Exemplo 2:</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Temos que:

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos x = 1 - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1 - \cos x = 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}$$

Exemplo 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}=1$$

Exemplo 3:

$$\lim_{x\to p}\frac{sen(x)-sen(p)}{x-p}$$

Dica: transformar essa soma em um produto

$$\begin{array}{ll} sen(a+b)=sen(a)\cos(b)+sen(b)\cos(a) & \\ \underline{sen(a-b)=sen(a)\cos(b)-sen(b)\cos(a)} & (+) \\ \qquad =2sen(b)\cos(a) & \end{array}$$

$$\begin{cases} a+b=x \\ a-b=p \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a=x+p & \rightarrow \quad a=\frac{x+p}{2} \\ 2b=x-p & \qquad b=\frac{x-p}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to p}\frac{2sen\left(\frac{x-p}{2}\right)\cos\left(\frac{x+p}{2}\right)}{x-p}$$

$$\lim_{x\to p}\frac{sen\left(\frac{x-p}{2}\right)\cos\left(\frac{x+p}{2}\right)}{\frac{x-p}{2}}=\cos\left(\frac{2p}{2}\right)=\cos(p)$$

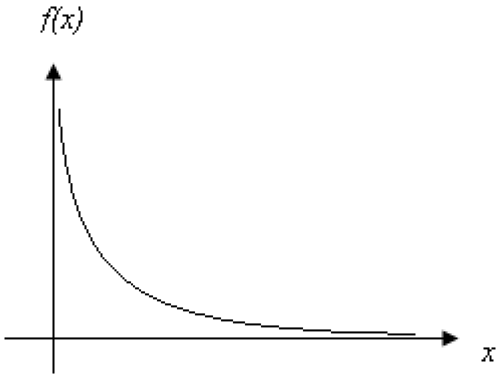
Para casa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) - sen\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

Dica: uso do mesmo procedimento do exercício anterior.

Limites no infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = ?$$



Temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, então $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ existe? Não, pois $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ não está definido. Apenas é definido $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

É muito importante essa análise do comportamento dos limites quando queremos trocar a curva da função:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^5}{x^5} \cdot \frac{(1 + 1/x + 1/x)}{(2 + 1/x^4 + 1/x^5)} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x + 1}{x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(2 + 1/x)}{x(1 + 3/x)} = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^3 + 3x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = 0$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{2}=+\infty$$

<u>Para casa:</u>

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^4-2x+1}{4x^4+3x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x-1}{2x^3-6x+1}$