EXEMPLOS
FORÇA CENTRÍFUGA – AULA 23

Prof[a] Nair Stem
Instituto de Física da USP

FORÇA CENTRÍFUGA

Forças que aparecem em um referencial S´em rotação uniforme em relação a um referencial S.

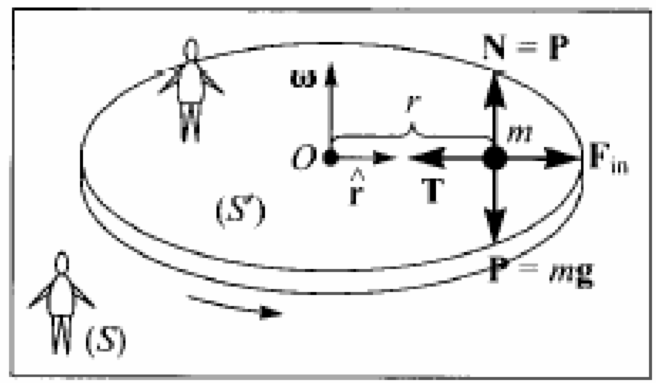


Figura 13.10 Plataforma girante.

Como por exemplo um carrossel, a própria Terra, etc. S e S´têm origem no centro da plataforma. Um corpo de massa m preso a um fio esticado e preso em O. Note que o corpo m está em repouso em relação a S´.

O corpo m no referencial S

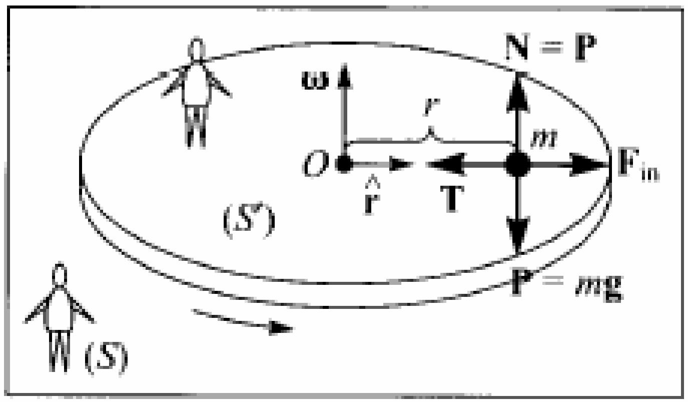


Figura 13.10 Plataforma girante.

$$\mathbf{a} = -\omega^2 r\hat{\mathbf{r}}$$

Versor no sentido radial

Raio r

Aceleração centrípeta

Velocidade angular radial

A única força que atua em m é a tensão do fio, por isto pela 2ª Lei de Newton ela deve ser igual à força centrípeta.

$$\mathbf{T} = -m\omega^2 r\hat{\mathbf{r}}$$

No referencial S´

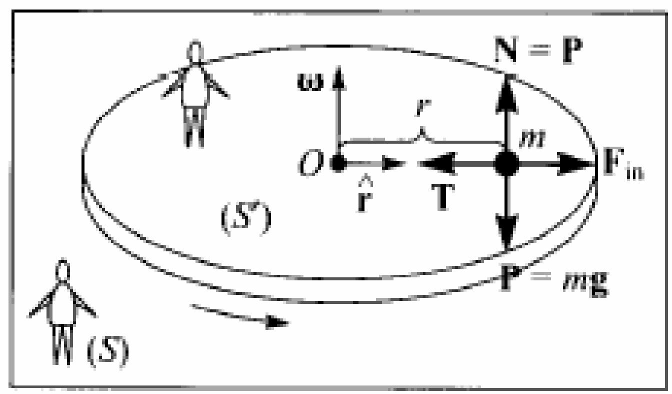


Figura 13.10 Plataforma girante.

A massa está em equilíbrio=>

$$\mathbf{T} + \mathbf{F}_{in} = 0$$

$$\boxed{\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a} = m\omega^2 r\hat{\mathbf{r}}}$$

Sentido oposto à força centrípeta.

Força de Inércia é chamada de Força Centrífuga.

Força Centrífuga – Exemplo 1: A superfície da Terra é um **Sistema não inercial**

- Determine a aceleração centrífuga experimentada por um observador O´no equador (λ=0º), o módulo observado g´da aceleração gravitacional, e o peso observado de uma massa padrão de 2kg. Considere o valor de g, que seria observado se a Terra não tivesse girando, como sendo 9,832m/s^2 e o raio da Terra como 6380Km.

Solução

- Um observador num sistema inercial, vê um observador O´ que está no equador com uma aceleração centrípeta **a**=-(v^2/R) **r,** onde r é o vetor unitário dirigido para fora ao longo da perpendicular eixo Terra – O´, R é o raio da Terra, e v é a velocidade de O´ qdo ele é conduzido pela rotação da Terra. Para um observador no Equador, os vetores R e r coincidem e portanto **R**=**r.**

A aceleração centrífuga A´ é oposto de A, aceleração centrípeta:

$$A' = -A = (\mathbf{v}^2/\mathbf{R})\ \hat{R}$$

Dado do problema

Pergunta: Como calcular v?

$A' = -A = (v^2/R)\,\hat{R}$

$V = 2\pi R/T$

Período de rotação da Terra: T=23h 56min

$$A' = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 6{,}380 \times 10^6}{(23 \times 3600 + 56 \times 60)}\hat{R}$$

$$A' = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 6{,}380 \times 10^6}{(23 \times 3600 + 56 \times 60)} \hat{R} = 3{,}393 \times 10^{-2}\, m/s^2$$

A´tem 0,35% do módulo da aceleração gravitacional. Uma vez que A´ tem sentido oposto ao g:

g´=g-A´=9,832-0,034=9,798 m/s^2

Uma massa de 2000kg, na ausência de rotação P=19,66N e 19,6N incluindo a rotação. Em muitos casos para fins práticos, a Terra pode ser considerada um referencial inercial.

Mas e para pontos fora do Equador?????? Observe:

Local	Latitude	Gravidade (m/s2)
Pólo Norte	90º 0´	9,8321
Greenwich	51º 29´	9,8119
Paris	48º 50´	9,8094
Washington	38º 53´	9,8011
Key West	24º 34´	9,7897

Alonso & Finn – vol 1

- A Terra tem forma pontuberante no Equador e achatada nos pólos.

- Devido a esta deformação pontos da superfície terrestre situados em latitudes diferentes estão a distâncias diferentes => variação local do valor da aceleração da gravidade g com a latitude.

- Pontos mais distantes do Equador estão mais próximos do centro da Terra=> aceleração da gravidade maior.

EFEITO ESTÁTICO

Exemplo 2: O valor de g em pontos fora do Equador – efeito dinâmico

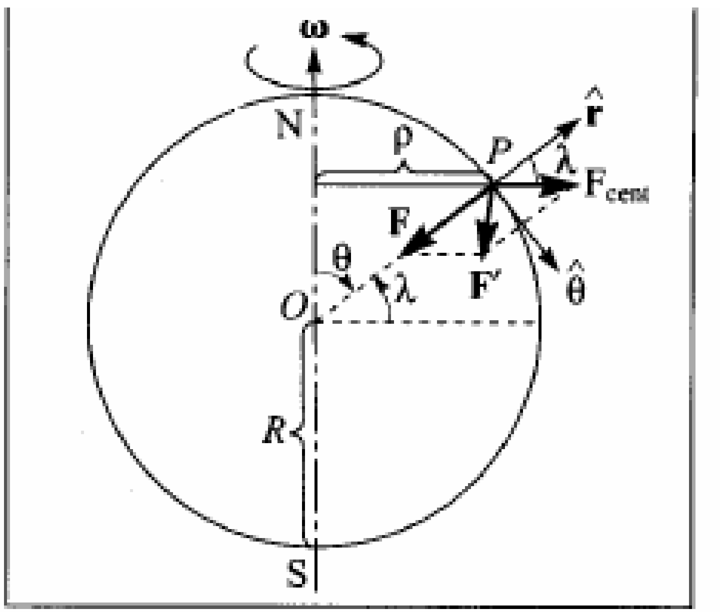


Figura 13.16 Valor local de *g*.

- Efeito dinâmico – força centrífuga sobre um corpo em repouso em relação à Terra.

- ρ distância do ponto P ao eixo de rotação;
- R raio da Terra;
- Latitude λ
- Colatitude Θ ($\Theta + \lambda = \pi/2$)
- Eixos: direção r (=radial=vertical) e Θ (ao longo de meridiano)
- F força verdadeira sobre massa m no ponto P (F=-mg na direção radial). $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{r}}$

- F_{cent} – força centrífuga

Montando as Equações

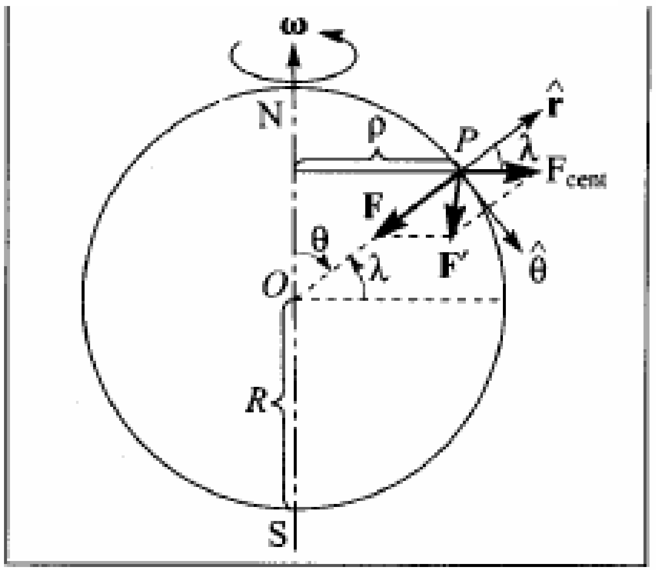


Figura 13.16 Valor local de g.

Força centrífuga

$$F_{cent.} = m\omega^2\rho = m\omega^2 R\cos\lambda$$

Dirigida perpendicularmente ao eixo da Terra

Direção radial

$$F_{cent,r} = F_{cent}\cos\lambda = m\omega^2 R\cos^2\lambda$$

Direção Θ

$$F_{cent,\theta} = F_{cent}\,\mathrm{sen}\,\lambda = m\omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\lambda\cos\lambda$$

Força efetiva no referencial do laboratório, S´

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{in} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{cent}$$

Contudo, agora F´ terá duas componentes:

$$F_r' = -mg + m\omega^2 R\cos^2\lambda \qquad F_\theta' = m\omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\lambda\cos\lambda$$

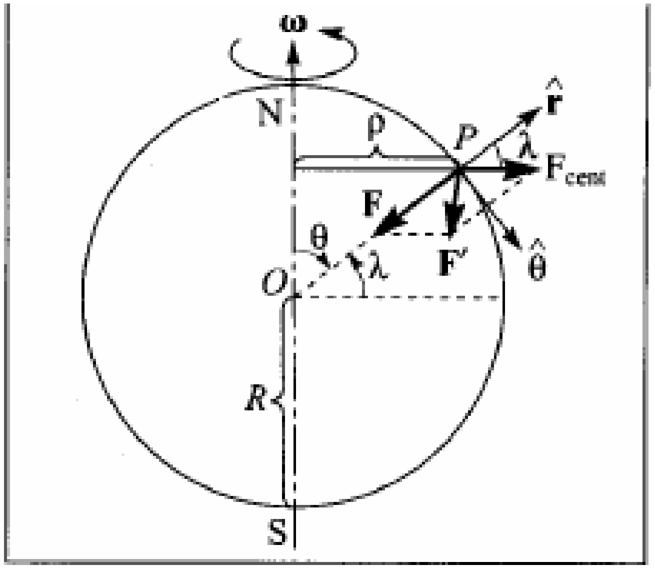


Figura 13.16 Valor local de g.

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{in} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{cent}$$

$$F'_r = -mg + m\omega^2 R\cos^2\lambda$$

$$F'_\theta = m\omega^2 R \text{ sen } \lambda \cos\lambda$$

Responsável pelo desvio na direção norte sul. (corresponde a de um fio de Prumo). Como F_{cent} em geral é << F este desvio na prática é pequeno.

$$g'(\lambda) = g - \omega^2 R\cos^2\lambda = g'(0) + \omega^2 R \text{ sen}^2\lambda$$

Na prática é a acelração da gravidade efetiva.

Aceleração da Gravidade Efetiva na Latitude λ

$$g'(\lambda) = g - \omega^2 R \cos^2 \lambda = g'(0) + \omega^2 R \,\mathrm{sen}^2 \lambda$$

$$\omega^2 R \approx (7{,}3 \times 10^{-5})^2 \times 6{,}4 \times 10^6 \ \mathrm{m/s^2} \approx 3{,}4 \times 10^{-2} \ \mathrm{m/s^2}$$

$$g'(\lambda) \approx 9{,}8(1 + 0{,}0035 \,\mathrm{sen}^2 \lambda) \ \mathrm{m/s^2}$$

Levando em conta o efeito dos achatamentos dos pólos, g ao nível do mar:

$$g(\lambda) \approx 9{,}7805(1 + 0{,}00529 \,\mathrm{sen}^2 \lambda) \ \mathrm{m/s^2}$$

EXEMPLO 3: CONTROLADOR OPERADO ELETRICAMENTE

Controlador operado eletricamente: O controlador de tampa esférica está preso num eixo vertical que gira com velocidade angular w. Quando o badalo suportado por um fio, de massa m, toca a tampa, um interruptor de corte é operado eletricamente para reduzir a velocidade angular do eixo. Determine a velocidade angular mínima com que o interruptor de corte funciona. Suponha que o badalo é pequeno em relação à tampa.

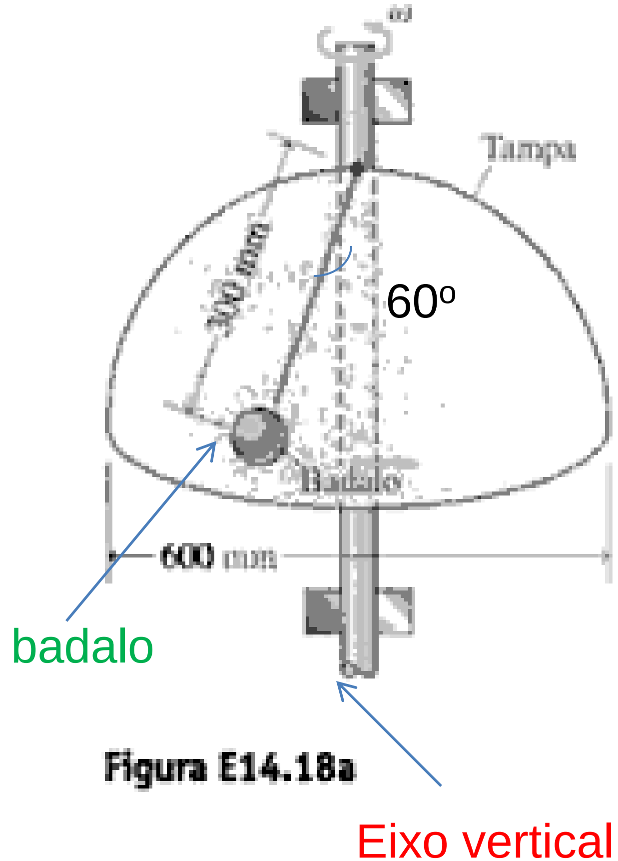
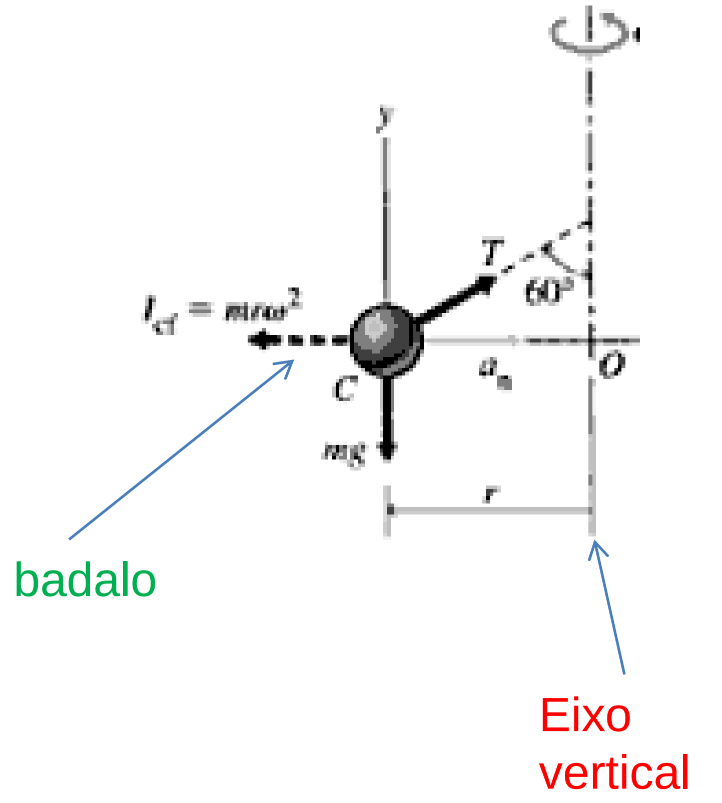


Figura E14.18a

Solução

- O badalo quando apenas toca a tampa – força de contato é desprezível.
- O badalo se move em um trajeto circular formando o ângulo
- raio $r=(300)(sen60^o)=150\ (3^{1/2})$=> $a_c=w^2r= 150\ (3^{1/2})w^2$ e está direcionada para o centro da trajetória.
- Se a velocidade de rotação do eixo aumenta vagarosamente, a aceleração tangencial pode ser desprezada. Então a magnitude da força inercial (força centrífuga) é $I_{cf}=ma_c=mrw^2$ (sentido oposto a a_c).



SOLUÇÃO

Lembrando que:

F_{res}=F+F_{in}=F-ma=0

Calculando as resultantes em x e em y:

$$\sum F_x = T\cos 30^o - 150\sqrt{3}mw^2 = 0$$

$$\sum F_y = Tsen30^o - mg = 0 \Rightarrow 0{,}5T = mg => T = \frac{mg}{0{,}5} = 2mg$$

$$\sum F_x = T\cos 30^o - 150\sqrt{3}mw^2 = 0 => 2mg\frac{\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}mw^2$$

=>

$$w = \sqrt{\frac{g}{150}} = \sqrt{\frac{9810}{150}} = 8{,}087 rad/s$$

Exemplo 4 – Coordenadas Polares

- A roda mostrada na figura gira com velocidade angular constante ao longo do eixo x. Um ponto P na borda da roda gera uma ciclóide dada por x=r(Θ-senΘ) e y=r(1-cosΘ), onde r é uma constante.

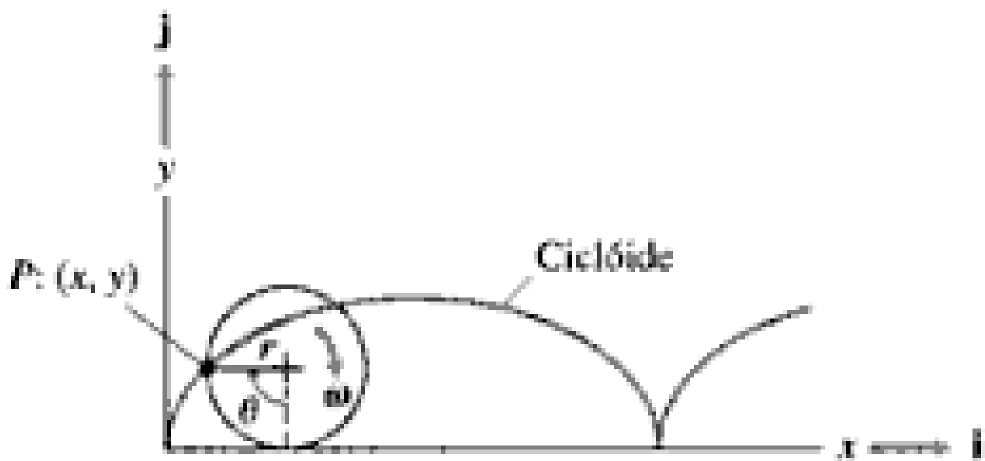


Figura P13.84

Exemplo 4

a) Expresse a velocidade escalar e o vetor aceleração do ponto P com funções de Q.
b) Calcule a velocidade escalar e a aceleração do ponto P quando ele está no ponto mais alto de sua trajetória.

Solução

- (a) derivando x e y com relação ao tempo pode-se calcular a velocidade com função de Θ, e por sua vez a aceleração:

$$x = r(\theta - sen\theta) => v_x = \dot{x} = r\dot{\theta}(1 - \cos\theta)$$
$$y = r(1 - \cos\theta) => v_y = \dot{y} = r\dot{\theta}\ sen\theta$$

$$v_x = \dot{x} = r\dot{\theta}(1 - \cos\theta) \Rightarrow a_x = \ddot{x} = r\left(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2 sen\theta\right)$$
$$v_y = \dot{y} = r\dot{\theta}\ sen\theta \Rightarrow a_y = \ddot{y} = -r\left(\ddot{\theta} sen\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

$$x = r(\theta - sen\theta) => v_x = \dot{x} = r\dot{\theta}(1 - \cos\theta)$$

$$y = r(1 - \cos\theta) => v_y = \dot{y} = r\dot{\theta}\ sen\theta$$

$$=>$$

$$|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = rw\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$

$$\dot{\theta} = w = cons\tan te => \ddot{\theta} = 0 =>$$

$$a_x = \ddot{x} = r\left(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2 sen\theta\right) => \ddot{x} = r\left(\dot{\theta}^2 sen\theta\right) = rw^2 sen\theta$$

$$a_y = \ddot{y} = -r\left(\ddot{\theta} sen\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta\right) => \ddot{y} = -r\left(-\dot{\theta}^2\cos\theta\right) = rw^2\cos\theta$$

Solução – parte c

- Item - b – O ponto P está na parte mais alta qdo Θ é igual a π.

$$|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = rw\sqrt{2(1-\cos\theta)} = rw\sqrt{2(1-\cos\pi)} = 2rw$$

$$a_x = \ddot{x} = r\left(\dot{\theta}^2 sen\theta\right) = rw^2 sen\pi = 0$$

$$a_y = \ddot{y} = -r\left(-\dot{\theta}^2\cos\theta\right) = rw^2\cos\pi = -rw^2$$

$$\vec{a} = -rw^2\,\hat{j}$$

OUTROS CONTEÚDOS – EM SAlA DE AULA