Física I para Oceanografia
FEP111 (4300111)

2º Semestre de 2011

Instituto de Física- Universidade de São Paulo

Aula – 9 Rotação, momento inércia e torque

Professor: Valdir Guimarães

E-mail: valdir.guimaraes@usp.br
Fone: 3091.7104

Rotação, inércia, torque

O camarão-de-estalo atordoa a presa (pequenos crustáceos) fechando uma garra desproporcionalmente grande para o seu tamanho, mas não chega a tocar a presa. Na verdade, a presa é atingida por uma forte onda sonora produzida pela parte móvel da garra ao se aproximar da parte fixa. Esse som (um estalo parecido com o de um milho de pipoca estourando) é tão alto que pode ser ouvido pelos mergulhadores e, no caso de muitos camarões, pode ser suficiente para impedir que um submarino seja detectado pelo sonar. A onda sonora também pode produzir clarões luminosos, um fenômeno conhecido como sonoluminescência. Alguns cientistas apelidaram a luz produzida por camarões de camaroluminescência.

Como o pequeno camarão-de-estalo produz com a garra um som tão forte que atordoa a presa?

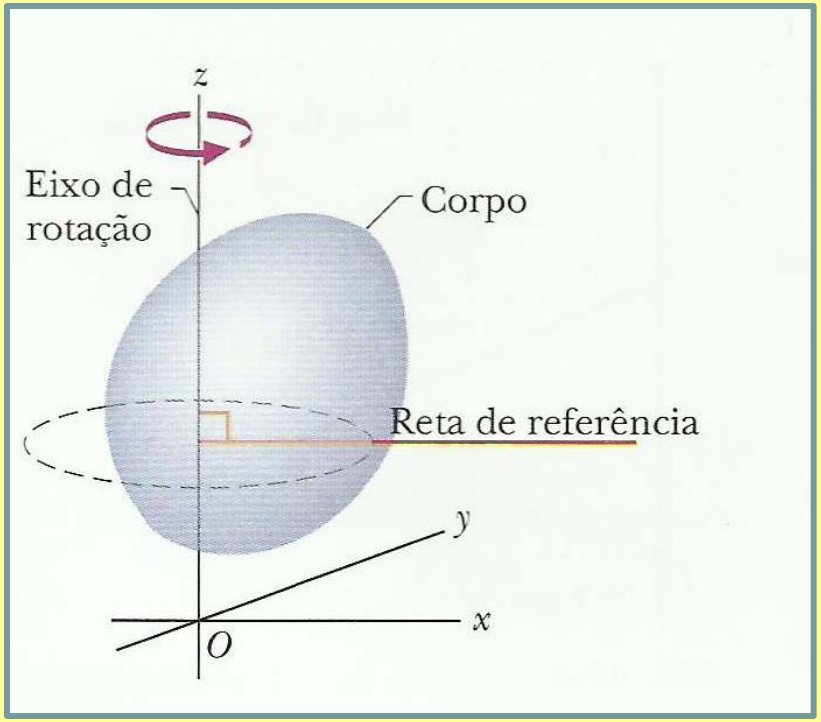
Variáveis da rotação

Neste tópico, trataremos da rotação em torno de um eixo fixo no espaço, ou em torno de um eixo que se move sem alterar sua direção no espaço.

Corpo Rígido

Eixo Fixo

Eixo de Rotação

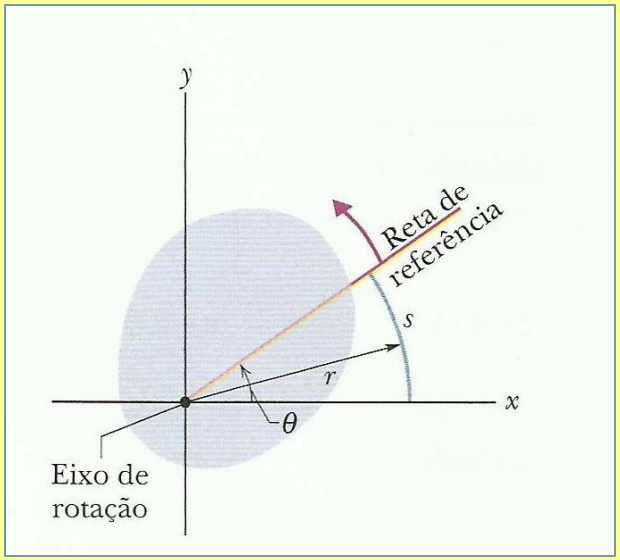


Cinemática Rotacional

Posição angular

Seja um corpo rígido de massa M, que gira em torno de um eixo fixo. Cada ponto deste corpo descreve um círculo, cujo raio r_i é a distância entre o ponto e o eixo de rotação.

A posição angular dessa reta é o ângulo que a reta de referência faz com a reta fixa.



O ângulo é medido em radiandos.

Deslocamento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

É positivo no sentido anti-horário.

Quando o corpo gira de um ângulo dθ, o ponto descreve um arco de comprimento dS_i

$$dS_i = r_i d\theta$$

Cinemática Rotacional

Velocidade angular

A taxa de variação do ângulo é a mesma para todas as posições no corpo e é chamada de velocidade angular ω.

Para os valores médios temos:

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

velocidade angular instantanea

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Delta S = r\Delta\theta$$

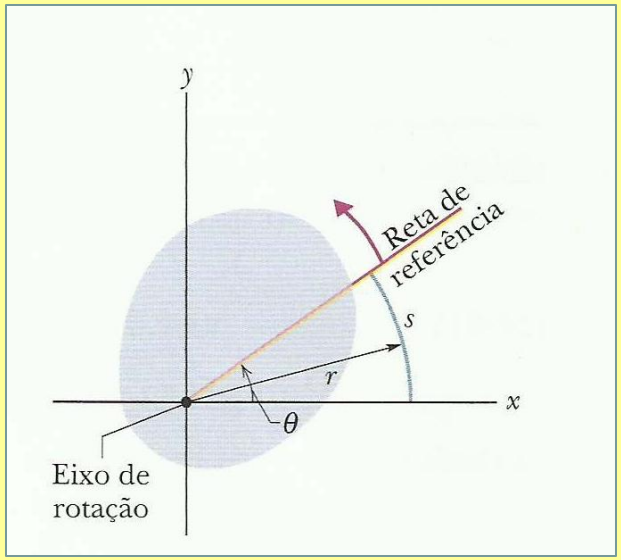
$$dS_i = r_i d\theta$$

Dividindo-se por Δt

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{r_i d\theta}{dt} = r_i \frac{d\theta}{dt}$$

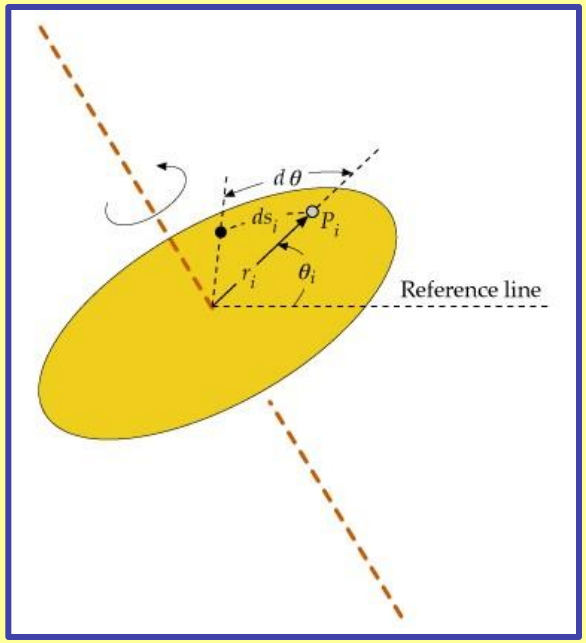
$$\omega = \frac{v_i}{r_i}$$

$$v_i = r_i \omega$$



aceleração angular

Analogamente, a taxa de variação da velocidade angular é a mesma para todas as posições no corpo e é chamada de aceleração angular α.



$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Se α é constante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{array} \right\}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

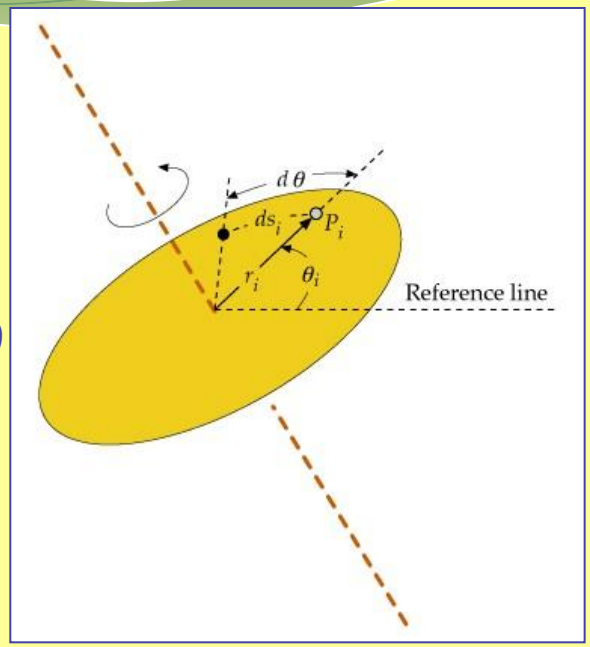
Exemplo

Um CD gira, do repouso até 500 rpm, em 5,5 s.

(a) Qual a aceleração angular suposta constante?

(b) Quantas voltas o disco dá em 5,5 s?

(c) Qual a distância percorrida por um ponto a 6,0 cm do centro, nestes 5,5 s?



$$\omega = 500 rpm = 500 \cdot 2\pi / 60 = 52{,}36\, rad/s$$

(a) $$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$52{,}36 = 0 + \alpha 5{,}5 \qquad \boxed{\alpha = 9{,}5 rad/s^2}$$

(b) $$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

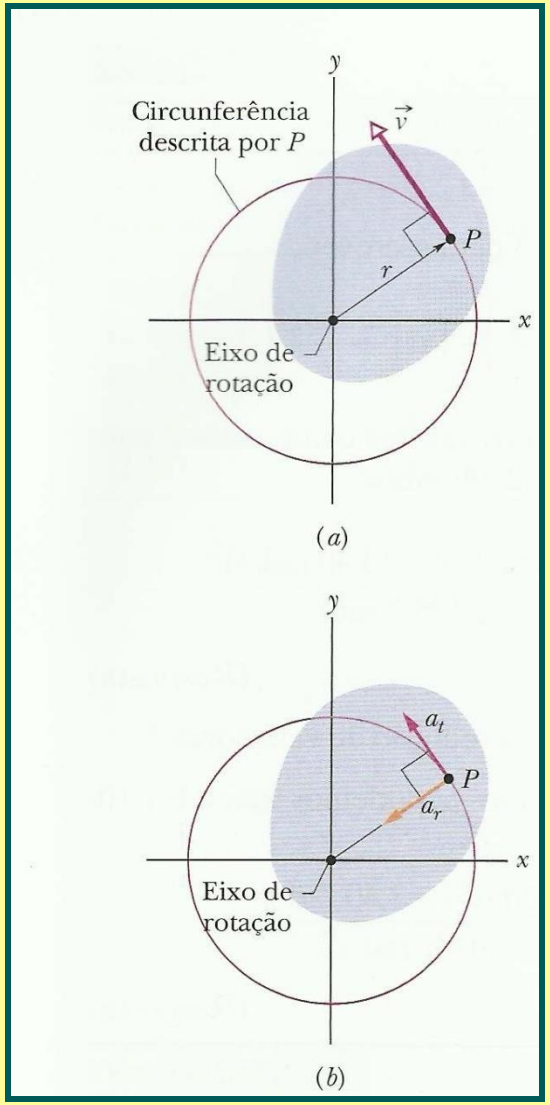
$$\theta = 0 + 0 + \frac{1}{2} 9{,}5 (5{,}5)^2 \qquad \boxed{\theta = 143{,}7 rad}$$ = 22,9 voltas

(c) $$\Delta S = r \cdot \Delta\theta = 0{,}06 \cdot 143{,}7 = 8{,}62 m$$

Acelerações e velocidades angulares

Já vimos que:

$$dS_i = r_i d\theta \Rightarrow v_i = r_i \omega \Rightarrow \omega = \frac{v_i}{r_i}$$



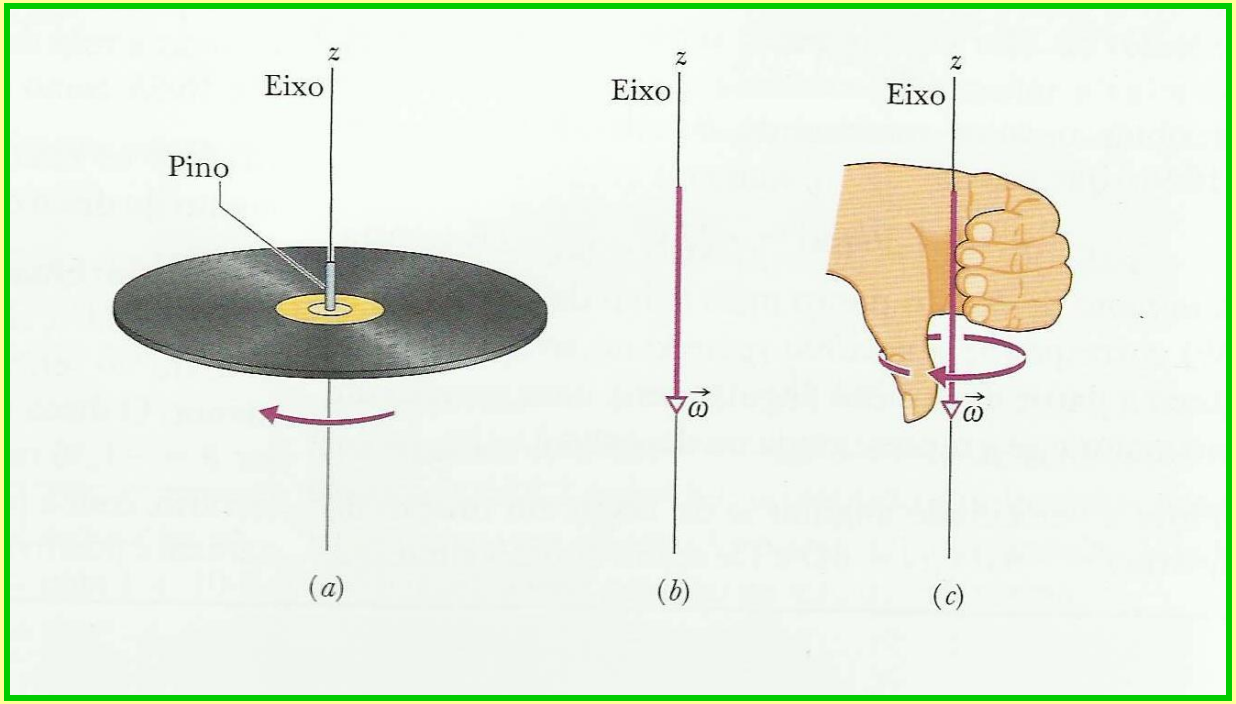
Analogamente, para a aceleração tangencial temos:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = r_t \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\alpha$$

Mas, como o movimento é circular, existe uma aceleração centrípeta

$$a_c = \frac{v_t^2}{r_t} = \frac{(r_t\omega)^2}{r_t} \Rightarrow a_c = r_t\omega^2$$

velocidade angular é uma grandeza vetorial



Energia Cinética Rotacional

A energia cinética de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é a soma das energias cinéticas das partículas individuais que constituem o corpo.

Para a i^{esima} partícula, de massa m_i e velocidade v_i, temos: $$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Somando sobre todas as partes, obtemos a energia cinética do corpo:

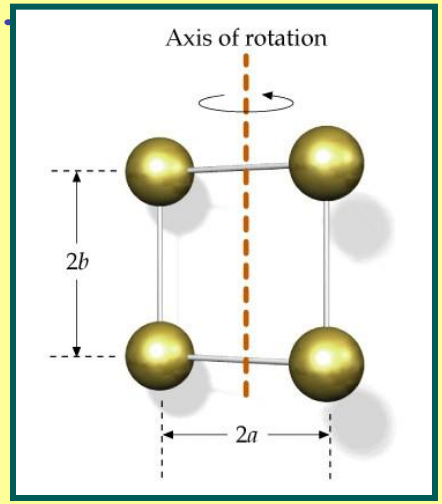
$$K = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i \left(m_i r_i^2 \right)}$$

momento de inércia (I) $$I = \sum_i \left(m_i r_i^2 \right)$$

Energia Cinética Rotacional $$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Exemplo

Um corpo consiste de 4 partículas pontuais, com massas m, ligadas por hastes sem massa, como na figura ao lado. O sistema gira com velocidade angular ω em torno do centro do corpo. (a) Determine o momento de inércia do corpo. (b) Determine a energia cinética do corpo.

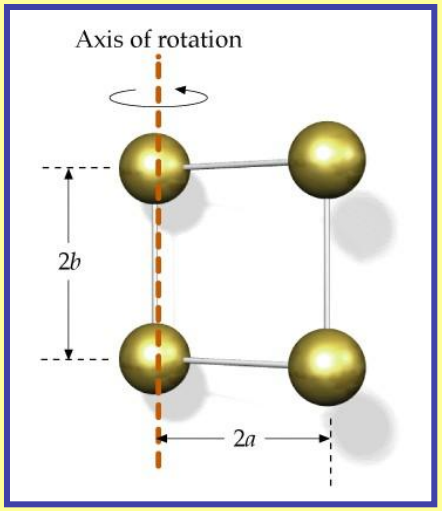


$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2\right) \Rightarrow I = 4ma^2$$

Energia Cinética Rotacional

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow K = 2ma^2\omega^2$$

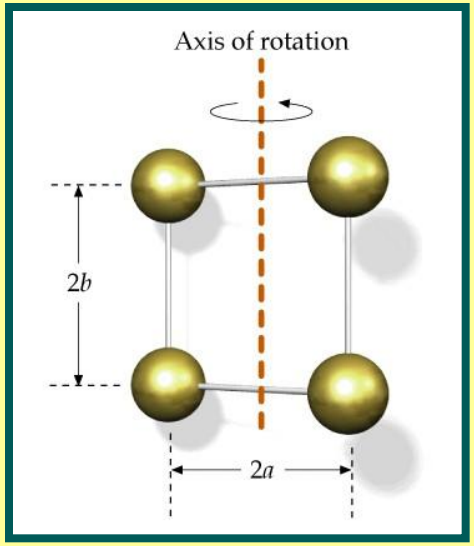
Repetir os cálculos para a nova configuração ao lado.



$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2\right) \Rightarrow I = 2m(2a)^2 = 8ma^2$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow K = 4ma^2\omega^2$$

Cálculos do Momento de Inércia



Para sistemas discretos:

$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2 \right)$$

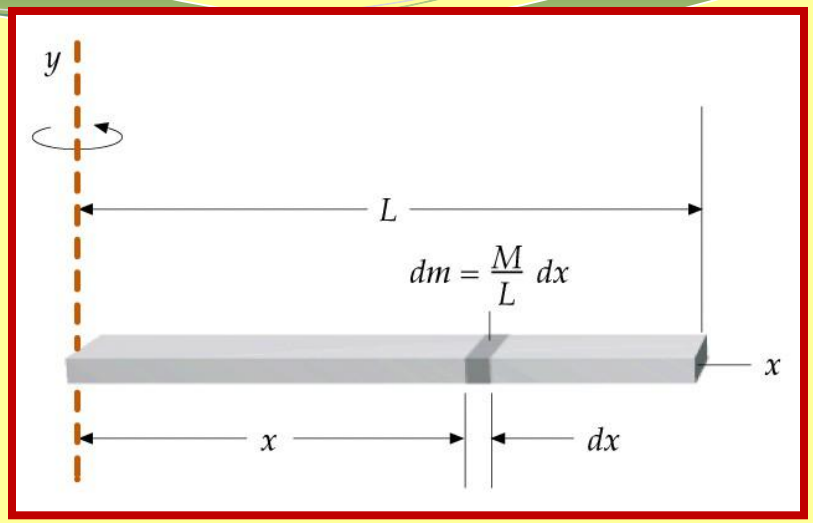
Corpos contínuos

Se subdividirmos o corpo em pequenas porções, no limite quando a massa de cada porção vai a zero, a somatória acima se transforma na integral:

$$I = \int r^2 dm$$

Onde r é a distância ao eixo, de cada parcela dm do corpo.

Momento de Inércia de uma barra



Calcule o momento de inércia de uma barra fina de comprimento L e massa M, em relação ao eixo que passa por sua extremidade.

$$I = \int r^2 dm$$

Um pedaço dm da barra, situado na posição x, ocupa uma extensão dx da barra.

Considerando a densidade linear de massa λ.

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

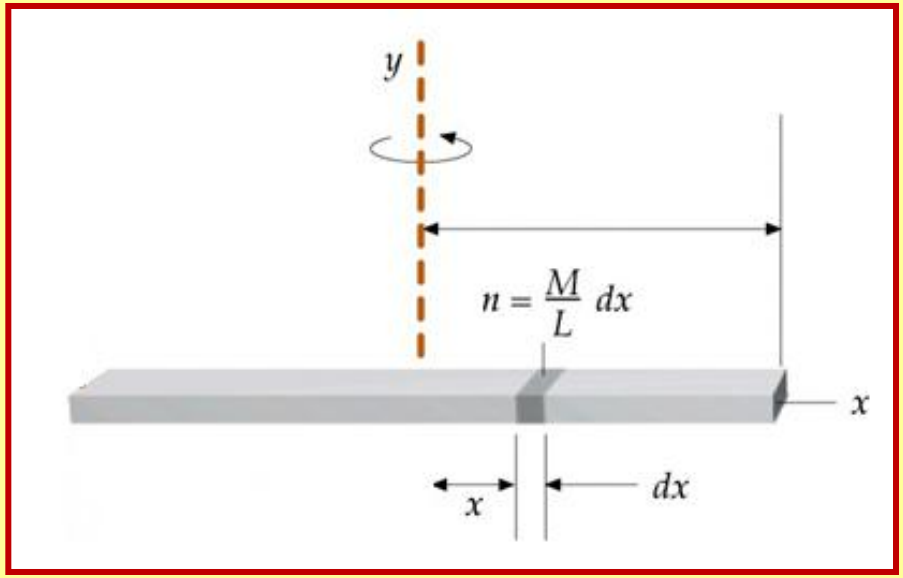
$$r^2 = x^2 \qquad dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx \Rightarrow I = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{M}{L}\frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

Momento de Inércia de uma barra

eixo no centro da barra.

$$I = \int r^2 dm$$



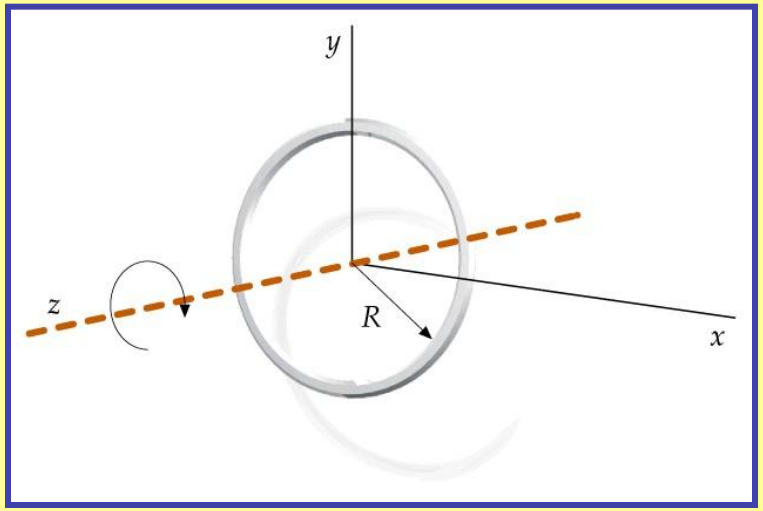
$$r^2 = x^2 \qquad dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx$$

$$I = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L}\left(\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3}\right) = \frac{M}{L} 2\left(\frac{(L/2)^3}{3}\right) = \frac{ML^2}{12}$$

Momento de Inércia de um anel

Calcule o momento de inércia de um anel circular de raio R e massa M, em relação ao eixo que passa perpendicularmente por seu centro.



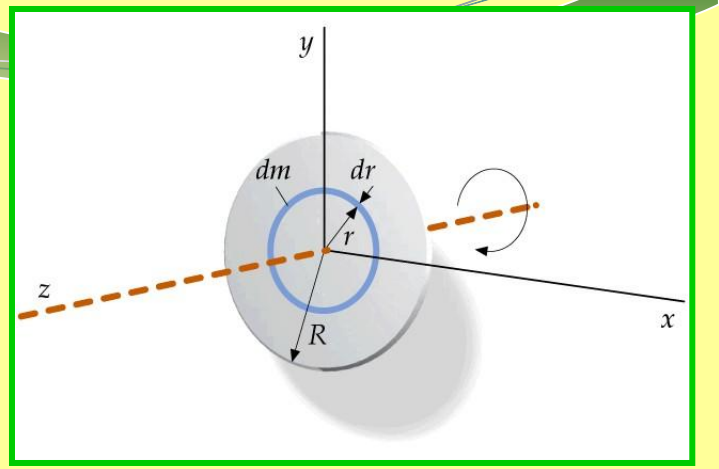
$$I = \int r^2 dm$$

Todos os pedaços dm do anel, estão situados a uma mesma distância R do eixo.

$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

Momento de Inércia de um disco

Calcule o momento de inércia de um disco homogêneo de raio R e massa M, em relação ao eixo que passa perpendicularmente por seu centro.



$$I = \int r^2 dm$$

Podemos subdividir o disco em uma série de anéis concentricos.

Cada anel tem uma massa dm, raio r e espessura dr.

Considerando a densidade superficial de massa σ.

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

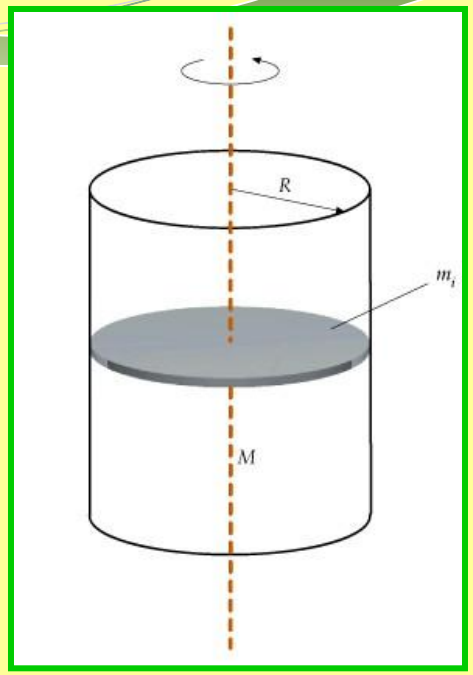
$$dm = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

$$I = \int_0^R r^2 \frac{M}{R^2} 2r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{2M}{R^2} \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Momento de Inércia de um cilindro

momento de inércia de um cilindro maciço homogêneo de raio R e massa M, em relação ao seu eixo.



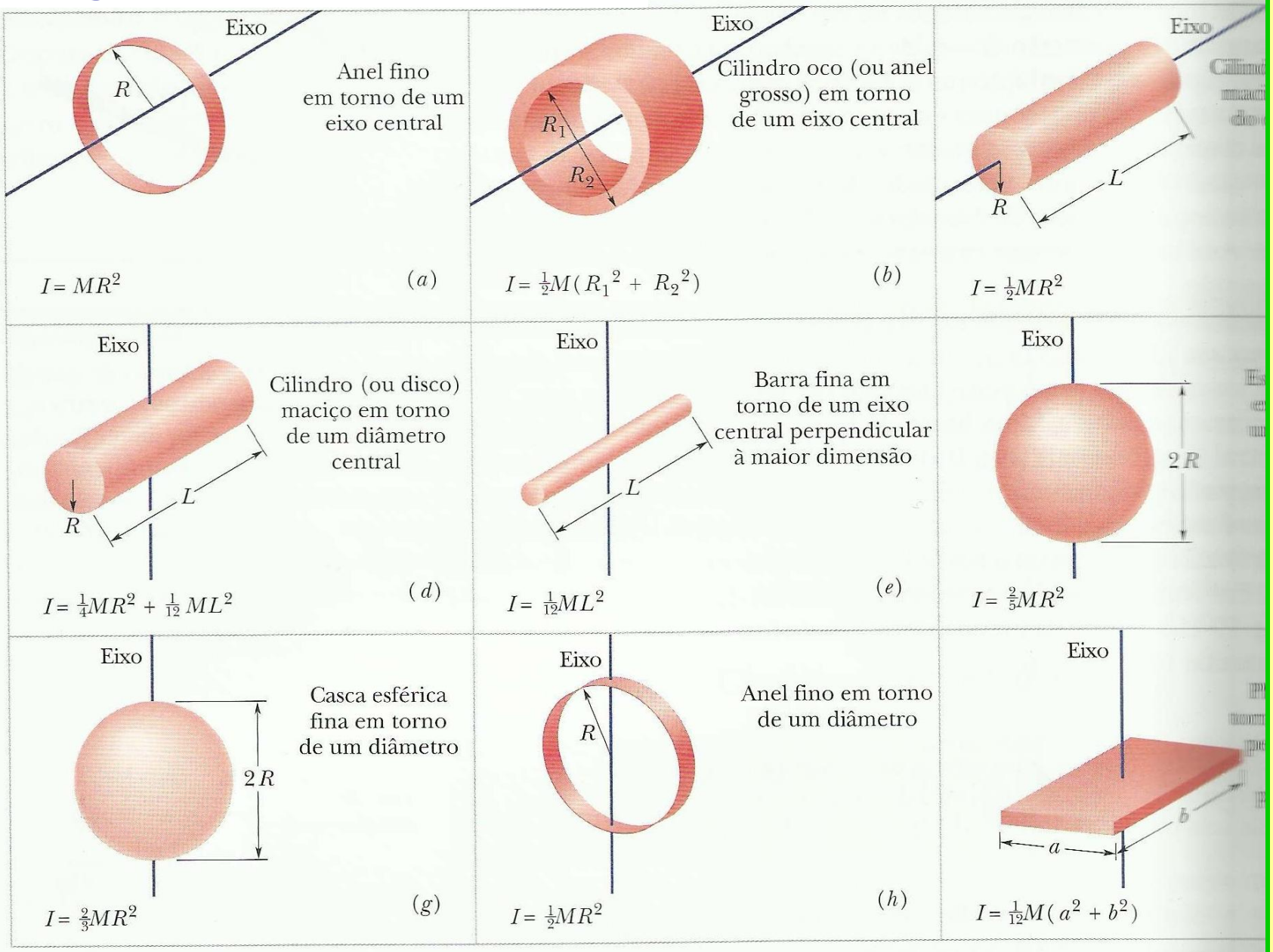
$$I = \int r^2 dm$$

Podemos subdividir o cilindro em uma série de discos paralelos.

Como todos os discos são equivalentes, podemos considerar o momento de inércia do cilindro como igual ao dos discos.

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

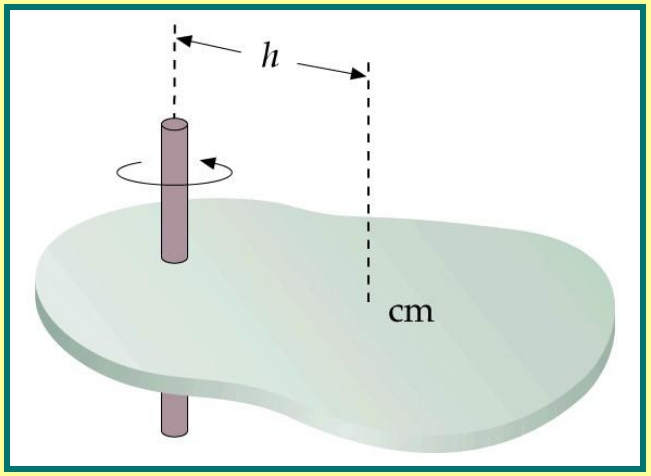
Alguns momentos de Inércia



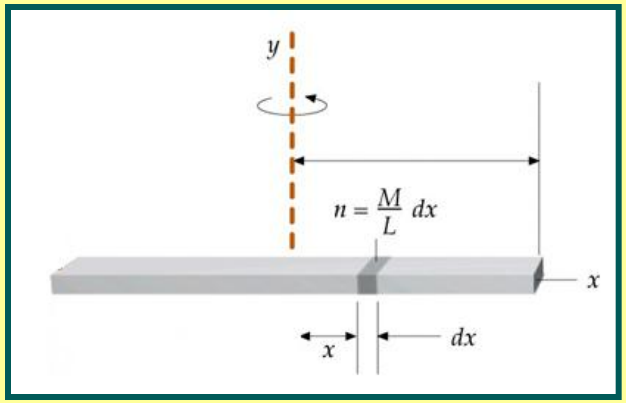
Teorema dos Eixos Paralelos

Este teorema permite que se calcule o momento de inércia de um corpo de massa M em relação a um eixo qualquer, a partir do seu valor para o centro de massa, sabendo-se a distância h entre os dois eixos.

$$I = \int r^2 dm \quad \Rightarrow \quad I = I_{cm} + Mh^2$$

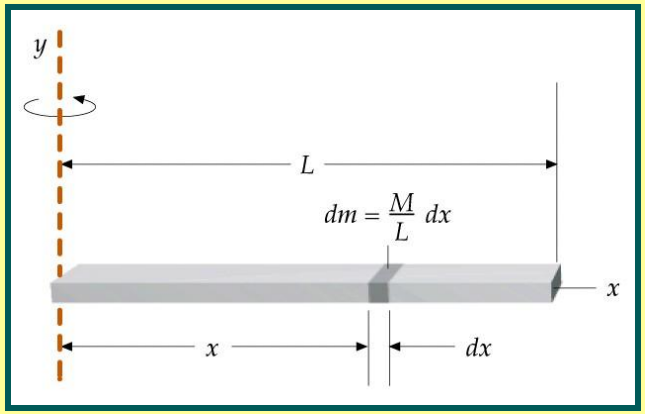


Exemplo:



$$\Rightarrow \quad I = I_{cm} + Mh^2$$

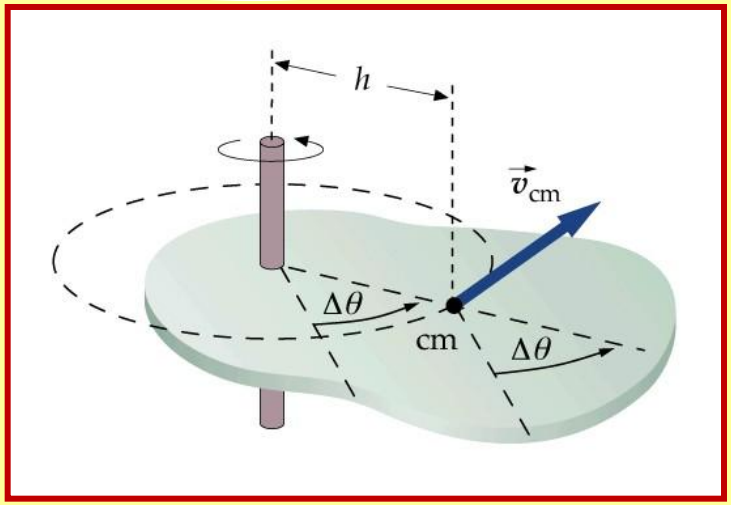
$$h = \frac{L}{2}$$



$$I = I_{CM} = \frac{ML^2}{12} \qquad I = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{ML^2}{3}$$

Demonstração do Teorema dos Eixos Paralelos

Vamos calcular a energia cinética de rotação para o eixo paralelo do corpo de massa M ao lado, quando girando com velocidade ω.



$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

A energia cinética de rotação de um corpo pode ser escrita como a energia cinética de rotação de um ponto em relação ao CM mais a energia cinética de rotação do CM em relação ao eixo.

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = K_{rotação_{CM}} + K_{CM} \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega_{cm}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Mas, $v_{cm} = h\omega$

e $\omega_{cm} = \omega$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M h^2 \omega^2$$

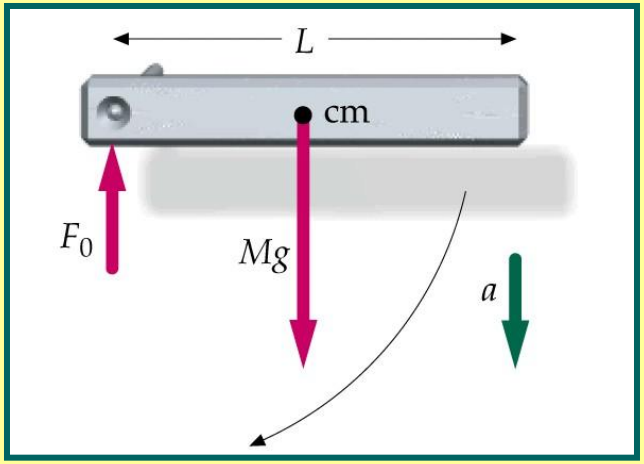
$$I = I_{cm} + Mh^2$$

Pêndulo Físico

Uma barra de comprimento L e massa M, articulada em sua extremidade, é largada do repouso, da posição horizontal. Determine:

(a) a sua velocidade angular, na posição vertical,

(b) força exercida pelo pivô sobre a barra.



Considerando a conservação da energia mecânica:

a) $$K_i + U_i = K_f + U_f \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} I\omega^2 + Mgy_{cm}$$

$$0 = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 + Mg\left(-\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

b) $$F_0 - Mg = Ma_c$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega L/2)^2}{L/2} = \frac{L}{2}\omega^2 \Rightarrow F_0 = M(g + \frac{L}{2}\omega^2) = M\left(g + \frac{L}{2}\frac{3g}{L}\right)$$

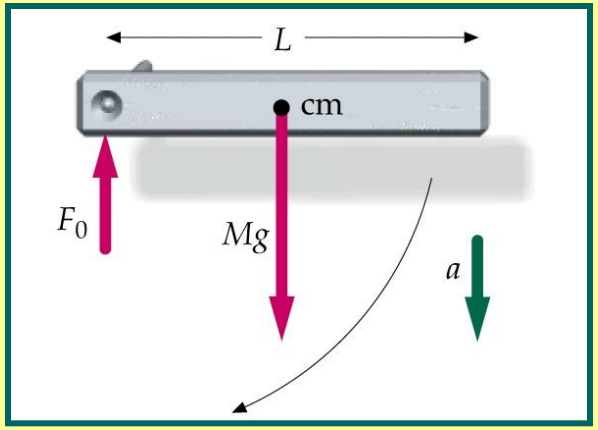
$$F_0 = \frac{5Mg}{2}$$

Qual a velocidade angular inicial necessária para a barra chegar até uma posição vertical superior ?

Considerando a conservação da energia mecânica:

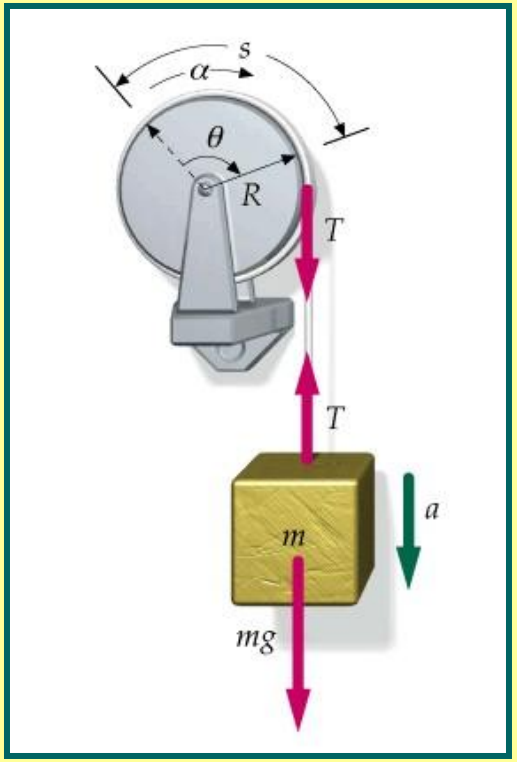
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 + 0 = 0 + Mgy_{cm} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 = Mg\frac{L}{2}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Um objeto de massa m está suspenso por um fio de massa m_f e comprimento L que foi enrolado na polia, que tem raio R e massa m_p. Suponha que toda a massa da polia esteja em sua borda (forma de anel) e que no instante inicial o corpo esteja em repouso e o fio enrolado. Determine qual a velocidade do corpo quando ele tiver caido uma distância d.



Considerando conservação da energia mecânica.

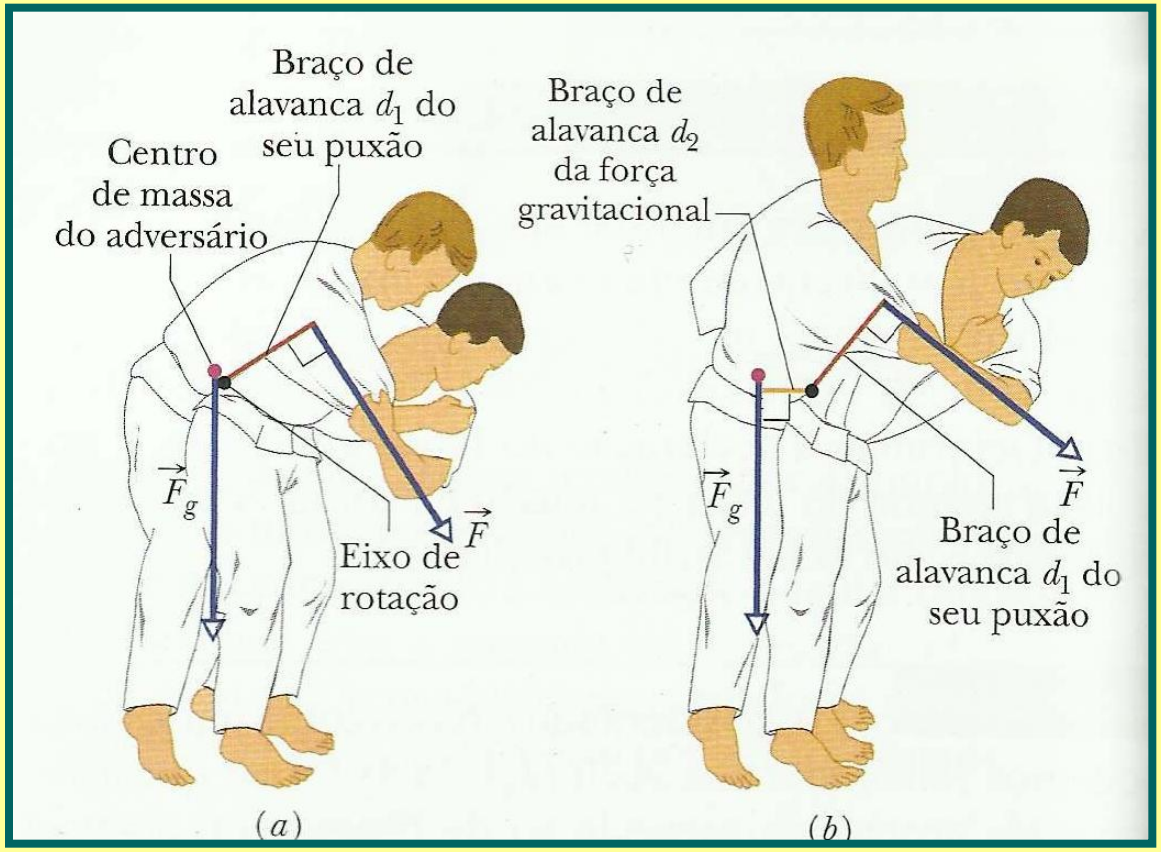
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m_f v^2 + \frac{1}{2} m v^2 + mg(-d) + m_f^* g(-d/2)$$

$$I_{polia} = I_{anel} = m_p R^2 \qquad m_f^* = \frac{d}{L} m_f$$

$$v = \sqrt{\frac{(2mL + m_f d)gd}{(m_f + m + m_p)L}}$$

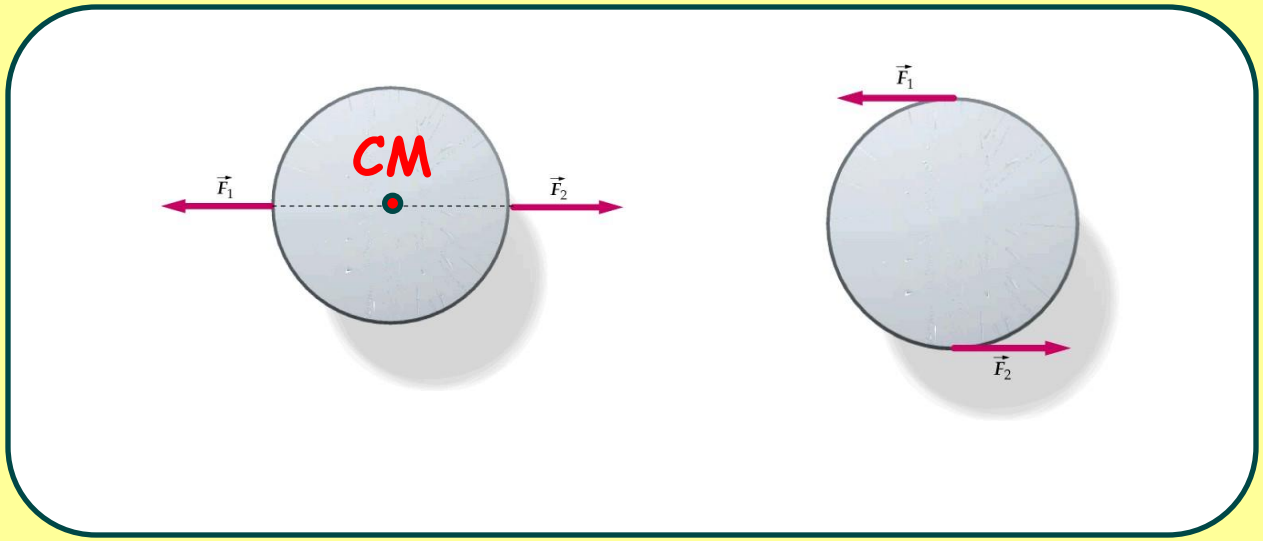
Se o judoca não aplicar o golpe no centro de massa do oponente ele deverá usar o dobro da força.



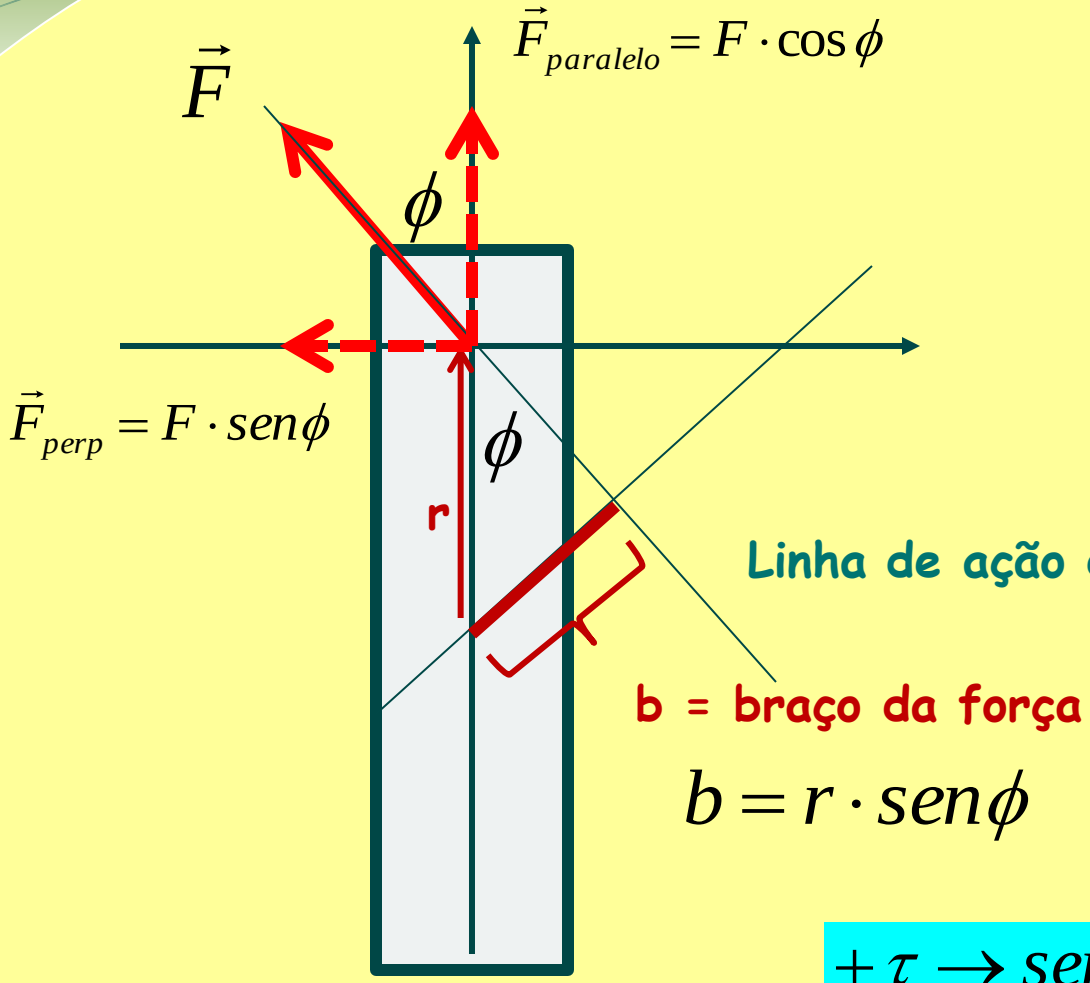
$$F_b = 2 \times F_a$$

Torque

Já vimos a Segunda Lei de Newton, onde a resultante das forças externas provoca a aceleração do centro de massa de sistemas. Porém, quando a linha de ação das forças externas não passa pelo centro de massa, temos um segundo efeito, que é a rotação do sistema. Esta rotação é acelerada. Assim, temos o equivalente à Segunda Lei de Newton, para a rotação.



Torque



$$b = r \cdot sen\phi$$

$$|\tau| = F_{perp} \cdot r = Fsen\phi \cdot r$$

$$ou$$

$$|\tau| = F \cdot b = F \cdot rsen\phi$$

$$+\tau \rightarrow sentido_anti-horário$$

$$-\tau \rightarrow sentido_horário$$

Torque

Considere um ponto P de um corpo rígido a uma distância r do centro de rotação. Uma força F é aplicada como na figura ao lado. Para a componente tangencial da força, temos:

$$F_t = ma_t \quad \text{Onde} \quad F_t = F sen\phi$$

$$F sen\phi = ma_t$$

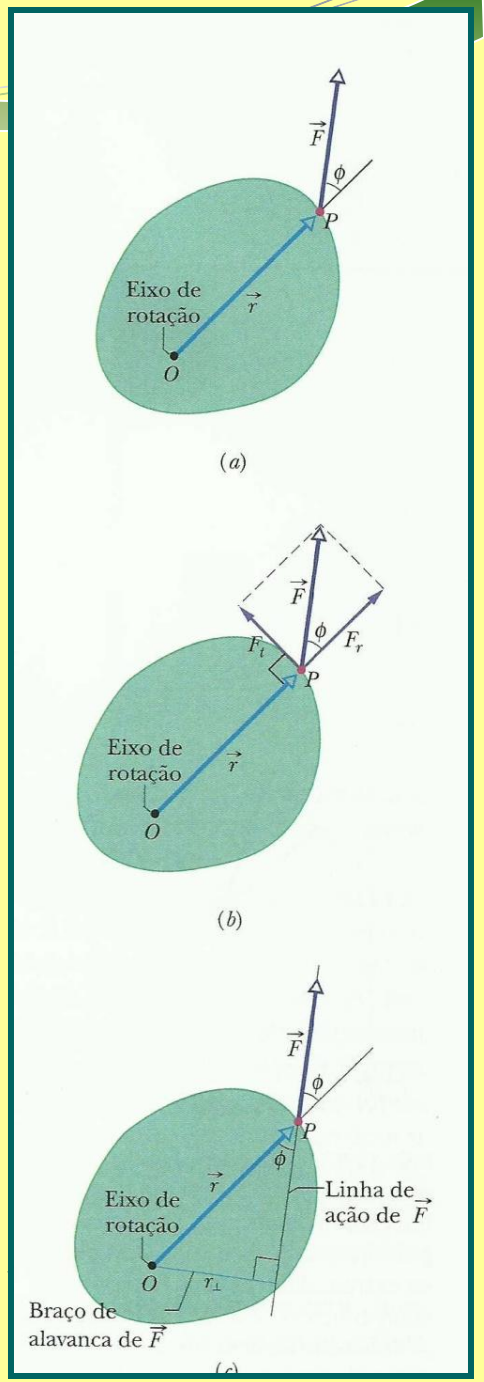
Multiplicando a equação por r:

$$rF sen\phi = mra_t = mr(r\alpha) = mr^2\alpha$$

$$\tau = r \times F = rF sen\phi$$

τ é o Torque em relação ao eixo de rotação

$$rF sen\phi = rF_t$$



Rotação, inércia, torque

Um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é uma coleção de partículas, com as mesmas velocidade e aceleração angulares.

Para uma partícula do corpo: $\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$

Somando sobre todas as partículas do corpo:

$$\sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = (\sum m_i r_i^2)\alpha = I\alpha$$

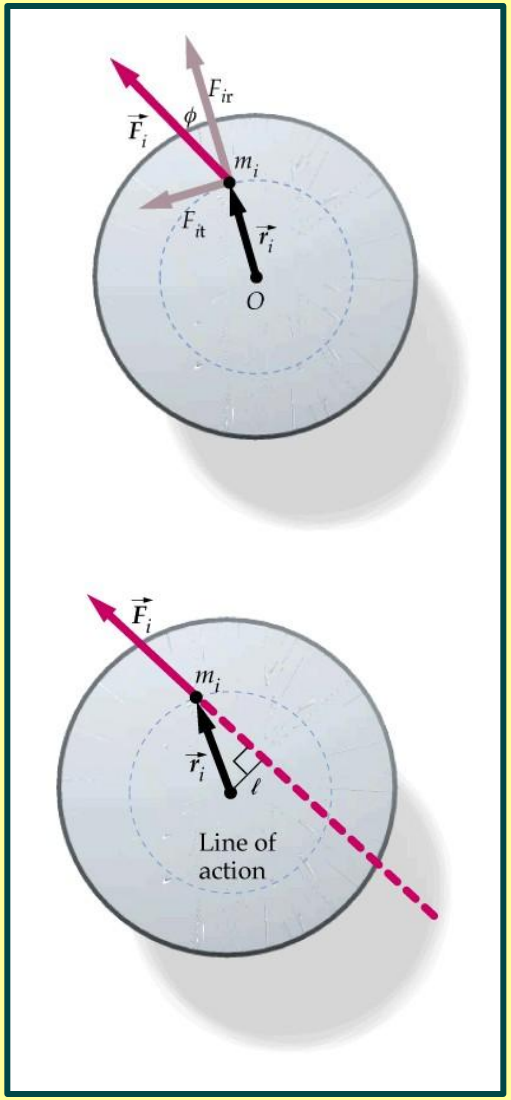
Segunda Lei de Newton para a rotação

$$\tau_{ext_{res}} = I\alpha$$

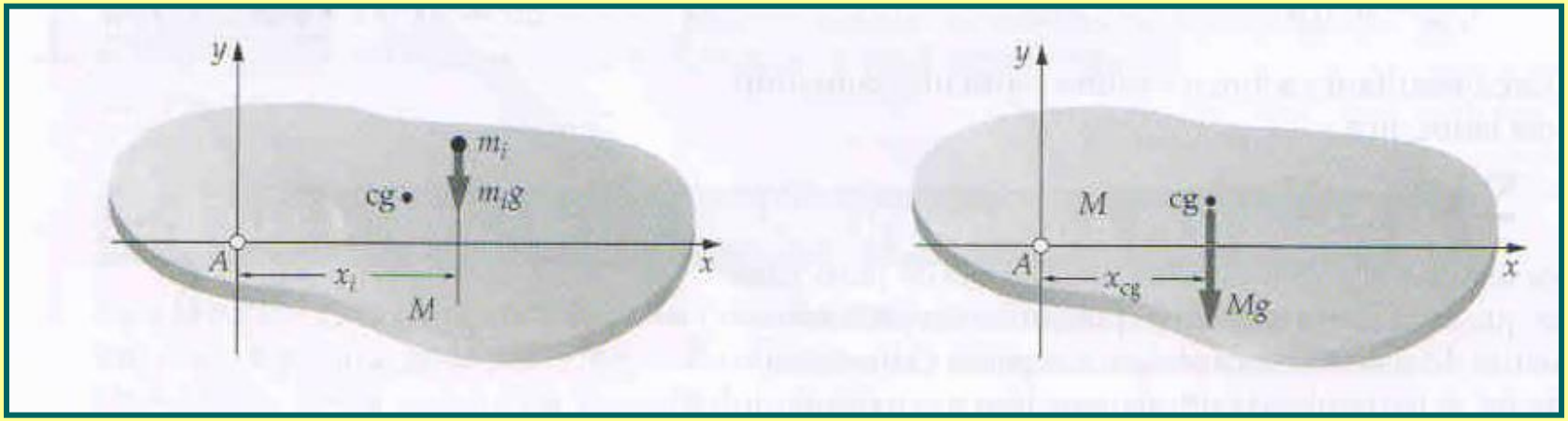
Para rotações, o que nos interessa são as componentes tangenciais da força

$$\tau = F_t r = F \sin\phi \cdot r = Fr \sin\phi = Fl$$

Onde, l é o "braço de alavanca"



Considere um corpo extenso de massa M, apoiado pelo eixo A e submetido à força gravitacional.



O torque sobre cada partícula constituinte será:

$$\tau_i = F_i r_i = m_i g x_i$$

O torque total sobre o corpo será a soma dos torques sobre todas as partículas constituintes

$$\tau_{ext_{res}} = \sum m_i g x_i = (\sum m_i x_i) g = M x_{cm} g = P x_{cm}$$

Algumas Correspondências entre os Movimentos de Translação e Rotação

Translação Pura (Direção Fixa)		Rotação Pura (Eixo Fixo)	
Posição	x	Posição angular	θ
Velocidade	$v = dx/dy$	Velocidade angular	$\omega = d\theta/dt$
Aceleração	$a = dv/dt$	Aceleração angular	$\alpha = d\omega/dt$
Massa	m	Momento de inércia	I
Segunda lei de Newton	$F_{res} = ma$	Segunda lei de Newton	$\tau_{res} = I\alpha$
Trabalho	$W = \int F\,dx$	Trabalho	$W = \int \tau\,d\theta$
Energia cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potência (força constante)	$P = Fv$	Potência (torque constante)	$P = \tau\omega$
Teorema do trabalho e energia cinética	$W = \Delta K$	Teorema do trabalho e energia cinética	$W = \Delta K$

Roda da bicicleta

Uma bicicleta possui uma roda com massa (2,4 kg) e raio R= 35 cm. Aplica-se uma força de 18 N a uma distância de 7 cm do eixo da roda. Após 5 s, qual é a velocidade angular da roda?

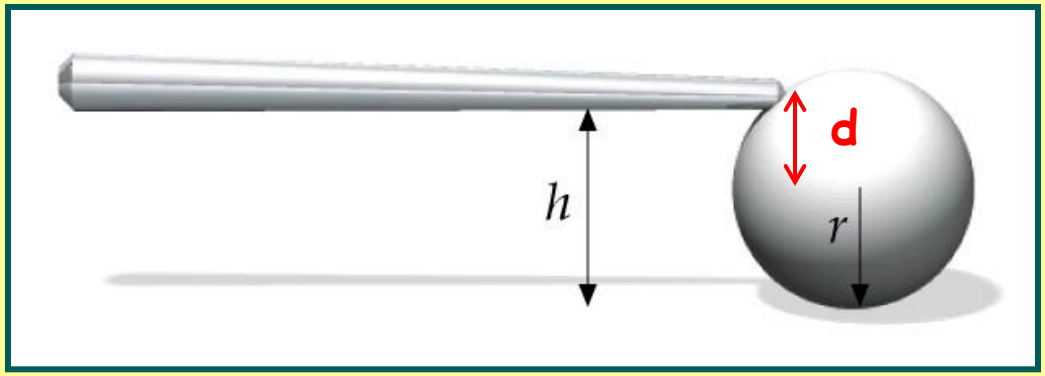
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t \\ \tau_{ext_{res}} = I\alpha = Fr \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{Fr}{I_{anel}} = \frac{Fr}{MR^2}$$

$$\omega = \alpha t = \frac{Fr}{MR^2} t = 21 rad/s$$

Bola de Sinuca

Um taco atinge uma bola de bilhar em um ponto a uma distância d acima do centro da bola. Determine o valor de d para que a bola role, sem deslizar.



Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação). (o peso e a normal na polia, não geram torque)

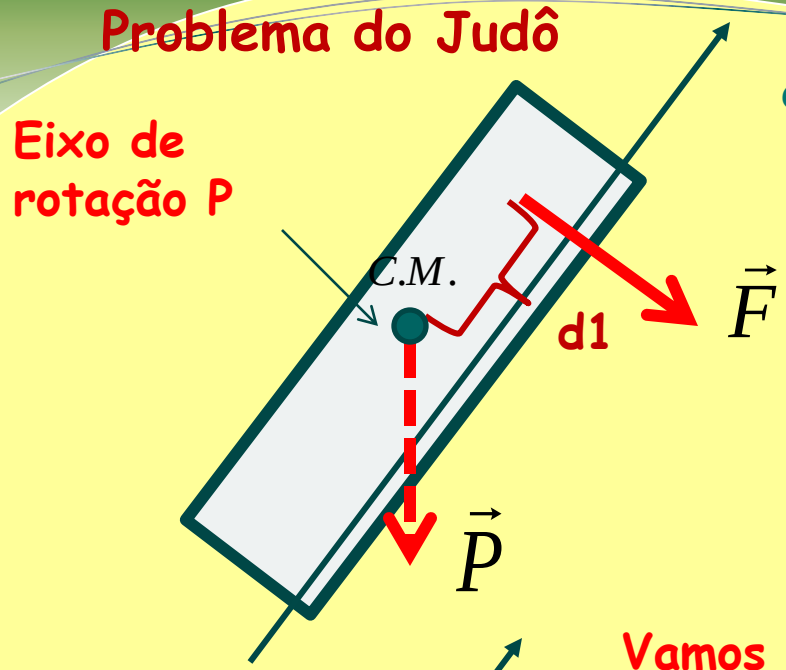
$$\tau_{ext} = I\alpha = Fd \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{Fd}{I}$$

$$F = ma_{cm}$$

Para que a bola role sem deslizar $\quad a_{cm} = R\alpha$

$$\frac{F}{m} = a_{cm} = R\frac{Fd}{I} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{I_{esfera}}{mR} = \frac{(2/5)mR^2}{mR} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{I}{mR} = \frac{2R}{5}$$

Problema do Judô



dados

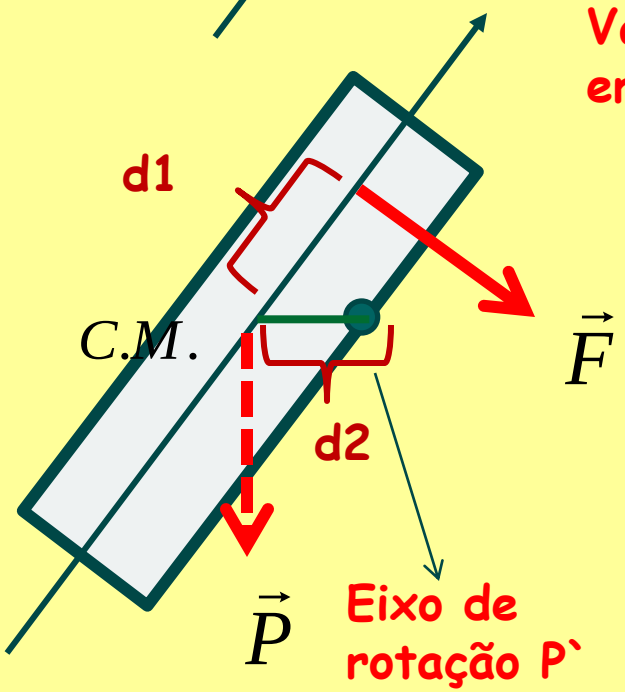
$$m = 90kg$$
$$|\tau_{total}| = 90N.m$$
$$d_1 = 0.30m$$

$$\vec{\tau}_{total} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_F$$

$$|\tau_P| = 0$$

$$|\tau_F| = d_1 \cdot F$$
$$90 = 0.30 \cdot F$$
$$F = 300N$$

Vamos supor que o judoca erre o ponto de alavanca por $d_2 = 0.10m$



$$\vec{\tau}_{total} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_F$$
$$-\tau_{total} = -\tau_F + \tau_P$$
$$|\tau_P| = mgd_2 = 90 \times 10 \times 0.10 = 90Nm$$
$$|\tau_F| = d_1 \cdot F = 0.30 \cdot F$$
$$-90 = -F \cdot 0.30 + 90 \Rightarrow F = 600N$$