10/10/2011

Introdução às equações diferenciais parciais

Nosso atual entendimento sobre grande maioria dos fenômenos físicos utiliza de forma abundante equações diferenciais (tanto ordinárias quanto parciais). Em mecânica clássica em geral encontramos equações diferenciais ordinárias de 2º ordem (em geral, para os problemas mais interessantes as equações são não-lineares). Com o advento das equações de Maxwell, eqs. dif. parciais e problemas de valor de contorno se tornaram muito comuns na física. No século XX, Relatividade geral e mecânica quântica tornaram o conhecimento sobre eqs. dif. indispensável na física. Esse tópico é de fato o mais importante deste curso.

Infelizmente, nossa discussão sobre esse assunto será muito breve e simplificada mas eu espero que o básico pelo menos fique acessível a todos.

A ação de tomar derivadas (tanto ordinárias como parciais) é uma operação linear i.e.,

$$\frac{d}{dx}\left(a\varphi(x) + b\psi(x)\right) = a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\psi}{dx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\varphi(x,y) + b\psi(x,y)\right) = a\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) + b\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y)$$

Em geral, eqs. dif. ordinárias ou parciais podem ser escritas em termos de um operador linear D

o que você quer encontrar

$$D\psi = f$$

(se $f=0$ a equação é homogênea)

operador linear

função conhecida

Quando D é linear, <u>o princípio da superposição</u> é válido, i.e., a soma de duas soluções também é solução.

Em geral, só veremos eqs. dif. com no máximo duas derivadas já que esse é o caso que mais ocorre em física (Leis de Newton, Eletromagnetismo, Relatividade Geral, eq. de Schrodinger...)

Exemplos de Eqs. Dif. Parciais (EDP):

1) Equação de Laplace: $\nabla^2\psi = 0$

- Isso aparece em eletrostática, magnetostática, hydrodinâmica, difusão de calor (independente do tempo), gravitação

2) Eq. de Poisson: $\nabla^2 \psi = \rho$

Basicamente, essa é a eq. de Laplace com uma fonte ρ (agente externo)

3) Eq. de Helmholtz $^{(+)}$ (independente do tempo) e eq. de difusão $^{(-)}$

$$\nabla^2 \psi \pm k^2 \psi = 0$$

Isso aparece no estudo de: membranas, cordas, som, ondas eletromagnéticas, reatores nucleares.

4) Eq. da difusão (mais detalhes depois)

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi - a^2 \nabla^2 \psi = 0 \qquad a > 0$$

5) Eq. da onda (mais detalhes depois)

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi = 0$$

6) Eq. de Klein-Gordon:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2\right)\psi = 0 \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

7) Eq. de Schrödinger (~ eq. de difusão com coeficientes complexos)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{x})\psi$$

8) Eq. de Dirac (nesse curso não veremos isso)

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad , \quad \psi \text{ é um spinor.}$$

<u>Métodos para encontrar soluções de EDP</u>

1) Separação de variáveis (veremos em detalhe aqui no curso).

2) Conversão da EDP em uma equação integral usando funções de Green (muito usado para EDP's não-homogêneas como o caso da eq. de Poisson). Se tivermos tempo sobrando veremos esse método de solução no curso.

3) Outros métodos analíticos como desenvolvimento em séries de Fourier, transformadas de Fourier e Laplace. Veremos esse método em detalhe aqui.

4) Métodos numéricos: Infelizmente, embora esse seja de fato o método mais comum de solução (uma vez que muito raramente

o problema que você está interessado pode ser de fato resolvido "no braço" de forma analítica, não veremos nada disso nesse curso.

Classes de EDP's

A EDP linear e homogênea mais geral que podemos formar (em 2 dimensões, por simplicidade) é

$$\left[A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E\frac{\partial}{\partial x} + 2F\frac{\partial}{\partial y} + G\right]\psi(x,y) = 0$$

Esse operador pode tomar três formas diferentes dependendo de

$$B^2 - AC \begin{cases} >0 \longrightarrow \text{EDP hiperbólica} \\ =0 \longrightarrow \text{EDP parabólica} \\ <0 \longrightarrow \text{EDP elíptica} \end{cases}$$

A classificação é análoga a de uma cônica

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ex + 2Fy + G = 0$$

onde $B^2 - AC$ (o discriminante) determina se temos hipérboles, elipses ou parábolas.

Ex: Eq. da onda $\left(\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = 0$

$c_1 > 0$ $\Rightarrow$ claramente EDP hiperbólica!

- Eq. da difusão $\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x)$

$A = B = C = 0 \Rightarrow$ parabólica

- Eq. Laplace: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = 0$

$A = C, \; B = 0 \Rightarrow$ elíptica!

Mesma terminologia se aplica no caso de funções de mais de 2 variáveis. Assim, a eq. do onda é sempre hiperbólica, a da difusão sempre é parabólica, e a de Laplace sempre é elíptica em qualquer número de dimensões.

Se os coeficientes A, B, C, D, E, F e G não são constantes e podem variar com as coordenadas, uma dada equação pode estar numa dada classe e mudar para outra quando os parâmetros variam.

Ex: <u>Equação da onda em 1+1 dimensões</u>

⊛ $1+1 = \underset{\text{tempo}}{1} + \underset{\text{espaço}}{1}$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = 0$$

$B^2 - AC > 0$

Essa equação é hiperbólica. Assim, deve existir um sistema de coordenadas ξ, η

onde $AC = 0$ e $B^2 > 0$ e a EDP fica $\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}$.

Note que $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)$

(assumindo que a solução $\psi \in C^2$ e assim, $\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}\psi$

$= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\psi$ - sempre assumiremos isso aqui)

(variáveis do cone de luz)

Interessante... Vamos definir $\xi = x + ct$

$\eta = x - ct$

Assim, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\eta}$ então

$\frac{\partial}{\partial t} = c\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}\right)$ e

$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}$ Assim

$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta} = 2\frac{\partial}{\partial\xi}$

$\frac{1}{c}\partial_t - \partial_x = \partial_\xi - \partial_\eta - \partial_\xi - \partial_\eta = 2\partial_\eta$ Então

$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = 0 \implies \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\psi(\xi,\eta)$

A solução mais geral então é (princípio da superposição)

$$\psi(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

De fato,

$$\partial_\xi \partial_\eta [f_1(\xi) + f_2(\eta)] = \cancel{\partial_\xi \partial_\eta f_1(\xi)}^{\,0} + \cancel{\partial_\xi \partial_\eta f_2(\eta)}^{\,0}$$

onde $f_1(\xi) \equiv f_1(x+ct)$ e $f_2(\eta) = f_2(x-ct)$

são funções arbitrárias $\in C^2$.

Ex: Para o caso elíptico, vejamos a equação de Laplace em $\underset{\text{(tempo)}}{0} + \underset{\text{espaço}}{2}$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Definam $\xi = x + iy$ e $\eta = \xi^* = x - iy$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\partial_\xi - i\partial_\eta$$

$$\partial_x + i\partial_y = 2\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \partial_x - i\partial_y = 2\partial_\xi$$

$$\Rightarrow (\partial_x^2 + \partial_y^2)\psi(x,y) = 0 \Rightarrow \partial_\eta \partial_\xi \psi(\xi,\eta) = 0$$

Novamente, vemos então que a solução mais geral é

$$\psi(x,y) = f_1(x-iy) + f_2(x+iy)$$

onde $(\partial_x - i\partial_y) f_1(x-iy) = f_1' - f_1' = 0$

$$(\partial_x + i\partial_y) f_2(x+iy) = f_2' - f_2' = 0$$

Como $f_1(x-iy)$ e $f_2(x+iy)$ são soluções da eq. de Laplace em duas dimensões, elas são chamadas de funções harmônicas.

EDP's não-lineares

Imagine que tivéssemos a eq. linear

$$\partial_t \psi + c\,\partial_x \psi = 0$$

(Nós veremos isso em deta
Um método muit
usado para achar

a solução seria dizer que

$$\psi(t,x) = e^{i\omega(k)t - ikx}$$

onde $\omega(k)$ é determinado assim: jogamos esse Ansatz de volta na equação e encontra

$$(i\omega(k) - cik)\psi = 0 \quad \text{ou}$$

$$\omega(k) = ck \; !$$

Esse função $\omega(k)$

(onda mantém forma ao propagar)

é chamada de relação de dispersão; ou seja um modo de frequência $\omega = ck$ e número de onda k é solução da eq.

Note que $\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} = 0$. Equações onde $\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \neq 0$ envolvem dispersão (não-trivial), que ocorre em equações não-lineares.

Equação de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t}}_{\text{linear}} + \underbrace{\psi \frac{\partial \psi}{\partial x}}_{\text{não-linear}} + \underbrace{\frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi}_{\text{linear}} = 0$$

$\Rightarrow$ Não-linear! Princípio da superposição não se aplica.

Essa equação modela a propagação de ondas em água (rasa) e outros fenômenos ("ondas solitárias)

Ela possui soluções do tipo sólitons, que é uma solução da eq. não linear que mantém sua forma durante a propagação.

De fato, vamos assumir que $\psi(x-ct)$ é uma solução. Então, definindo

$\xi = x - ct$ obtemos $\frac{\partial}{\partial t}\psi(x-ct) = -c\, d_\xi \psi$

$\partial_x \psi = d_\xi \psi$, $\partial_x^3 = d_\xi^3 \psi$ e assim

$$\partial_t \psi + \psi \partial_x \psi + \partial_x^3 \psi = 0 \Longrightarrow (\psi - c)\frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d^3}{d\xi^3}\psi = 0$$

Então,

$$\frac{d^3}{d\xi^3}\psi(\xi) + (\psi - c)\frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad \text{ou}$$

$\rightarrow$ partes

$$\frac{d^3}{d\xi^3}\psi(\xi) + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\psi^2}{2}\right) - \frac{d}{d\xi}(\psi c) = 0$$

isso é equivalente a dizer que

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \frac{\psi^2}{2} - \psi c = \underline{\underline{cte}}$$

$\rightarrow$ define $= 0$. para que $\frac{d^2\psi}{d\xi^2} \rightarrow 0$ se $\psi \rightarrow 0$.

Agora, multiplicamos isso por $2\frac{d\psi}{d\xi}$

$$2\frac{d\psi}{d\xi}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{d\psi}{d\xi}\psi^2 - 2\frac{d\psi}{d\xi}\psi c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\psi^3}{3}\right) - \frac{d}{d\xi}\left(\psi^2 c\right) = 0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 + \frac{\psi^3}{3} - \psi^2 c\right] = 0 \qquad (298)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 = c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}$$

(Assume $\underline{\underline{cte}} = 0$ para que $\frac{d\psi}{d\xi} = 0$ se $\psi = 0$)

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \sqrt{c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}}$$ (escolhe raiz positiva)

$$\Rightarrow \int \frac{d\psi}{\sqrt{c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}}} = d\xi$$

você pode verificar que

$$\Rightarrow \psi(\xi) = \psi(x-ct) = \frac{3c}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right)}$$

Não veremos outros sólitons nesse curso. (infelizmente)

14/10/2011

Condições de contorno

Numa eq. dif. ordinária de 2º ordem, nós aprendemos que é preciso saber o valor da função e sua primeira derivada num dado ponto para que a integração da eq. dif. seja possível.

Para EDP's a coisa é mais complicada. Em geral, temos que resolver essas equações de modo que as soluções tenham um certo comportamento nas condições de contorno (que pode ser $x \to \infty$, ou um domínio fechado onde a solução tem que assumir

um dado valor na fronteira. Por exemplo, podemos resolver a equação de Laplace assumindo que $\psi(x,y) \to 0$ se $x, y \to \pm\infty$. Ou podemos resolver a eq. da onda para a amplitude de uma onda eletromagnética e impor que $\psi(t,L) = 0 = \psi(t,0)$.

Em geral, as condições de contorno mais encontradas são:

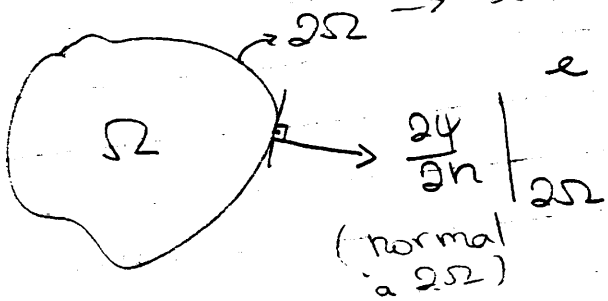
1 - Cauchy: é dado o valor de ψ e da componente da derivada de ψ normal à fronteira de uma região. Essas são as mais convenientes para eqs. hiperbólicas.

2 - Condição de Dirichlet: O valor de ψ na fronteira $\partial\Omega$ de uma região Ω limitada é dada.

3 - Condição de Neumann: É dado o valor da derivada de ψ normal à fronteira de uma região limitada.

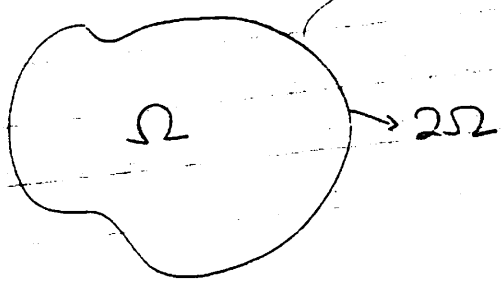
4 - Condição intermediária (ou de Robin): o valor de uma combinação (linear) de ψ e sua componente normal à fronteira são especificados na fronteira.

① Cauchy:



→ sabemos $\psi\big|_{\partial\Omega}$ e

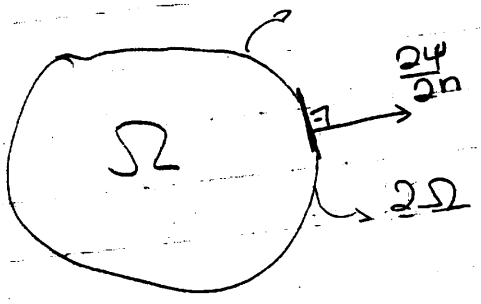
② Dirichlet:



→ sabemos $\psi\big|_{\partial\Omega}$

③ Neumann

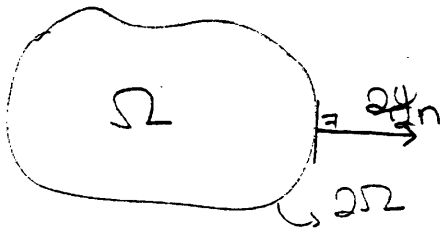
sabemos $\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$



④ Intermediária: (ou de Robin)

sabemos a combinação linea

$a\,\psi\big|_{\partial\Omega} + b\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$



O assunto involvendo a existência e estabilidade de soluções de EDP's é muito extenso e está além do que veremos neste nosso curso bastante introdutório.

Por exemplo, a eq. de Poisson numa região fechada com condições de Dirichlet levam a uma solução única e estável. Entretanto, as condições de Neumann também levam a uma solução estável e única, independente daquela obtida nas condições de Dirichlet. Assim, para esse problema, condições de Cauchy (que são basicamente Dirichlet + Neumann) podem levar a uma inconsistência.

Aqui não iremos nos preocupar muito com existência e estabilidade. Veremos a seguir como resolver algumas das equações diferenciais que aparecem na física através de alguns métodos. Uma excelente e completa discussão sobre EDP's pode ser encontrada no livro de Morse e Feshbach ou no clássico livro de Courant e Hilbert. (volume II)

Método de Separação de Variáveis

Ex: Equação da onda eletromagnética no vácuo.

Eqs. de Maxwell no vácuo.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Para mostrar que $\vec{E}(t,\vec{x})$ e $\vec{B}(t,\vec{x})$ obedecem a eq. da onda, precisamos saber que

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

para um campo vetorial $\vec{A}$. (decente) (Prove essa identidade)

De fato, tomando $\vec{\nabla}\times$ de

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$= -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$ mas

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}}_{0}) - \nabla^2\vec{E}$$ então

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{E} = 0$$ definindo $\frac{1}{c^2} = \mu_0\epsilon_0$ obtemos

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{E} = 0}$$

* Mostre que, analogamente, $\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{B} = 0}$

Ok, agora que temos um exemplo físico onde a equação da onda aparece, vamos voltar ao <u>método de separação de variáveis</u>

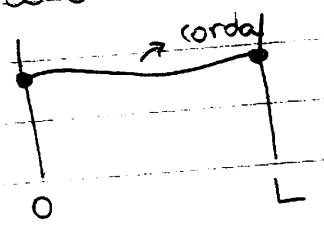
Suponha que uma dada quantidade ou função $u(t,x)$ obedece a equação da onda

$$\left(\frac{\partial_t^2}{c^2} - \partial_x^2\right) u(t,x) = 0$$

As <u>condições de contorno</u> por exemplo são

$$\boxed{u(t,0) = u(t,L) = 0}$$

⊛ $u(t,x)$ nesse caso poderia ser, por exemplo, a amplitude de uma corda que está amarrada em $x=0$ e $x=L$, que são as extremidades onde ela não se move.



Além dessas condições de contorno, para determinar a solução do problema temos que especificar as condições iniciais, que são nesse caso os valores de $u(t,x)$ e $\partial_t u(t,x)$ num dado instante de tempo

Vamos assumir que

$$\boxed{\begin{aligned} u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{(ff conhecida)} \\ \partial_t u(0,x) &= v_0(x) \quad \text{(ff conhecida)} \end{aligned}}$$

→ é como se fosse uma "foto" da corda e sua velocidade capturada num dado instante de tempo.

Agora, uma vez que sabemos as condições de contorno e condições iniciais podemos começar a resolver o problema.

O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções da EDP da forma

$$u(t,x) = \varphi(x)\,T(t)$$

Aqui, $\varphi(x)$ é somente função de x enquanto $T(t)$ somente função de t.

Para que esse <u>Ansatz</u> satisfaça as condições de contorno, vemos que

$$u(t,0) = 0 \implies \varphi(0) = 0$$

$$u(t,L) = 0 \implies \varphi(L) = 0$$

Agora, jogamos o Ansatz para $u(t,x)$ na eq. diferencial

$$\frac{\partial_t^2}{c^2} u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$$

mas $u(t,x) = T(t)\varphi(x)$ então

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{d^2 T(t)}{dt^2}\right)\varphi(x) = T(t)\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)$$

Vamos agora dividir isso por $T(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{c^2 T(t)}\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)$$

$\Downarrow$ Este lado só depende de t

$\Downarrow$ Este lado só depende de x

Isso só pode ser uma identidade válida se o lado esquerdo = lado direito = uma constante! Assim,

$$\boxed{\frac{1}{c^2 T(t)}\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \underset{\text{cte}}{\lambda} \qquad \frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \underset{\text{cte}}{\lambda}}$$

Essa constante λ é chamada de <u>constante de separação</u>. Podemos reescrever as eqs. como

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t) = \lambda c^2 T(t) \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$$

Vamos analisar a eq. em x.

(Notação $\frac{d}{dx}\varphi(x) = \varphi'(x)$)

$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \Rightarrow$ solução geral $\forall \lambda$?

Note que $t, x, u(t,x) \in \mathbb{R}$. Assim, vamos usar a solução geral

$$\varphi(x) = A e^{-\sqrt{\lambda}x} + B e^{\sqrt{\lambda}x}$$

Agora, impondo as condições de contorno

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B \equiv -\frac{\tilde{B}}{2}$$

Assim, $\varphi(x) = \frac{\tilde{B}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x)$

Agora, uma vez que $\varphi(L) = 0$ vemos que

$C\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}L) = 0$, se $\lambda = 0$ a solução é trivial ($\bar{n}$ considerada)

A condição geral para λ imposta pela condição de contorno é

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n i \pi}{L} \quad \text{onde } n = 1, 2, \ldots \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{L}}$$

Assim, temos uma infinidade de valores possíveis para $\lambda \rightarrow \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$

Esses λ_n são chamados de <u>valores característicos</u> ou <u>autovalores do problema</u>.

Vemos então que para cada λ_n existe uma <u>função característica</u> (ou autofunção)

$$\varphi_n(x) = \tilde{B}_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

onde $\tilde{B}_n$ é uma constante arbitrária (que pode ser diferente para diferentes valores de n).

A função $T(t)$ deve agora também ser uma $T_n(t)$ que obedece

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{T_n(t)}\underbrace{\ddot{T}_n(t)}_{\frac{d^2T(t)}{dt^2}} = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{ou}$$

$$\ddot{T}(t) + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}T_n(t) = 0 \Rightarrow$$ oscilador harmônico com frequência natural $\omega_0^2 = \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}$

Solução geral:

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

onde C_n e D_n são constantes (até agora) arbitrá-rio

Resumindo, nossa tentativa de achar a solução sob a forma

$$u(t,x) = T(t)\,g(x)$$

que satisfaça as condições de contorno e condições iniciais nos conduziu, até agora, a um número infinito de soluções que podem ser escritas como

$$u_n(t,x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)\right]$$

onde $A_n = \tilde{B}_n C_n$ e $B_n = \tilde{B}_n D_n$ são constantes arbitrárias.

A_n e B_n são ajustadas para que obedeçamos as condições iniciais.

Pelo princípio da superposição vemos que a solução geral deveria ser

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

desde que a série convirja.

Claramente, $u(t,0) = u(t,L) = 0$.

Agora das condições iniciais

$u(0,x) = u_0(x)$ vemos que

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$ → isso determina A_n usando $u_0(x)$.

e $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ leva à

$$\partial_t u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = v_0(x)$$

e assim obtemos B_n da série de Fourier de $v_0(x)$.

Agora nós de fato resolvemos essa EDP sujeita as condições de contorno e condições iniciais impostas.

Equações de Poisson e Laplace

Voltemos as equações de Maxwell (na presença de fontes dessa vez)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Vamos supor que os campos não

variam no tempo? Assim, $\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})$ e $\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}(x)$. Nesse caso, $\rho(t,\vec{x}) = \rho(x)$

$\vec{J}(t,\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$

e as eqs. de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}_{\text{eletrostática}} \qquad \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}(\vec{x})}_{\text{Magnetostática}}$$

Uma vez que $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, vemos que em <u>ELEtrostática</u> $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})$ (gradiente de um potencial)

e assim obtemos nesse caso

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\nabla^2\varphi(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}} \Rightarrow \underline{\text{Equação de Poisson}}$$

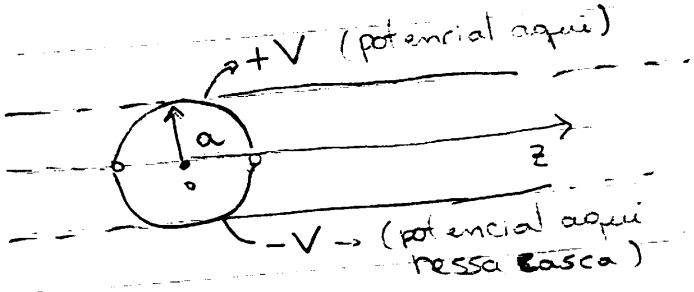
Se $\underline{\rho(\vec{x}) = 0} \Rightarrow$ <u>Eq. de Laplace</u>.

Vemos então que em eletrostática, o potencial eletrostático obedece a eq. de Laplace numa região

onde a densidade de carga $\rho(\vec{x}) = 0$.

X 17/10/2011

Ex: Cilindro oco (raio a) de metal muito longo.



Ache $\vec{E}(\vec{x})$ no interior do cilindro?

Nesse problema de eletrostática, $\rho(\vec{x}) = 0$. Assim, o potencial elétrico satisfaz a eq. de Laplace

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = 0$$

Como o problema tem simetria cilíndrica vamos escrever o Laplaciano em coord. cilíndricas: (r, θ, z) $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi = 0$$

$\varphi = \varphi(r, \theta, z)$.

Claramente, por simetria, vemos que a solução não pode depender de z (o problema tem simetria axial). Assim,

$\varphi = \varphi(r, \theta)$.

As condições de contorno são

$$\varphi(a,\theta) = V \quad , \quad 0 < \theta < \pi$$

$$\varphi(a,\theta) = -V \quad , \quad -\pi < \theta < 0$$

Note que $\varphi(r,\theta) = \varphi(r, \theta + 2\pi)$, ou seja, $\varphi(r,\theta)$ é função periódica de θ com período 2π.

Vamos usar o método de separação de variáveis!

$\varphi(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$ e assim, jogando de volta em $\nabla^2\varphi = 0$ obtemos

$$\frac{\Theta(\theta)}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{R(r)}{r^2}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} = 0$$

divide por $\Theta(\theta)R(r)$ para encontrar

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} = -\lambda$$

constante de separação

Assim, $\dfrac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} - \lambda\,\Theta(\theta) = 0$ e

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\lambda}{r^2}R = 0$$

Como $\Theta(\theta)$ é periódica em θ a solução geral dessa equação é uma combinação de senos e cosenos.

$$\lambda = -m^2 \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad e$$

$$\Theta(\theta) = A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta)$$

Assim, a eq. radial fica

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2}R = 0$$

→ esta é a equação de Euler.

Soluções → r^m ou r^{-m} $(m = 0, 1, 2, \dots)$ De fato,

se $R(r) = r^{\pm m}$ → $r\frac{dR}{dr} = \pm m\, r^{\pm m}$ e

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = m^2 r^{\pm m - 2} = \frac{m^2 R(r)}{r^2}$$

então elas são soluções.

Entretanto, nós devemos impor que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ seja bem definido em $r = 0$ e assim, desprezaremos a solução r^{-m}. (pois o $\vec{E}$ diverge no $r = 0$)

Dessa forma, nossa solução geral é

$$\varphi(r,\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left(A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta)\right)$$

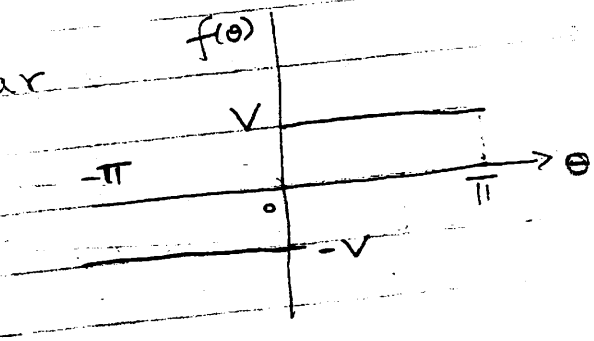
que deve satisfazer

$$\underbrace{\varphi(a,\theta)}_{\text{calculada na casca onde } r=a} = \underbrace{f(\theta)}_{f \text{ contínua por pedaços}} = \begin{cases} +V & \text{se } 0 < \theta < \pi \\ -V & \text{se } -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$

Então, $f(\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m \left(A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta)\right)$

Note que A_m e B_m então são os coeficient
da série de Fourier de $f(\theta)$.

Note que $f(\theta)$ é ímpar



Assim, $A_0 = 0$, $A_m = 0$

Então, $f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} a^m B_m \operatorname{sen}(m\theta)$

$$B_m = \frac{1}{a^m \pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, f(\theta) \operatorname{sen}(m\theta)$$

$$= \frac{2}{a^m \pi} \int_0^{\pi} d\theta\, V \operatorname{sen}(m\theta) = \frac{2}{a^m \pi} \left(-\frac{\cos m\theta}{m}\right)_0^{\pi} V$$

$$= \frac{-2}{a^m \pi m}\left[(-1)^m - 1\right]V = \frac{2V}{a^m \pi m}\left[1-(-1)^m\right]$$

ou seja, somente $m = 2p+1$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ sobrevivem. Assim,

$$B_m = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 2p \\ \dfrac{+4V}{a^m \pi m}, & \text{se } m = 2p+1 \end{cases}$$

e

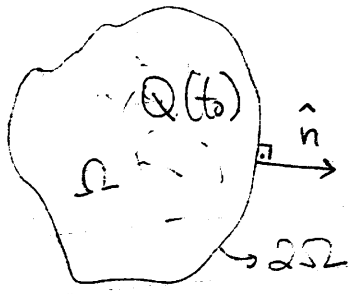
$$\varphi(r,\theta) = \frac{4V}{\pi} \sum_{\substack{m=1,3,5,\ldots \\ (\text{só ímpares})}}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m \operatorname{sen}(m\theta)$$

(*) Calcule o $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ usando essa solução.

Equação da Difusão

Conservação local de carga

Em eletromagnetismo, dizemos que a carga elétrica é conservada. Ignorando efeitos quânticos relativísticos, podemos dizer que de fato carga elétrica não pode ser criada ou destruída. Isso quer dizer que, se num dado instante de tempo t_0 a carga total numa região (Ω) é $Q(t_0)$



e se, num outro instante de tempo t medimos

$$Q(t) \neq Q(t_0),$$

como carga não pode ser destruída ou criada, isso significa que cargas ou entraram em Ω (se $Q(t) > Q(t_0)$) ou saíram de lá se ($Q(t) < Q(t_0)$). Isso significa que houve um fluxo, uma corrente de cargas atravessando a fronteira $\partial\Omega$ de Ω.

Podemos escrever $Q(t) = \int_\Omega d^3\vec{x}\, \rho(t,\vec{x})$ em termos da densidade de carga $\rho(t,\vec{x})$ e esse fluxo de carga através de $\partial\Omega$ como

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{J}(t,\vec{x}) \cdot \hat{n}\, da$$

onde $\hat{n}$ é o vetor (saindo) da $\partial\Omega$ e "da" o elemento infinitesimal de área.

Assim, conservação de carga aqui se traduz em dizer que a variação temporal da $Q(t)$ dentro de Ω se deu devido a um fluxo de cargas dado pela corrente $\vec{J}(t,\vec{x})$ através da superfície $\partial\Omega$.

Dessa forma, vemos que

forma integral da conservação de carga

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\oint_{\partial\Omega} \vec{J}\cdot d\vec{a} \qquad \underline{d\vec{a} = da\,\hat{n}}$$

negativo pois se as cargas estão saindo de Ω, $\vec{J}\cdot d\vec{a} \geq 0$ e $\frac{dQ}{dt} < 0$.

Usando que $Q(t) = \int_{\Omega} d^3\vec{x}\, \rho(t,\vec{x})$ e

o teorema de Gauss

$$-\oint_{\partial\Omega} \vec{J}\cdot d\vec{a} = -\int_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, d^3\vec{x}$$ vemos que

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} d^3\vec{x}\, \rho(t,x) = \int_{\Omega} d^3\vec{x}\, \frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} = -\int_{\Omega} d^3\vec{x}\, \vec{\nabla}\cdot\vec{J}$$

Assim, chegamos na forma diferencial da conservação de corrente elétrica

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(t,\vec{x}) = 0}$$

A equação da difusão "Lei de Fick

Para vários tipos de problemas a relação empírica descoberta por Fick se aplica

$\vec{J} = -D\vec{\nabla}\rho$ onde D = coeficiente de difusão. $D > 0$

Caso de foto essa approximação seja aplicável, podemos usar

$\vec{J} = -D\vec{\nabla}\rho$ na eq. da continuidade

$\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \Rightarrow \partial_t \rho - \vec{\nabla}(D\vec{\nabla}\rho) = 0$

Se $D = \underline{\underline{cte}}$ então chegamos a famosa <u>equação da difusão</u>

$$\boxed{\partial_t \rho - D\nabla^2 \rho = 0}$$

$D \geq 0$

Caso o tipo de substância descrita (nesse caso não mais a carga elétrica mas talvez a concentração de moléculas num gás) possa ser absorvida (destruída) ou criada (emitida) como por exemplo um fluxo de nêutrons num reator nuclear (que podem ser absorvidos ou emitidos por núcleos), temos que incluir um termo de fonte na equação da continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \underbrace{S(t,\vec{x})}_{\text{fonte}}$$

Pela "lei" de Fick chegamos nesse caso na equação de difusão <u>não-homogênea</u>

$$\partial_t \rho - D\nabla^2 \rho = S(t,\vec{x})$$

Uma equação similar aparece em proble-
mas simples envolvendo a condução de
calor

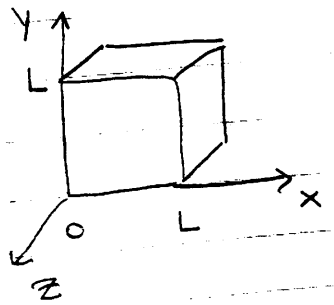
$$\partial_t T(t,\vec{x}) - K \nabla^2 T(t,x) = S(t,\vec{x})$$

$T(t,\vec{x}) \rightarrow$ temperatura
$K \rightarrow$ condutividade térmica
$S(t,\vec{x}) \rightarrow$ fonte de calor

Ex: Imagine que queríamos encontrar
a temperatura dentro de um cubo de
lado L, que estava inicialmente com $T=0$,
que no tempo $t=0$ é imerso num banho
térmico com temperatura T_0. Encontre
a temperatura $T(t,\vec{x})$ do cubo usando que
esse fenômeno pode ser descrito pela
equação de condução de calor

$$\partial_t T(t,\vec{x}) = K \nabla^2 T(t,\vec{x}), \qquad K>0$$

Condições de contorno



Como as paredes do cubo
estão em contato com o
banho térmico de temperatura
T_0, vemos que as condições
de contorno adequadas são

$T = T_0$ se $x = 0, L$

$T = T_0$ se $y = 0, L$

$T = T_0$ se $z = 0, L$

Note também que a condição inicial é

$$T(0, \vec{x}) = 0$$ pois dissemos que $T = 0$ no cubo inicialmente.

Agora, vamos usar separação de variáveis

$$T(t, \vec{x}) \sim f(t)\, G(x, y, z)$$ Assim, jogando na eq. de difusão

$$\frac{G(x,y,z)}{K} \frac{d}{dt} f(t) = f(t)\, \nabla^2 G(x,y,z)$$ (divide por $f(t)\, G(x,y,z)$)

$$\Rightarrow \frac{1}{f(t)} \frac{d}{dt} f(t) = \frac{K}{G(x,y,z)} \left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right] G(x,y,z)$$

$$= \underbrace{-\lambda}_{\text{cte de separação}}$$

Assim, temos as equações

$$\frac{d}{dt} f(t) = -\lambda\, f(t) \Rightarrow f(t) = \underset{\text{cte}}{A}\, e^{-\lambda t}$$

e então

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right] G(x,y,z) + \frac{\lambda}{K} G(x,y,z) = 0$$

A solução geral dessa equação envolve

$G \sim e^{i\alpha x} \cdot e^{i\beta y} \cdot e^{i\gamma z}$ onde, voltando na equação

$$\nabla^2 G = -\frac{\lambda}{k} G \Rightarrow (-\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) G = -\frac{\lambda G}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\lambda}{k}$$

(lei zero da termodinâmica)

Agora, claramente, esse cubo ficará com temperatura uniforme T_0 (aquela do reservatório) quando $t \to \infty$. Assim, escrevemos

$$T(t, \vec{x}) = T_0 + f(t)\, G(x, y, z)$$

$f(t) = e^{-\lambda t} A$ (se não colocarmos o T_0 nada faz sentido pois $f(t)_{t\to\infty} = 0$

Assim, pelas condições de contorno vemos que

$e^{i\alpha L} = 0$
$e^{i\alpha 0} = 0$ $\Rightarrow$ Devemos usar senos para x, y, z

e $\operatorname{sen}(\alpha L) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{L}$, $\beta = \frac{m\pi}{L}$

$\gamma = \frac{\ell\pi}{L}$

onde $n, \ell, m = 1, 2, \ldots$

Assim $\lambda \rightarrow \lambda_{mnl} = k\frac{\pi^2}{L^2}(n^2+m^2+l^2)$

Autovalores discretos (faz sentido pois região é limitada).

E então, até agora nossa solução é

$$T(t,\vec{x}) = T_0 + \sum_{m,n,l=1}^{\infty} C_{lmn}\, \text{Sen}\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \text{Sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \times \text{Sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-\lambda_{mnl} t}$$

Isso satisfaz as condições de contorno, claramente.

Quando $t \rightarrow \infty$, vemos que $T(\infty,\vec{x}) = T_0$ (uniforme), como tinha de ser.

Agora, temos também a condição inicial

$T(0,\vec{x}) = 0$. Como podemos satisfazer essa condição inicial?

$$T(0,\vec{x}) = 0 \Rightarrow -T_0 = \sum_{n,m,l=1}^{\infty} C_{lmn}\, \text{Sen}\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \times \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \text{Sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$$

Como já esperávamos, essa condição inicial determina os $C_{\ell mn}$. Para encontrar esses coeficientes, multiplicamos a eq. anterior por $\operatorname{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi z}{L}\right)\frac{1}{L^3}$ e integramos os dois lados sobre todo o cubo. Assim,

$$\frac{1}{L^3}\int_0^L dx\int_0^L dy\int_0^L dz\ \operatorname{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi z}{L}\right)(-T_0)$$

$$=\int_0^L dx\int_0^L dy\int_0^L dz\ \frac{\operatorname{sen}}{L^3}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi z}{L}\right)$$

$$\times\sum_{nm\ell=1}^{\infty} C_{\ell mn}\operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$$

Usando que $\frac{1}{L}\int_0^L dx\ \operatorname{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)=\frac{1-\cos(\ell'\pi)}{\ell'\pi}$

$$=\frac{1-(-1)^{\ell'}}{\ell'\pi}=\begin{cases}0 & \text{se } \ell'=2p\\ \frac{+2}{\ell'\pi} & \text{se } \ell'=2p+1\end{cases}\qquad p=0,1,2,\dots$$

e

$$\frac{1}{L}\int_0^L dx\ \operatorname{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}dx\ \operatorname{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\times\operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\delta_{\ell'\ell}$$

Assim, temos que para l', m', n' ímpares

$$-T_0 \frac{8}{\pi^3 l' m' n'} = \frac{1}{8} C_{l'm'n'}$$

$$\Rightarrow C_{l'm'n'} = -\frac{64}{\pi^3 l' m' n'} T_0$$ se $l' m' n'$ ímpar se não se anula.

Dessa forma, temos que para $t \geq 0$

$$T(t,\vec{x}) = T_0 \left\{ 1 - \frac{64}{\pi^3} \sum_{\substack{lmn \\ \text{ímpares}}} \frac{1}{lmn} \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \times \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-(l^2+m^2+n^2)\frac{k\pi^2 t}{L^2}} \right\}$$

Essa é a nossa solução final que obedece tanto as condições iniciais quanto as de contorno.

Quando $t \gg \frac{L^2}{k}$ somente o primeiro termo contribui de forma significante e assim

$$\lim_{t \gg \frac{L^2}{k}} T(t,\vec{x}) \simeq T_0 \left[1 - \frac{64}{\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right) \times e^{-\frac{3k\pi^2 t}{L^2}} \right]$$

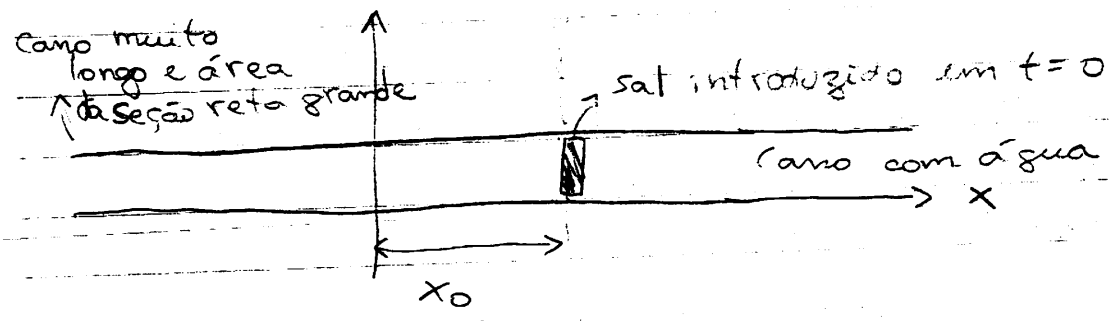
Uso de Transformadas de Fourier e Laplace

Ex: Um cano muito longo e de diamêtro está cheio de água. No instante $t=0$, introduzimos uma certa quantidade de sal em um certo ponto x_0 (distante de ambos os extremos do cano). Ache a concentração de sal em um instante posterior assumindo que a densidade de sal

$\rho(t,x)$ obedece a eq. de difusão

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad D>0$$

(x é a dimensão ao longo do cano).



Condições iniciais: só há sal no x_0 e aí colocamos uma massa M de sal naquela posição no cano de seção reta A. Assim,

$$\rho(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x-x_0)$$

Condições de contorno:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \rho(t,x) = 0 \qquad \forall t$$

que reflete a conservação do sal.

⊛ Note que agora nossas condições de contorno são especificadas no infinito. Nos problemas anteriores, nossas condições de contorno sempre foram estabelecidas numa região finita. Acabamos naqueles exemplos, basicamente, com uma série de Fourier. Nesse caso agora, como a função é especificada no infinito, será conveniente usar transformada de Fourier na coordenada x.

Note que, como o sal é conservado

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, A\, \rho(t,x) = \underbrace{M}_{\text{massa de sal introduzida}} \to \text{finito } \forall t$$

Isso implica que a transformada de Fourier existe pois

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} \rho(t,x) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(t,x) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}} \to \text{finito}$$

⊛ Note que $\rho(t,x) \geq 0$.

Vamos então considerar a transformada de Fourier

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx}\, \tilde{\rho}(t,k)$$

e usemos agora isso na eq. de difusão

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(t,x) \quad e$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t,k) = \frac{D}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-ikx}\right)}_{-k^2 e^{-ikx}} \tilde{\rho}(t,k)$$

Assim, $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}(t,k) + k^2 D\, \tilde{\rho}(t,k) = 0$

A solução geral é $\tilde{\rho}(t,k) = \tilde{\rho}(k,0)\, e^{-Dk^2 t}$

Note que, em geral, interpretamos $\rho(t,x)$ como uma distribuição. Vamos ver a condição inicial

$$\underbrace{\rho(0,x) = \frac{M}{A}\, \delta(x-x_0)}_{\text{distribuição}}$$

Agora, o Fourier disso é

$$\tilde{\rho}(0,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} \rho(0,x) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx_0} \quad //$$

Agora, vemos que

$$\tilde{\rho}(t,k) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0} e^{-tDk^2} \longrightarrow \underline{\text{uma gaussiana!}}$$

Temos agora que fazer a inversão para encontrar $\rho(t,x)$. Assim,

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx}\, \tilde{\rho}(t,k)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx} \frac{M}{A\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0} e^{-tDk^2}$$

$$= \frac{M}{A2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ik(x-x_0) - tDk^2} \longrightarrow \text{uma gaussiana deslocada}$$

Completamos quadrado: $-ik(x-x_0) - tDk^2$

$$= -tD\left[k + \frac{i(x-x_0)}{2tD}\right]^2 - \frac{(x-x_0)^2}{4tD}$$ Assim,

$$\rho(t,x) = \frac{M}{2\pi A} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4tD}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-tD\left[k + i\frac{(x-x_0)}{2tD}\right]^2}$$

transf. variável: $\xi \equiv k + \frac{i(x-x_0)}{2tD} \rightarrow d\xi = dk$

e $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-tD\xi^2} = \left(\frac{\pi}{tD}\right)^{\frac{1}{2}}$

Vemos que

$$\rho(t,x) = \frac{M}{A}\left(\frac{1}{4\pi t D}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4tD}}$$

Note que essa solução obedece as condições de contorno pois $\rho(t,\pm\infty) = 0$.

É interessante notar que quando $t \to 0$ essa solução se torna uma delta!

$$\lim_{t\to 0} \frac{M}{A}\frac{1}{(4\pi t D)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} = \frac{M}{A}\delta(x-x_0)$$

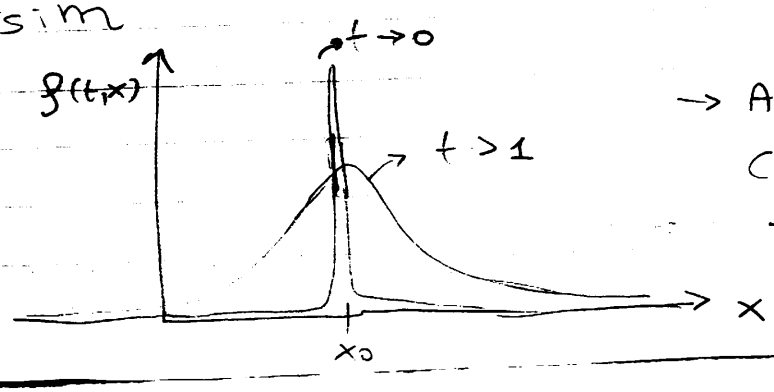
Isso é fácil de ver pois ela é uma seqüência Delta.

Além disso, da conservação do sal, vemos que de fato

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(t,x)\, A = M$$

pois a gaussiana que encontramos é normalizada.

Graficamente, nosso $\rho(t,x)$ evolui no tempo assim



→ A largura vai crescendo com tempo.

(Vejam a mathematica worksheet no STOA)

4/11/2011

Violação de causalidade na equação de difusão

Vamos examinar nossa equação de difusão de novo

$$\partial_t \rho(t,x) = D\, \partial_x^2 \rho(t,x)$$

Vamos agora fazer a transformada de Fourier em t e x

$$\rho(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{i\omega t - ikx}\, \tilde{\rho}(\omega,k)$$

Por definição, usamos sinais opostos para ω e k.

Assim, da equação de difusão

$$\partial_t \rho(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk\; i\omega\, e^{i\omega t - ikx}\, \tilde{\rho}(\omega,k)$$

$$\partial_x^2 \rho(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk\; (-k^2)\, e^{i\omega t - ikx}\, \tilde{\rho}(\omega,k)$$

Em Fourier

$$\Rightarrow \quad i\omega\, \tilde{\rho}(\omega,k) = -k^2 D\, \tilde{\rho}(\omega,k)$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \underset{\text{difusão}}{\omega(k)} = i k^2 D$$

Esse modo é bem diferente do que vimos na equação da onda onde a mesma análise leva

$$\frac{\partial_t^2}{c^2} u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) \Rightarrow \left(\frac{-\omega^2}{c^2} + k^2\right) \tilde{u}(\omega,k) = 0$$

repita essa análise!

ou $\omega_{onda}(k) = ck$ //

Enquanto a velocidade de grupo

$$v_g(k) = \left| \frac{d\omega(k)}{dk} \right|$$ para a

equação da onda leva

$$v_g^{onda}(k) = \frac{d\omega_{onda}(k)}{dk} = c \rightarrow \text{constante em } k.$$

Para a equação de difusão, obtemos

$$v_g^{Difusão}(k) = \left| \frac{d\omega^{difusão}(k)}{dk} \right| = 2kD \rightarrow \text{cresce com } k!$$

Assim, enquanto que na equação de onda a $v_g^{onda} = c = \underline{cte}$ (no caso da luz c = velocidade da luz), para a equação de difusão Vemos que a velocidade de grupo $v_g^{Difusão}(k)$ aumenta com k e assim, para modos onde k é suficientemente grande, vemos que $v_g^{Difusão}(k)$ pode ser tão grande quanto se queira (inclusive maior que a velocidade da luz!!)

$$\lim_{k\to\infty} v_g^{\text{Difusão}}(k) \to \infty .$$

Isso poderia ser visto no problema do sal que fizemos. Como naquele caso $\tilde{\rho}(t,k) \sim e^{-k^2 D t}$ → uma gaussiana

Em princípio, modos com $k \gg 1$ contribuem embora de forma diminuta.

Essa violação de causalidade, no sentido de que informação (mediada pela $v_g(k)$) pode ser propagada com velocidade infinita, é apenas um reflexo de nossa aproximação, i.e., a lei de Fick, usada na derivação da equação de difusão.

De fato, se você lembrar bem, nós derivamos essa equação a partir da equação da continuidade

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

que é sempre correta se a quantidade é de fato conservada. O problema vem da nossa hipótese de que a lei de Fick

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}\rho$$

é válida até para distâncias muito curtas

(ou modos de Fourier com $k \gg 1$).

De fato, a lei de Fick é geralmente válida para descrever fenômenos que variam muito lentamente no espaço e no tempo.

Para ilustrar isso, vamos pegar a Fourier da lei de Fick (1 dimensão)

$$J(t,x) = -D_0 \partial_x \rho(t,x)$$

em Fourier fica

$D_0 = \underline{cte} \geq 0$

$$\tilde{J}(\omega,k) = +\underbrace{ik}_{\text{uma potência em } k} D_0 \tilde{\rho}(\omega,k)$$

A versão generalizada da Lei de Fick seria algo com uma "constante" de Difusão que depende do espaço e do tempo

$$J(t,x) = -\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, D(t-t', x-x') \, \partial_{x'} \rho(t',x')$$

Pelo teorema da convolução

$$J(\omega,k) = ik D(\omega,k) \tilde{\rho}(\omega,k)$$

onde agora, dizemos que $\lim_{\omega,k \to 0} D(\omega,k) = D_0 = \underline{cte}$

Assim, a lei de Fick é apenas o 1º

termo da série de Taylor em $\omega, k = 0$ da função difusão $D(\omega, k)$. Assim, a lei de Fick, usada na derivação da equação de difusão, só é válida para ω, k pequeno ~ 0. Assim, o fato de que encontramos violação de causalidade na equação de difusão não é um "problema" pois o que ocorreu foi que usamos a equação (derivada para descrever fenômenos que variam lentamente no tempo e espaço) para entender modos que estão relacionados com física definida com ω e k muito grandes.

O que de fato ocorre é que da nossa lei de Fick generalizada

$$\tilde{J}(\omega, k) = ikD(\omega, k)\,\tilde{\rho}(\omega, k)$$

e jogando isso no Fourier da equação da continuidade.

$$\partial_t \rho + \partial_x J = 0 \Rightarrow i\omega\tilde{\rho}(\omega, k) - ik\tilde{J}(\omega, k) = 0$$

$$\Rightarrow i\omega\tilde{\rho}(\omega, k) - ik\left(ikD(\omega, k)\tilde{\rho}(\omega, k)\right) = 0$$

O que implica em

$$i\omega + k^2 D(\omega, k) = 0 \quad \text{ou}$$

$$\underline{\omega = \omega(k) = ik^2 D(\omega, k)}$$

A velocidade de grupo agora é

$$v_g(k) = \left| \frac{d(k^2 D(\omega,k))}{dk} \right| = \left| 2k\, D(\omega,k) + k^2 \frac{d}{dk} D(\omega,k) \right|$$

e se $D(\omega,k)$ for para zero suficientemente rápido se $k \to \infty$, podemos "consertar" a situação e for sempre $v_g(k)$ finito $\forall k$.

Note que como $\underset{\omega,k\to 0}{D(\omega,k)} = D_0$, nossa "eq. da difusão generalizada" se comporta como a equação de difusão tradicional quando $k \to 0$. Ou seja, para longas distâncias e longos intervalos de tempo temos difusão e para fenômenos que envolvem variações rápidas no tempo e espaço (i.e., onde $\omega, k \gg 1$) algo diferente de difusão ocorre.

Ex: <u>A equação de Maxwell-Cataneo</u>

Nesse caso, começamos como sempre com a equação da continuidade

$$\partial_t \rho(t,x) + \partial_x J(t,x) = 0$$

Mas agora a $J(t,x)$ não é dada pela lei de Fick. Ele é determinado pela equação dif. parcial

$$\tau_1 \partial_t J(t,x) + J(t,x) = -D_0 \partial_x \rho(t,x)$$

onde $\tau_1, D_0 > 0$. τ_1 é chamado de tempo de relaxação pois de fato ele mede quando tempo leva em média para que $J(t,x)$ alcance sua solução assintótica (dada pela Lei de Fick) quando $\frac{t}{\tau_1} >> 1$

$$\lim_{\frac{t}{\tau_1} >> 1} J(t,x) \approx -D_0 \partial_x \rho(t,x)$$

Agora, para determinar a equação nova para $\rho(t,x)$ voltamos para a eq. da continuidade

$$\partial_t \rho + \partial_x J = 0$$

e aplicamos ∂_t em tudo para encontrar

$$\partial_t^2 \rho + \partial_t \partial_x J = 0$$

Agora, já que

$$\partial_t \partial_x J = \partial_x \partial_t J$$

e $\tau_1 \partial_t J = -J - D_0 \partial_x \rho$

vemos que

$$\partial_t \partial_x J = \partial_x \partial_t J = -\partial_x \left(\frac{J + D_0 \partial_x \rho}{\tau_1} \right)$$

$$= -\frac{\partial_x J}{\tau_1} - \frac{D_0}{\tau_1}\partial_x^2 \rho$$ Assim

$$\partial_t^2 \rho + \partial_t \partial_x J = 0 \Rightarrow \partial_t^2 \rho - \frac{\partial_x J}{\tau_1} - \frac{D_0}{\tau_1}\partial_x^2 \rho = 0$$

Mas, pela equação de continuidade sabemos que

$$\partial_x J = -\partial_t \rho$$ e assim vemos que

$$\partial_t^2 \rho + \frac{1}{\tau_1}\partial_t \rho - \frac{D_0}{\tau_1}\partial_x^2 \rho = 0$$ ou

$$\boxed{\tau_1 \partial_t^2 \rho + \partial_t \rho - D_0 \partial_x^2 \rho = 0}$$ $\Rightarrow$ eq. de Maxwell-Cataneo (ou do Telegrafista)

Veja agora que interessante: Se $\rho(t,x)$ variar muito pouco no tempo, i.e., se

$$|\partial_t \rho| \gg |\tau_1 \partial_t^2 \rho|$$ nesse caso recuperamos a eq. de difusão.

Alternativamente, se $\rho(t,x)$ variar muito no tempo e espaço

$$|\partial_t \rho| \ll |\tau_1 \partial_t^2 \rho|$$ acabamos aproximadamente com

$$\tau_1 \partial_t^2 \rho - D_0 \partial_x^2 \rho = 0$$ ou

$$\boxed{\frac{\partial_t^2}{c^2}\rho - \partial_x^2 \rho = 0}$$ $\Rightarrow$ Equação da onda para $\rho(t,x)$ com velocidade de propagação

dada por $c = \sqrt{\frac{D_0}{\tau_1}}$. que pode ser menor que a velocidade da luz se τ_1 (que não é $=0$) for grande o suficiente. De fato:

Tomando o Fourier da eq. de Maxwell-Cattaneo obtemos

$$(-\omega^2\tau_1 + i\omega + k^2 D_0)\,\tilde{\rho}(\omega, k) = 0$$

ou, a equação que define o modo $\omega = \omega(k)$

$$-\omega^2(k)\tau_1 + i\omega(k) + k^2 D_0 = 0$$

$$\omega(k) = \frac{i \mp i\sqrt{1 - 4k^2 D_0 \tau_1}}{2\tau_1}$$

Quando $k \to 0$, $\omega(k) = \frac{i}{2\tau_1} \mp \frac{i(1 - 2k^2 D_0 \tau_1)}{2\tau_1}$

$$\omega(k) = \begin{cases} i k^2 D_0 \to \text{difusão} \\ \frac{i}{\tau_1} + O(k^2) \to \text{modo não-hidrodinâmico} \end{cases} \Longrightarrow \underset{k\to 0}{v_g(k)} = 2kD_0$$

o que é ok!

Quando $k \to \infty$

$$\omega(k) = \pm k\sqrt{\frac{D_0}{\tau_1}} \Rightarrow \underset{k\to\infty}{v_g(k)} = \sqrt{\frac{D_0}{\tau_1}} \to \text{finito}$$

Como havíamos antecipado...

Assim, vimos como "resolver" o problema da propagação infinita da equação de difusão ao custo da introdução de uma nova quantidade (tempo de relaxação τ_1).

Para fluidos, pode-se mostrar que o τ_1 é basicamente o tempo que leva para que uma molécula no gás colida com a outra (tempo livre médio). A difusão do ar e outras substâncias em geral do nosso cotidiano tem $\tau_1 \sim 10^{-6}$ segundos e assim, em situações usuais onde a densidade $\rho(t,x)$ não varia muito no tempo, nós nunca "vemos" essa quantidade τ_1 e a equação de difusão "padrão" é uma boa aproximação.

Em fluidos relativísticos (onde a densidade varia rapidamente ou a velocidade do fluido é da ordem da velocidade da luz) esse τ_1 é importante.

Ex: Vamos resolver o "problema do sal" mas agora usando a equação de Maxwell-Cattaneo.

Novamente, $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho(t,x)\, A = M \rightarrow$ finito

Condições iniciais: $\rho(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x)$ ($x_0 = 0$ para facilitar)

$\partial_t \rho(0,x) = 0$ (precisamos especificar isso pois nossa eq. para ρ tem 2 derivadas no tempo)

Condições de contorno: $\rho(t, \pm\infty) = 0$.

Eq. de Maxwell-Cataneo

$$\tau_1 \partial_t^2 \rho + \partial_t \rho - D_0 \partial_x^2 \rho = 0 \quad , \tau_1 e D_0 > 0$$

Fazendo Fourier (nesse caso só em x de novo como no problema do sal)

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikx} \tilde{\rho}(t,k)$$

e jogando na EDP

encontramos

$$\tau_1 \partial_t^2 \tilde{\rho}(t,k) + \partial_t \tilde{\rho}(t,k) + D_0 k^2 \tilde{\rho}(t,k) = 0$$

Essa é uma eq. dif. ordinária linear de 2º ordem.

Ansatz: $e^{i\omega(k)t}$ → na eq. acima para encontrar

$$-\omega^2(k)\tau_1 + i\omega(k) + D_0 k^2 = 0$$

Vimos antes que $\omega(k) = \frac{i}{2\tau_1}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 D_0 \tau_1}\right)$

Assim, a solução geral é

$$\tilde{\rho}(t,k) = C_1 e^{-\frac{t}{2\tau_1}\left(1 - \sqrt{1-4k^2D_0\tau_1}\right)} + C_2 e^{-\frac{t}{2\tau_1}\left(1 + \sqrt{1-4k^2D_0\tau_1}\right)}$$

$$= e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \left[C_1 e^{\frac{t}{2\tau_1}\sqrt{1-4k^2D_0\tau_1}} + C_2 e^{-\sqrt{1-4k^2D_0\tau_1}\frac{t}{2\tau_1}} \right]$$

onde A e B devem ser determinados das condições iniciais

Condições iniciais: $\rho(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x)$

Como $\tilde{\rho}(t,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx}\, \rho(t,x)$

vemos que $\tilde{\rho}(0,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} \frac{M}{A}\delta(x) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}$ ✓

como antes

$$\partial_t \tilde{\rho}(t,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx}\, \partial_t \rho(t,x) \quad \text{em } t=0$$

$$\partial_t \tilde{\rho}(t,k)\Big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx}\, \underbrace{\cancel{\partial_t \rho(t,x)}}_{0}\Big|_{t=0} = 0.$$

Comparando com nossa solução ...

$$\tilde{\rho}(0,k) = C_1 + C_2 = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}$$

$$\partial_t \tilde{\rho}(t,k)\Big|_{t=0} = -\frac{C_1}{2\tau_1}\left(1 - \sqrt{1-4k^2D_0\tau_1}\right)$$

$$-\frac{C_2}{2\tau_1}\left(1 + \sqrt{1-4k^2D_0\tau_1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = -C_2 \frac{\left(1+\sqrt{1-4k^2D_0\tau_1}\right)}{\left(1-\sqrt{1-4k^2D_0\tau_1}\right)}$$

Então,

Já que $C_1 = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}} - C_2$ vemos que

$$-C_2 \frac{\left(1+\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}\right)}{\left(1-\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}\right)} = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}} - C_2 \quad \text{ou}$$

$$C_2\left[1 - \frac{\left(1+\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}\right)}{\left(1-\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}\right)}\right] = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}} \quad \text{ou}$$

$$C_2 \frac{(-2)\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}}{\left(1-\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}\right)} = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{M}{A\sqrt{8\pi}} \frac{\left(\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1} - 1\right)}{\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}}} \quad \text{e}$$

$$C_1 = \frac{M}{A\sqrt{8\pi}} \frac{\left(\sqrt{\cdots} - 1\right)}{\sqrt{\cdots}} \frac{\left(1+\sqrt{\cdots}\right)}{\left(1-\sqrt{\cdots}\right)} \quad \text{assim}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{M}{A\sqrt{8\pi}} \frac{\left(1+\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}\right)}{\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}}} \quad \text{e}$$

Nossa solução (até agora) é

$$\tilde{\rho}(t,K) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{t}{2\tau_1}}}{\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}} \left[\cosh\left(\frac{t}{2\tau_1}\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}\ \operatorname{senh}\left(\frac{t}{2\tau_1}\sqrt{1-4K^2D_0\tau_1}\right)\right]$$

Agora é só fazer o inverso Fourier para achar $\rho(t,x)$ ☺ Vejam Morse e Feshbach no livro Vol. 1

Função de Green da equação de Difusão

Considere a equação de difusão de calor

$\partial_t T(t,x) = c\,\partial_x^2 T(t,x)$ onde queremos encontrar a distribuição de temperatura $T(t,x)$ em um sólido infinito dada uma temperatura inicial $T(0,x) = f(x)$.

Nada depende de y ou z e assim, podemos fazer o Fourier em x

$$T(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx}\, \tilde{T}(t,k)$$

(lembrem que transf. de Fourier são úteis na resolução dessas EDP's quando as condições de contorno envolvem uma região ilimitada).

Assim, da EDP encontramos

$$\partial_t T(t,x) = c\,\partial_x^2 T(t,x) \Rightarrow \partial_t \tilde{T}(t,k) = -c\,k^2 \tilde{T}(t,k)$$

e assim $\tilde{T}(t,k) = \tilde{T}(0,k)\, e^{-k^2 c t}$ onde

$$\tilde{T}(0,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx}\, T(0,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} f(x)$$

e dessa forma

$$\tilde{T}(t,k) = e^{-k^2ct} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, e^{ikx'} f(x')$$

Tomando a inversa agora encontramos

$$T(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikx} \tilde{T}(t,k)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, f(x') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-x')} e^{-k^2tc}$$

Já fizemos a integral em k acima antes. O resultado é

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ik(x-x')} e^{-tck^2} = \left(\frac{1}{4\pi tc}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4tc}}$$

e assim vemos que

$t_0 = 0$ aqui

$$T(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, G(x-x', t-t_0) \, T(t_0, x')$$

onde

$$G(x-x', t-t') = \sqrt{\frac{1}{4\pi c(t-t')}} \, e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t-t')c}}$$

é a função de Green da equação de difusão!

Note que agora temos a solução geral para esse problema de difusão (eq. homogênea) no caso de um meio infinito.

Uma vez que sabemos $G(x-x')$ podemos facilmente resolver aquele problema da "concentração de sal" onde naquele caso

$$T(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x) \quad \text{e assim}$$

(supõe $x_0 = 0$) $\quad t_0 = 0$

$$T(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, G(x-x',t) \frac{M}{A}\delta(x') = \frac{G(x,t)}{A} M$$

$$= \frac{M}{A} \frac{e^{-\frac{x^2}{4tc}}}{\sqrt{4\pi c t}} \quad , \text{ como vimos antes.}$$

$c > 0$

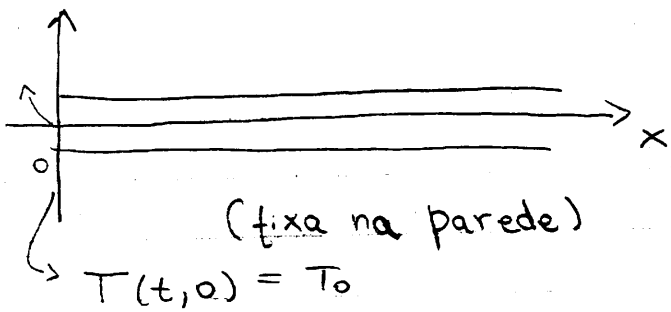
⊕ Mostre que $\partial_t G(t-t', x-x') - c\,\partial_x^2 G(t-t', x-x') = \delta(t-t')\delta(x-x')$

Funções de Green são muito úteis para esse tipo de problema envolvendo condições de contorno no infinito. Vocês verão em FISMAT II mais detalhes sobre funções de Green.

Exemplo usando Transformada de Laplace

Uma haste cilíndrica muito longa e de diâmetro muito pequeno está termicamente isolada em sua superfície lateral é mantida à $T=0$ até $t=0$, quando então uma de suas

extremidades é posta em contato térmico com um reservatório de calor à temperatura T_0. Ache a temperatura da haste em qualquer instante posterior. Use a eq. de difusão.



$x \geq 0$

$$\partial_t T(t,x) = c^2 \partial_x^2 T(t,x) \qquad c > 0$$

Condição inicial: $T(0,x) = 0$

Condições de contorno:

$$T(t,0) = T_0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} T(t,x) = 0$$

É fácil ver que, nesse problema, $T(t,x) \leq T_0$.

Como o $t \in [0,\infty)$, vamos usar a transf. de Laplace em t na eq. de difusão

$$\mathcal{L}\{\partial_t T(t,x)\} = \mathcal{L}\{c^2 \partial_x^2 T(t,x)\}$$

onde $U(s,x) \equiv \mathcal{L}\{T(t,x)\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st}\, T(t,x)$

Uma vez que $T(t,x) \leq \underbrace{T_0}_{\text{finito}}$, essa função deve ter transf. de Laplace e assumiremos

que $\partial_t T(t,x)$ também possui.

condição inicial

Vemos que $\mathcal{L}\{\partial_t T(t,x)\} = s\,U(s,x) - \cancel{T(0,x)}$

e $\mathcal{L}\{\partial_x^2 T(t,x)\} = \partial_x^2 U(s,x)$ então da EDP encontramos

$$\frac{s}{c^2} U(s,x) = \partial_x^2 U(s,x) \quad , \quad c^2 > 0$$

<u>Da condição de contorno</u>

$T(t,0) = T_0$ vemos que

$$\mathcal{L}\{T(t,0)\} = \mathcal{L}\{T_0\}$$

$$= \int_0^\infty dt\, e^{-st} T(t,0) = U(s,0) = \frac{T_0}{s}$$

A eq. $\partial_x^2 U(s,x) = \frac{s}{c^2} U(s,x)$ tem como soluções

$\underbrace{e^{\frac{\sqrt{s}}{c}x}}$ e $\underbrace{e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}}$. Assim $U(s,x) = e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x} U(s,0)$

$$= \frac{T_0}{s} e^{-\frac{\sqrt{s}x}{c}}$$

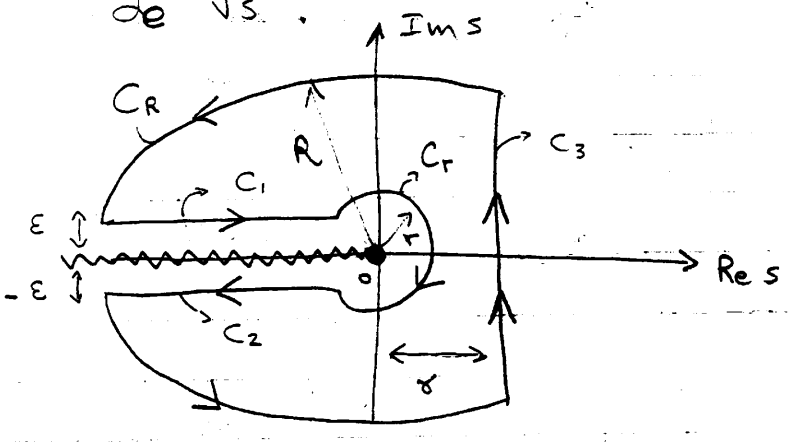
Vamos rejeitar essa solução pois diverge exponencialmente se $s \to \infty$

Agora, vemos que $U(s,x) = \frac{T_0}{s} e^{-\frac{\sqrt{s}x}{c}}$. Temos que encontrar a $T(t,x)$ cujo Laplace em t é $U(s,x)$

Podemos fazer isso usando a integral de Bromwich.

$$T(t,x) = \frac{T_0}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds\, \frac{e^{st}}{s}\, e^{-x\frac{\sqrt{s}}{c}}$$

Esse integrando acima tem uma linha de corte no plano complexo s por causa de $\sqrt{s}$.



* Vamos calcular esse contorno no limite em que $\gamma \to 0$, $r \to 0$, $R \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$.

Seja $C = C_R \cup C_r \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ o contorno fechado acima. Como não há nenhuma singularidade dentro do contorno,

$\oint_C$ desse integrando $= 0$.

$x>0,\ t>0$

A integral sobre C_R se anula quando $R \to \infty$.

Assim, definindo $f(s) = \frac{T_0}{2\pi i}\frac{e^{st}}{s}\, e^{-x\frac{\sqrt{s}}{c}}$

vemos que de $\oint_C f(s)ds = 0$ obtemos

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(s)\,ds + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to 0}}\left[\int_{C_1} f(s)\,ds + \int_{C_2} f(s)\,ds\right] + \lim_{\substack{r\to 0\\ \varepsilon\to 0\\ \gamma\to 0}}\int_{C_r} f(s)\,ds$$

$$+ \lim_{\gamma\to 0}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s)\,ds = 0$$

Vamos ver cada contribuição separadamente

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \varepsilon\to 0}}\int_{C_r} f(s)\,ds = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \frac{T_0}{2\pi i}\int_{C_r} ds\,\frac{e^{st}}{s}\,e^{-\frac{x\sqrt{s}}{c}}$$

mas C_r é, no limite $\begin{smallmatrix} r\to 0\\ \varepsilon\to 0\end{smallmatrix}$, basicamente um pequeno círculo de raio $r\to 0$ percorrido no sentido horário (então, ganha um $-$). Assim,

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \varepsilon\to 0}}\int_{C_r} f(s)\,ds = \lim_{r\to 0}\left(-\frac{T_0}{2\pi i}\right)\int_0^{2\pi} \cancel{is}\,d\theta\,\frac{e^{ire^{i\theta}}}{\cancel{s}}\,e^{-\frac{x}{c}\sqrt{r}\,e^{\frac{i\theta}{2}}}$$

$s = re^{i\theta}$ $\qquad = -T_0$ //

$\cancel{ds = is\,d\theta}$

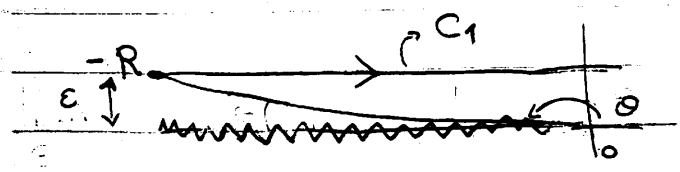
Para

$$I_1 = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to 0}}\int_{C_1} ds\,f(s)$$

devemos notar que no limite $R\to\infty$ e $\varepsilon\to 0$

$s = \sigma e^{i\pi}$

$\sigma \geq 0$



$ds = d\sigma\, e^{i\pi} = -d\sigma$

$s\to -\infty \to \sigma\to\infty$

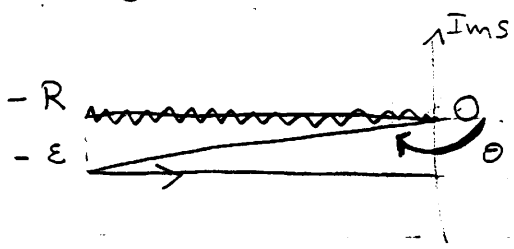
$s\to 0 \to \sigma\to 0$

Assim, já tomando os limites

$$I_1 = \frac{T_0}{2\pi i}\int_{\infty}^{0} (-d\sigma)\,\frac{e^{-\sigma t}}{(-\sigma)}\,e^{-\frac{x}{c}\sqrt{\sigma}\,e^{\frac{i\pi}{2}}}$$

$$I_1 = -\frac{T_0}{2\pi i}\int_0^{\infty} d\sigma\, \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}\, e^{-i\frac{x}{c}\sqrt{\sigma}}$$

Assim, vemos que para C_2 algo análogo ocorre



Nesse caso quando $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$

$$s = \sigma e^{-i\pi} \qquad \sigma \geq 0.$$

Assim,

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{C_2} f(s)\,ds = \frac{T_0}{2\pi i}\int_0^{\infty}(-d\sigma)\,\frac{e^{-\sigma t}}{(-\sigma)}\, e^{-\frac{x}{c}\sqrt{\sigma}}\, e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

$$= \frac{T_0}{2\pi i}\int_0^{\infty} d\sigma\, \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma}\, e^{\frac{ix}{c}\sqrt{\sigma}}$$

Então, vemos que

$$I_1 + I_2 = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{\infty} d\sigma\, \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma}\left(\frac{e^{\frac{ix}{c}\sqrt{\sigma}} - e^{-\frac{ix}{c}\sqrt{\sigma}}}{2i}\right)$$

$$I_1 + I_2 = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{\infty} d\sigma\, \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma}\, \mathrm{sen}\left(\frac{x}{c}\sqrt{\sigma}\right)$$

Dessa forma, temos que

$$\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} ds\, f(s) + I_1 + I_2 - T_0 = 0$$

$$\text{Laplace inversa!}$$

$$\therefore \quad T(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds\, f(s) = T_0 - I_1 - I_2$$

$$= T_0\left[1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\sigma\, \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma}\, \text{sen}\left(\frac{x\sqrt{\sigma}}{c}\right)\right] \quad //$$

Vamos agora trabalhar um pouco com a integral acima...

$$\int_0^\infty d\sigma\, \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma}\, \text{sen}\left(\frac{x\sqrt{\sigma}}{c}\right)$$

defina $\frac{\sqrt{\sigma}}{c} = u$

$$du = \frac{1}{2c\sqrt{\sigma}}\, d\sigma$$

$$\Rightarrow d\sigma = 2c\sqrt{\sigma}\, du = 2c^2 u\, du$$

Então,

$$\int_0^\infty du\, u\, \frac{2c^2}{c^2u^2}\, \text{Sen}(xu)\, e^{-u^2c^2t}$$

$$= 2\int_0^\infty du\, e^{-u^2c^2t}\, \frac{\text{Sen}(xu)}{u}$$

agora, note que

$$\boxed{\begin{aligned} &2\int_0^\infty du\, e^{-u^2c^2t}\, \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sen}(ux)}{u}\right) = 2\int_0^\infty du\, e^{-u^2c^2t}\, \cos(ux) \\ &= \int_{-\infty}^\infty du\, e^{-u^2c^2t}\, \cos(ux) = \text{Re}\left[\int_{-\infty}^\infty du\, e^{-u^2c^2t}\, e^{iux}\right] \end{aligned}}$$

Agora, mostramos que

$$\frac{d}{dx}\left[2\int_0^\infty du\, e^{-u^2c^2t}\, \frac{\text{Sen}(ux)}{u}\right] = \text{Re}\left[\int_{-\infty}^\infty du\, e^{-u^2c^2t}\, e^{iux}\right]$$

Vamos calcular a integral do lado direito agora.

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2c^2t}\, e^{iux} \Rightarrow \text{completar quadrados}$$

$$-u^2c^2t + iux = -\left(uc\sqrt{t} - \frac{ix}{2c\sqrt{t}}\right)^2 - \frac{x^2}{4c^2t}$$

define $\xi = uct^{\frac{1}{2}} - \frac{ix}{2ct^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow d\xi = ct^{\frac{1}{2}}du$ Assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2c^2t + iux} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{ct^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\xi^2}\, e^{-\frac{x^2}{4c^2t}} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\frac{1}{c}\, e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}$$

Assim, $Re\{\ \} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\frac{e}{c}^{-\frac{x^2}{4c^2t}}$ e então

$$\frac{d}{dx}\left[2\int_0^{\infty} du\, e^{-u^2c^2t}\,\frac{\operatorname{sen}(ux)}{u}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\frac{e}{c}^{-\frac{x^2}{4c^2t}}$$ então

$$2\int_0^{\infty} du\, e^{-u^2c^2t}\,\frac{\operatorname{sen}(ux)}{u} = \int_0^{x} dx'\,\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\frac{e}{c}^{-\frac{x'^2}{4c^2t}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{tc^2}}\int_0^{x} dx'\, e^{-\frac{x'^2}{4c^2t}}$$ e isso é igual à nossa integral anterior

$$\int_0^{\infty} d\sigma\,\frac{e^{-\sigma t}}{\sigma}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{c}\sqrt{\sigma}\right).$$ Assim

$$T(t,x) = T_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi t c^2}}\int_0^{x} dx'\, e^{-\frac{x'^2}{4c^2t}}\right]$$

Mas $\int_0^x dx' \, e^{-\frac{x'^2}{4c^2 t}} = c\sqrt{\pi t} \; \mathrm{Erf}\left[\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right]$

onde $\underset{\text{(função erro)}}{\mathrm{Erf}(x)} \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt \, e^{-t^2}$ (uma integral incompleta da gaussiana)

Assim, temos que

$$T(t,x) = T_0 \left[1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)\right] \quad //$$

(agora sim acabou).

⊛ Notem que esses problemas envolvendo EDP's podem de fato ficar <u>MUITO</u> complicados e extensos mesmo para EDP's triviais como a eq. de difusão se as condições de contorno forem complicadas o suficiente.

Uma breve introdução as Funções especiais (mais) relevantes à Física

Essas funções especiais (como as de Legendre, Laguerre, Hypergeométrica, Bessel, e etc) são soluções de certas eqs. dif. lineares de 2ª ordem que aparecem muito na física. Discutiremos nesse curso apenas as funções de Legendre.

Em geral, essas funções especiais têm muitas representações em termos de eqs. difs., séries, representações integrais, via relações de recorrência, e também via funções geradoras. Começando de uma representação você pode obter outras.

Funções de Legendre

A equação diferencial de Legendre é

$$(1-x^2)\,y''(x) - 2x\,y'(x) + n(n+1)\,y(x) = 0$$

Vamos tentar achar a solução via série de potências (vocês verão isso em detalhe em FisMAT II).

Ansatz: Série de potências em torno de $x=0$.

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

jogamos agora isso na eq. dif. acima

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\, m(m-1)\, x^{m-2}$$

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\, m\, x^{m-1}$$

assim, a eq. dif. fica

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \left[m(m-1)x^{m-2} - m(m-1)x^{m} - 2m x^{m} + n(n+1)x^{m} \right] = 0$$

Note que $\sum_{m=0}^{\infty} C_m\, m(m-1)x^{m-2} = \sum_{m=2}^{\infty} C_m\, m(m-1)\, x^{m-2}$

define $m = m' + 2$ assim

$$\Rightarrow \sum_{m'=0}^{\infty} C_{m'+2}(m'+2)(m'+1)\, x^{m'}.$$ Assim, vemos que

$$\sum_{m'=0}^{\infty} \left[C_{m'+2}(m'+2)(m'+1) - C_{m'}\, m'(m'-1) - 2C_{m'}\, m' + C_{m'}\, n(n+1) \right] x^{m'} = 0$$

Série de Taylor é única e assim, necessariamente

$$C_{m'+2}(m'+2)(m'+1) - C_{m'}\left[m'(m'-1) + 2m' - n(n+1) \right] = 0$$

ou

$$C_{m+2} = \frac{C_m}{(m+1)(m+2)}\left[m^2 + m - n(n+1) \right]$$

para $m = 0, 1, 2,$

Note que C_2 depende de C_0, C_3 depende de C_1, C_4 depende de C_2 que depende de C_0, C_5 depende de C_3 que depende de C_1 e assim por diante...

Dessa forma, fica claro que a solução geral da equação de Legendre fica apenas em termos de duas constantes arbitrárias C_0 e C_1:

$$y_n(x) = C_0\left[1 - n(n+1)\frac{x^2}{2!} + n(n+1)(n-2)(n+3)\frac{x^4}{4!} + \dots\right] + C_1\left[x - (n-1)(n+2)\frac{x^3}{3!} + (n-1)(n+2)(n-3)(n+4)\frac{x^5}{5!} + \dots\right]$$

⊛ Chequem esses primeiros termos!

Se $n=1 \Rightarrow C_2 = \frac{C_0}{2}(-2) = -C_0$

$$C_3 = \frac{C_1}{2\cdot 3}\left[2-2\right] = 0$$

$$C_4 = -\frac{C_0}{24}\cdot 2\cdot\left[6-2\right] = -\frac{1\cdot 2\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = -\frac{1}{3}$$

$C_5 = 0$ e etc (todos os ímpares tirando o primeiro termo com x são zero.

Isso define um polinômio finito $= x$.

Se $n=0 \Rightarrow y = \underbrace{C_0}_{\text{primeiro termo}} + \dots$

Esses polinômios truncados, associados com cada n inteiro, são chamados polinômios de Legendre e eles são dados por

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n}$$

Fórmula de Rodrigues

é solução da eq. de Legendre.

Note que $P_n(1) = 1$ (Prove isso!)

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$, etc.

⊛ $P_n(x)$ é um polinômio de ordem n.

⊛ Note que $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$, ou seja, eles têm paridade definida!

Representação Integral de Schläfli

Vamos usar a integral de Cauchy

$$(z^2-1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(u^2-1)\,du}{u-z}$$

onde C engloba uma região contendo z.

A n-ésima derivada é

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n (z^2-1) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{(u^2-1)\,du}{(u-z)^{n+1}}$$

(já vimos isso no início do curso, lembram?)

Assim,

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(u^2-1)^n}{(u-z)^{n+1}}\,du$$

$z \in \mathbb{C}$

essa é a rep. integral de Schläfli.

Representação integral de Laplace

Considere o contorno na rep. de Schläfli ~~dado~~ por um círculo centrado em z com raio $\sqrt{z^2-1}$. Isto é,

$z \in \mathbb{R}, z > 1.$

$$u = z + \sqrt{z^2-1}\, e^{i\phi}, \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

$$u^2 = z^2 + z\,2\sqrt{z^2-1}\, e^{i\phi} + (z^2-1)e^{2i\phi}$$

$$\begin{aligned}
u^2 - 1 &= (z^2-1)(1+e^{2i\phi}) + 2z\sqrt{z^2-1}\, e^{i\phi} \\
&= (z^2-1)e^{i\phi}(e^{-i\phi}+e^{i\phi}) + 2z\sqrt{z^2-1}\, e^{i\phi} \\
&= 2(z^2-1)e^{i\phi}\cos\phi + 2z\sqrt{z^2-1}\, e^{i\phi} \\
&= 2\sqrt{z^2-1}\, e^{i\phi}\left[z + \sqrt{z^2-1}\cos\phi\right] \\
&= 2(u-z)\left[z + \sqrt{z^2-1}\cos\phi\right]
\end{aligned}$$

$du = i(u-z)\,d\phi$. Voltando em

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(u^2-1)^n}{(u-z)^{n+1}}\,du$$

$$= \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{i(u-z)\,2^n\,(u-z)^n\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos\phi\right]^n}{(u-z)^{n+1}}$$

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\,\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos\phi\right]^n$$

Essa é a representação de Laplace.

Função Geratriz

$|h|<1.$

Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z) = F(h,z)$$

agora, usando a rep. de Laplace

$$F(h,z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} h^n \int_0^{2\pi} d\phi\,\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos\phi\right]^n$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \sum_{n=0}^{\infty} h^n\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos\phi\right]^n$$

Para $h<1$ usamos a série geométrica

$$F(h,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\,\frac{1}{1-h\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\phi\right)}$$

Agora, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \, \frac{1}{(a-b\cos\phi)} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$

então

$a = 1 - hz$

$b = -h\sqrt{z^2-1}$

$$F(h,z) = \frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z) \quad //$$

Essa $F(h,z)$ é chamada de função geratriz dos polinômios de Legendre!

Relações de Recorrência

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{z-h}{(1-2hz+h^2)^{3/2}} = \frac{z-h}{(1-2hz+h^2)} F$$

$$(1-2hz+h^2)\frac{\partial F}{\partial h} = (z-h) F \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \sum_{n=0}^{\infty} n h^{n-1} P_n(z)$$

$$-2hz \sum_{n=0}^{\infty} n h^{n-1} P_n(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2nz h^n P_n(z)$$

$$h^2 \sum_{n=0}^{\infty} n h^{n-1} P_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n h^{n+1} P_n(z)$$

Assim, vamos pegar cada termo

$$hF(h,z) = \sum_{n=0}^{\infty} h^{n+1} P_n(z)$$

$$zF = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z)\, z \quad \text{e assim}$$

$$(z-h)F = \sum_{n=0}^{\infty} h^n z P_n(z) - \sum_{n=0}^{\infty} h^{n+1} P_n(z) \qquad n' = n+1$$

$$= z P_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} h^n z P_n(z) - \sum_{n=1}^{\infty} h^n P_{n-1}(z)$$

$$= z P_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \left(z P_n(z) - P_{n-1}(z) \right)$$

Então, $(1-2hz+h^2)\dfrac{\partial F}{\partial h} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n h^{n-1} P_n(z) - \sum_{n=1}^{\infty} 2nz h^n P_n(z)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n h^{n+1} P_n(z) = P_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} n h^{n-1} P_n(z) \qquad n-1 = n'$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} 2zn h^n P_n(z) + \sum_{n=1}^{\infty} n h^{n+1} P_n(z)$$

$$= P_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) h^n P_{n+1}(z)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} 2zn h^n P_n(z) + \sum_{n=1}^{\infty} n h^{n+1} P_n(z) \qquad n+1 = n'$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n'-1) h^n P_{n-1}$$

$$= P_1(z) + P_2(z)\,2h + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)\,h^n\,P_{n+1}(z)$$

$$- 2zh\,P_1(z) - \sum_{n=2}^{\infty} 2zn\,h^n\,P_n(z)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\,h^n\,P_{n-1}(z)$$

$$= P_1(z) + h\left[2P_2(z) - 2z\,P_1(z)\right]$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} h^n \Big[(n+1)\,P_{n+1}(z) - 2zn\,P_n(z)$$

$$+ (n-1)\,P_{n-1}(z)\Big]$$

Do outro lado temos

$$(z-h)\,F = z\,P_0(z) + h\left[z\,P_1(z) - P_0\right]$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} h^n \left[z\,P_n(z) - P_{n-1}(z)\right] \qquad P_0(z) = 1$$

Assim, $\qquad P_1(z) = z\,P_0(z)$ ✓

$$2P_2(z) - 2z\,P_1(z) = z\,P_1(z) - P_0$$

$$2P_2(z) = 3z\,P_1(z) - P_0 = (3z^2 - 1)\,P_0(z)$$

$$P_2(z) = \frac{(3z^2-1)}{2}\,P_0(z)$$ ✓

como deveria ser.

Para os termos $\cdot h^n$
$n = 2, 3, \ldots$

$$(n+1)P_{n+1}(z) - 2zn\,P_n(z) + (n-1)P_{n-1}(z)$$

$$= z\,P_n(z) - P_{n-1}(z) \qquad \text{ou}$$

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)z\,P_n(z) + n\,P_{n-1}(z) = 0}$$

Essa é uma das famosas relações de recorrência dos Polinômios de Legendre.

<u>Outra relação de Recursão</u>:

Começamos com a função geratriz

$$F(h,z) = \frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}}$$ e derivamos com relação a z

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{h}{(1-2hz+h^2)}\,F \qquad \text{e}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(z) \qquad \text{e assim,}$$

$$(1-2hz+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h^{n+1} P_n(z)$$

⊛ Mostre que

$$\boxed{P_n'(z) - 2z P_{n-1}'(z) + P_{n-2}'(z) = P_{n-1}(z)}.$$

⊛ A função geratriz pode ser usada para mostrar que $P_n(1) = 1$. De fato, quando $z = 1$

$$F(h,1) = \frac{1}{\sqrt{1-2h+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(1)$$

$$= \frac{1}{|1-h|} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(1)$$

Se $|h|<1$

$$\frac{1}{1-h} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(1)$$

$$1+h+h^2+\cdots = P_0(1) + h P_1(1) + h^2 P_2(1) + \cdots$$

Comparando termo a termo obtemos