8 / 8 / 11

→ Breve Histórico sobre a geometria (Euclidiana, Hiperbólica).

↳ Na geometria hiperbólica toda superfície tem curvatura constante igual a -1.

↳ Ahlfors, Bers estudaram os espaços de Teichmüller (Espaços de Módulos) a geometria hiperbólica de dim 2 (superfícies). Já Mostow, a de dim ≥ 3.

↳ Dada a topologia de uma 3-variedade (variedade de dim 3) compacta existe, no máximo, uma métrica hiperbólica. Qualquer outra será uma isometria desta.

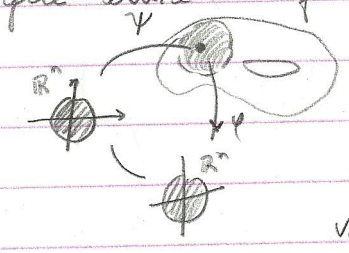
↳ Em '70, Thurston revolucionou os conceitos da Geometria Hiperbólica.

↳ Variedades dodecaédrica de Poincaré.

Variedades

Variedade é "algo" que, localmente, é como o espaço $\mathbb{R}^n$

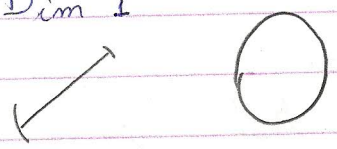
Esse "algo" podemos dizer que é um espaço topológico, sendo assim, sabemos que existe uma topologia e por isso podemos definir a vizinhança de um ponto, Essa vizinhança é o nosso "localmente". Dizer que é "como o $\mathbb{R}^n$" significa que existe ψ tq ψ é um homeomorfismo entre a vizinhança e o $\mathbb{R}^n$.



Para falar em diferenciabilidade não podemos partir da variedade, é necessário fazer uma composta dos homeomorfismos. ($\varphi^{-1} \circ \psi$).

Dimensão

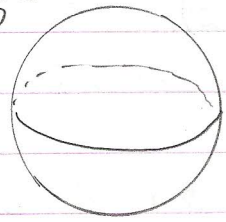
• Dim 1



8 / 8 / 11

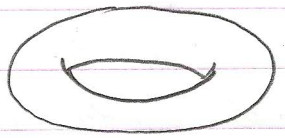
• Dim 2 ($\mathbb{R}^3$)

S^2



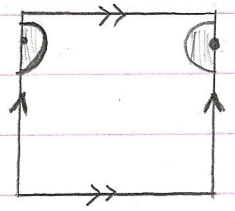
Esfera

T^2



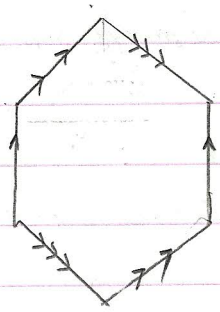
Toro de Revolução. Ele é não homogeneo, ou seja, a vizinhança dos pontos de dentro é diferente da vizinhança dos de fora.
Existe um isomorfismo entre ele e o toro plano.

T^2



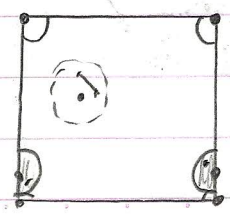
Toro Plano: Como se "colasse" os lados que estão marcados iguais, nesta orientação, com isso, tomando um pto na "fronteira" a vizinhança fica como na figura.
Esse toro é da Geometria Euclidiana, Ja existe uma métrica.

T^2



Toro (Plano) Hexagonal

Toro Plano



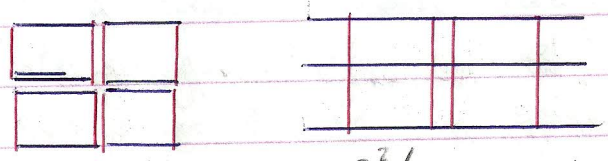
• Um ponto no interior, eu sei calcular o que eu quiser (dist., por exemplo)

8 / 8 / 11

Um pto na aresta. (Calcular o dist. entre dois pontos na viz)

O vértice

Podemos Dizer que esse espaço é um quociente do seguinte grupo.

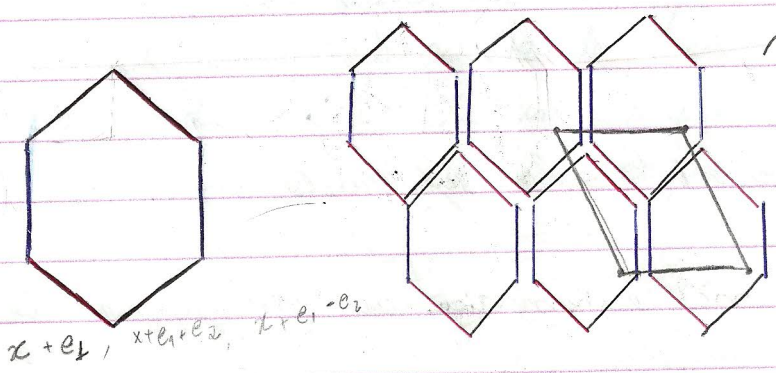


É plano em todo lugar

$\mathbb{R}^2/\Gamma_1$, onde $\Gamma_1 = \langle x \mapsto x+e_1,\ x \mapsto x+e_2 \rangle$

com $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Do mesmo modo fazemos para o toro plano hexagonal.



$\sim$ grupo $\mathbb{R}^2/\Gamma_2$, onde

Γ_2 é um grupo gerado por 3 translações.

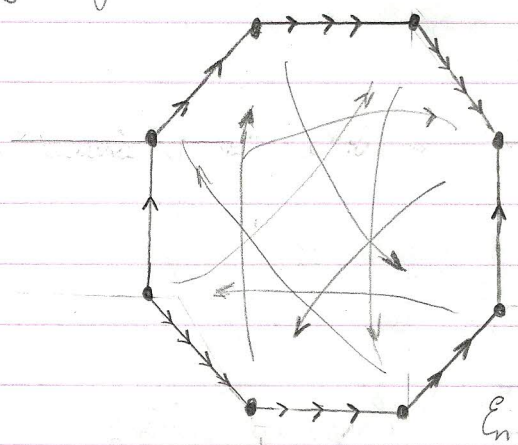
Ex.: Afirmo que T^2 pode ser gerado por 2 translações. Quais?

Pois, na verdade, uma das três translações de Γ_2 é comb. linear das outras.

$\Gamma_2 = \langle x \mapsto x+e_1,\ x \mapsto x+e_1+e_2,\ x \mapsto x+e_1-e_2 \rangle$ e podemos deixar apenas como $\Gamma_2' = \langle x \mapsto x+e_1,\ x \mapsto x+e_1+e_2 \rangle$ (pois $x+e_1-e_2 = 2(x+e_1) - (x+e_1+e_2)$)

08/08/11

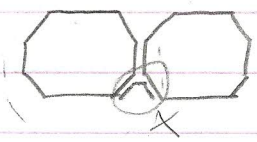
Veja agora



Veja que um ponto está relacionado com ele mesmo.

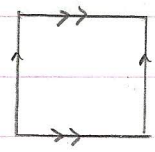
Veja que o angulo interno vale $\frac{3\pi}{4}$ $\left[8(\pi - \alpha) = 2\pi \right.$ ↳ usando o ang. externo $\left. \right]$

Então tomando um pto do vértice, sua vizinhança terá $8 \cdot \frac{3\pi}{4} = 6\pi \Rightarrow$ ou seja não é possível montar um plano como nos casos anteriores (podemos perceber isso graficamente também)



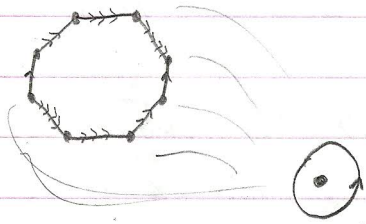
09/08/2011

Representamos o toro T^2 pelo quadrado



mas não é isométrica ao toro representado pelo hexagono

Já o bi-toro será representado pelo octógono



No quociente, ao olharmos para o vértice teremos como resultado um único ponto. Então para pontos no interior trabalhamos de maneira euclidiana, os pontos nas arestas, como foi feito no quadrado , mas com os pontos nos vértices não é