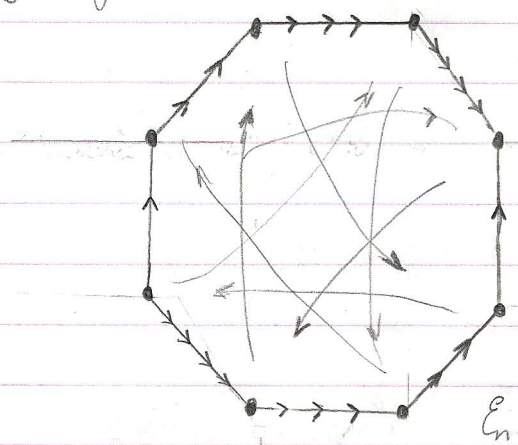
08/08/11

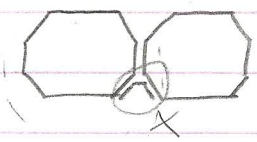
Veja agora



Veja que um ponto está relacionado com ele mesmo.

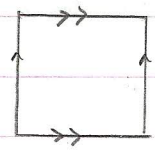
Veja que o angulo interno vale $\frac{3\pi}{4}$ $\left[8(\pi - \alpha) = 2\pi \right.$ ↳ usando o ang. externo $\left. \right]$

Então tomando um pto do vértice, sua vizinhança terá $8 \cdot \frac{3\pi}{4} = 6\pi \Rightarrow$ ou seja não é possível montar um plano como nos casos anteriores (podemos perceber isso graficamente também)



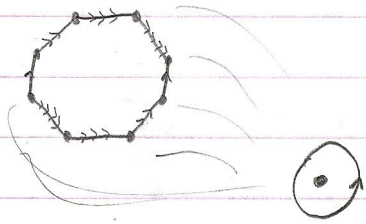
09/08/2011

Representamos o toro T^2 pelo quadrado



mas não é isométrica ao toro representado pelo hexagono

Já o bi-toro será representado pelo octógono



No quociente, ao olharmos para o vértice teremos como resultado um único ponto. Então para pontos no interior trabalhamos de maneira euclidiana, os pontos nas arestas, como foi feito no quadrado , mas com os pontos nos vértices não é

09/08/11

possível trabalhar dessa forma pois tem ângulo demais (6π). Isso vai indicar que a curvatura é de menos.

//

Vamos fazer um parentêses para entender o que é o quociente métrico, vai ser útil.

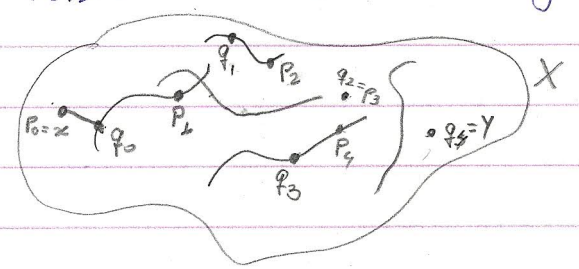
Na topologia geral falamos do Espaço Quociente. Sendo $\mathcal{C}$ espaço topológico e $\sim$ a relação de equivalência. Denotamos por $\mathcal{C}/\sim$ o espaço quociente, ou seja cada elemento pertence àquele espaço topológico. Então, podemos a relação $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ que é contínua e uma topologia é mais fina que a outra.

Seja (X, d) esp. métrico

$\sim$ relação de equivalência

$\mathcal{C}$ = coleção de subconjuntos de X (classes de eq.)

$\mathcal{C}$-Cadeia de x a y em X, uma seq de pontos $\{(p_i, q_i)\}$ t.q. $p_0 = x$, q_i e p_{i+1} pertencem ao mesmo conjunto em $\mathcal{C}$ e $q_n = y$



Definimos o comprimento como sendo

$$l(\{p_i, q_i\}) = \sum_{i=0}^{n} d(p_i, q_i)$$

$d_{\mathcal{C}}(x, y) = \inf\{l(\{p_i, q_i\}),$ onde $\{p_i, q_i\}$ é uma $\mathcal{C}$-cadeia de x a $y\}$.

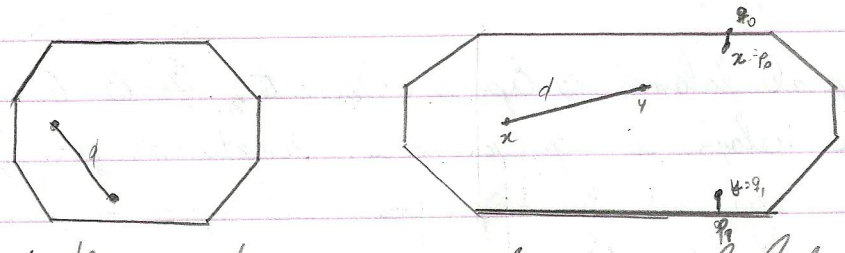
Exercício Mostrar que $d_{\mathcal{C}}$ é uma semi-métrica em X, isto é, é simétrica

09/08/11

Vale a desigualdade triangular, é ≥ 0, mas não vale que $d_G(x,y) > 0$ se $x \neq y$.

Então $(X/G, d_G)$ é um quociente métrico.

Por causa disso, se tomarmos os dois ogtogonos abaixo, eles, provavelmente tem métricas diferentes

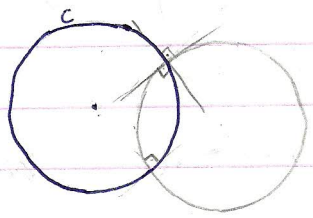


Pois as distâncias entre x e y podem ser calculadas diferente

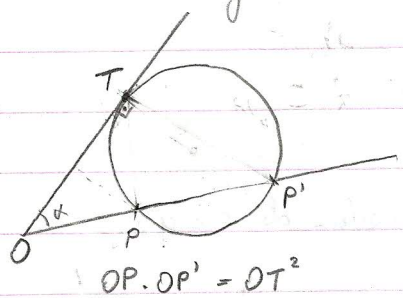
Geometria Euclidiana $\mathbb{R}^2$

Inversão em um círculo C.

Def.: Inversão em C é a transformação que troca interior e exterior de C, fixa ponto a ponto e preserva círculos perpendiculares a C

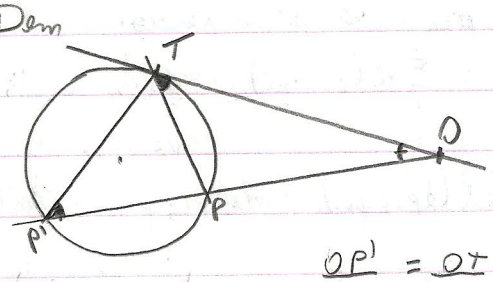


Vamos usar o seguinte teorema



$OP \cdot OP' = OT^2$

Dem

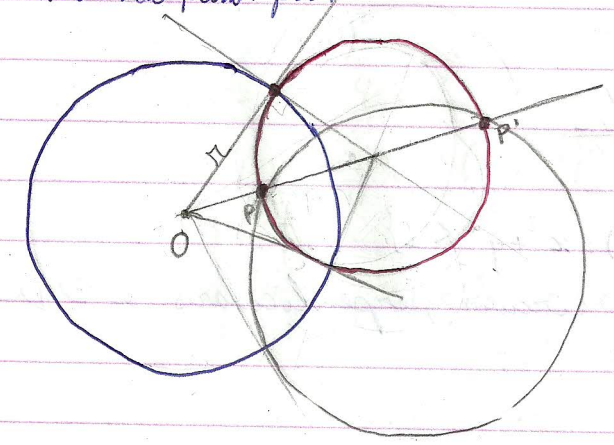


$\Delta TP'O \sim \Delta PTO \Rightarrow \frac{OP'}{OT} = \frac{OT}{OP} \Rightarrow OP \cdot OP' = OT^2$

09/08/11

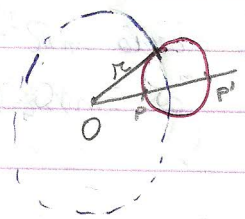
Uma boa definição:

Quaisquer dois círculos ortogonais ao círculo dado que passam por P então ambos vão passar por P'



$OP \cdot OP' = r^2$

(Pelo teorema anterior)



$i_c(P) = P'$ (inversão do ponto P em relação a circunferência C)

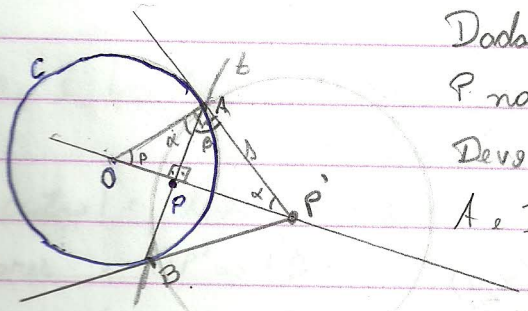
$i_c(P') = P$

Consequência

- i_c preserva raios por O
- $OP \cdot OP' = r^2$ se $P' = i_c(P)$

Inversões preservam círculos centrados em O

Construindo P':



Dada circunferência C de raio r e centro O, dado P no interior de C.

Deve traçar a reta t perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$ e determinar A e B, tq $t \cap C = \{A, B\}$

fazendo a tangente de C por A, a intersecção com $\overleftrightarrow{OP}$ será P'.

tomando o círculo de centro P' e raio $s(\overline{P'A})$ temos

$POA \sim AOP' \Rightarrow \frac{OA}{OP'} = \frac{OP}{AO} \Rightarrow OP \cdot OP' = \underset{r}{OA}^2 = r^2 \Rightarrow OP \cdot OP' = r^2$

$\Rightarrow P' = i_c(P)$

09/08/11

Note que ao considerarmos o círculo c' (centrado em P' e raio s) teremos

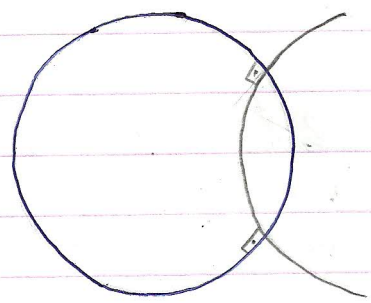
$i_{c'}(P) = O$

$PP' \cdot P'O = s^2$

Modelo de Poincaré do Espaço Hiperbólico

$\mathbb{D}$ = disco unitário aberto em $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$

A geometria em $\mathbb{D}$: as inversões em círculos perpendiculares à $\partial\mathbb{D}$ são isometrias



↳ se mantém $\perp \partial\mathbb{D}$

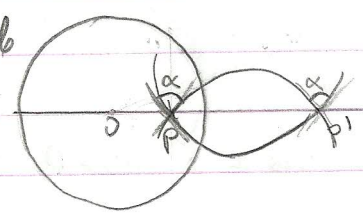
Teorema Inversões são conformes e preservam o conjunto {reta, círculo} em $\mathbb{R}^2$

↳ mantém os ângulos entre curvas

(diretamente conforme se preserva a orientação)

Prova

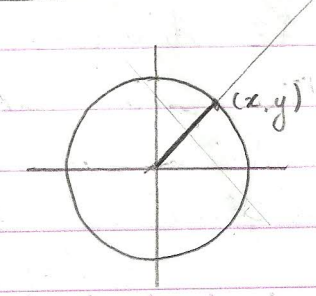
Conformidade



Prova

↳ Geométrica

Prova 2 → Em coordenadas



$$i_c(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y) \qquad f_1 = x \quad f_2 = y$$

$$D_{i_c}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

$\partial f_1/\partial x$ $\quad \partial f_1/\partial y$

$\partial f_2/\partial x$ $\quad \partial f_2/\partial y$

09/08/11

Note que $Dic(x,y)$ é simétrica $\Rightarrow$ Dic é diagonalizável por uma linha ortogonal

$tr\, Dic = 0$

$\det Dic = -1/(x^2+y^2)^2$

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[(y^2-x^2)(x^2-y^2)-4x^2y^2\right]$$

$$x^2y^2+x^2y^2-x^4-y^4 = -(x^2+y^2)^2 \qquad = \frac{-\cancel{(y^2+x^2)^2}}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}}} = \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}$$

(*) Determinando o polinômio característico temos

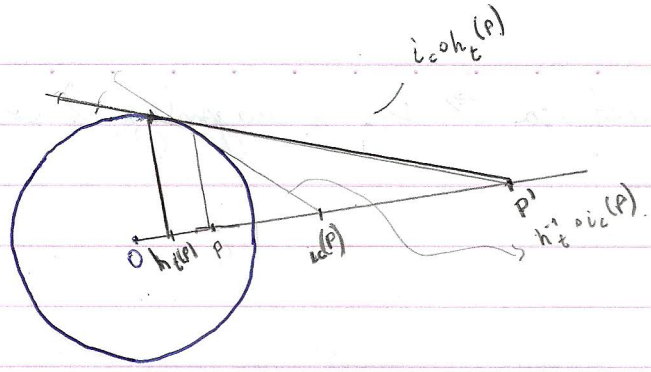
$$\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y^2-x^2-\lambda & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow p(x) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4}\left(\lambda^2-(x^2+y^2)^2\right)$$

$$p(x) = \lambda^2 - \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{qdo } p(x)=0 \quad \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{x^2+y^2}$$

Podemos também estender i_c à compactificação $\hat{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$
$\qquad\qquad\qquad

09/08/01

$t = 1/2$

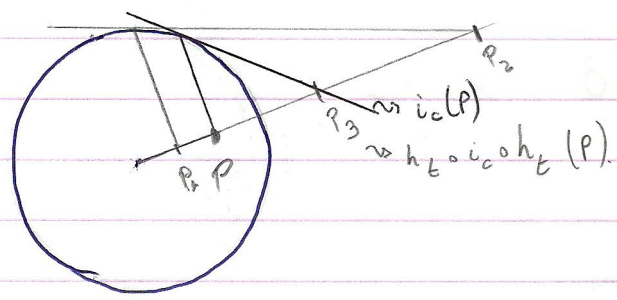


Vale também

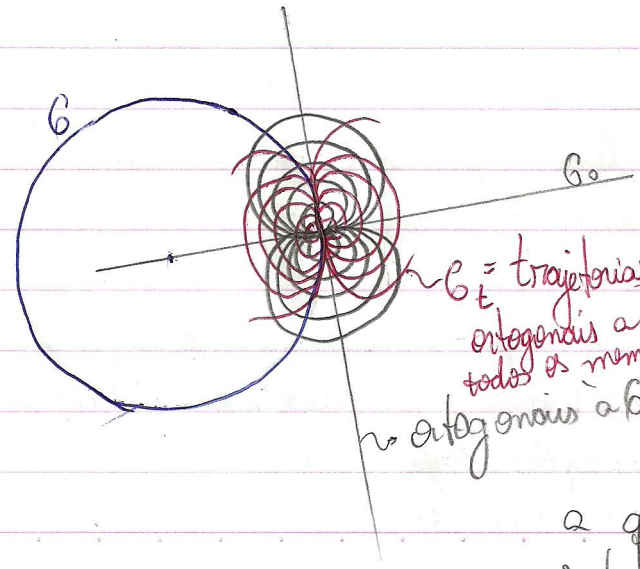
$$h_t \circ i_c \circ h_t = i_c$$

Veja no desenho

$t = \frac{1}{2}$



Já vimos que i_c preservam retas por O e círculos perpendiculares a ∂C centrados em O.

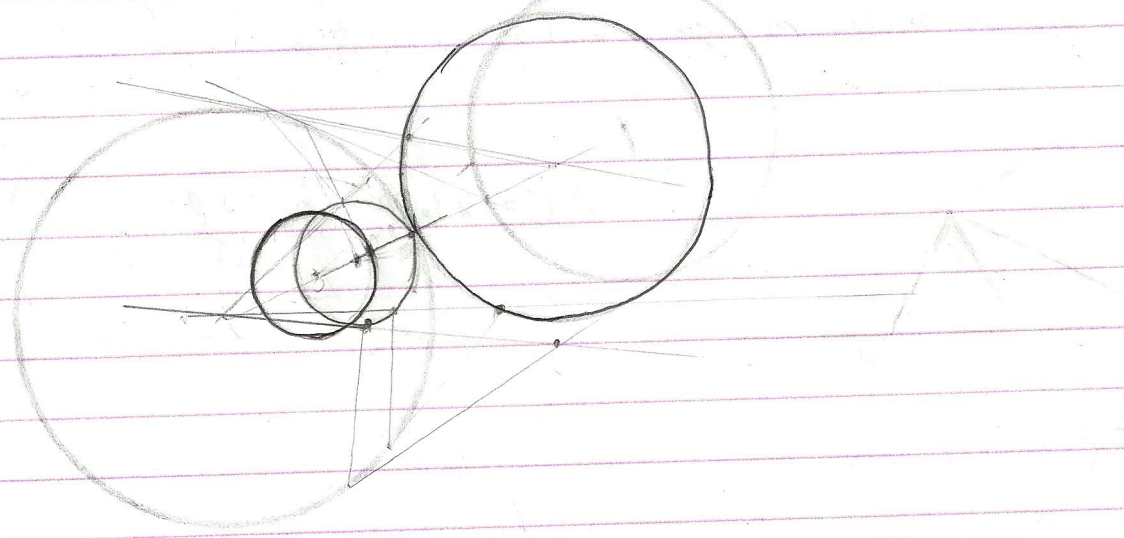


Como σ_0 é preservada por i_c (Conjunto ortogonal ao σ) e como já vimos que i_c é conforme, as direções ortogonais a σ_0 são preservadas. Portanto, as trajetorias ortogonais são preservadas.

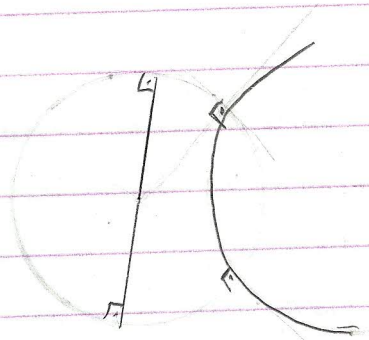
a que passa pelo centro é levado na reta vertical.

09/08/11

Se tenho um círculo dentro de C, faço uma homotetia até virar tangente à C, em seguida, faço a inversão. ⇒ ic mantem todos os círculos



Por definição, isometrias de $\mathbb{D}$ são inversões em círculos $\perp \partial\mathbb{D}$ ⇒ Isometrias são conformes.



Rotação ao redor de O são isometrias já que rotação são composição de duas reflexão

A geometria de $\mathbb{D}$ é homogênea e isotrópica

↳ sempre existe uma isometria

↳ as direções são "mantidas" por uma isometria