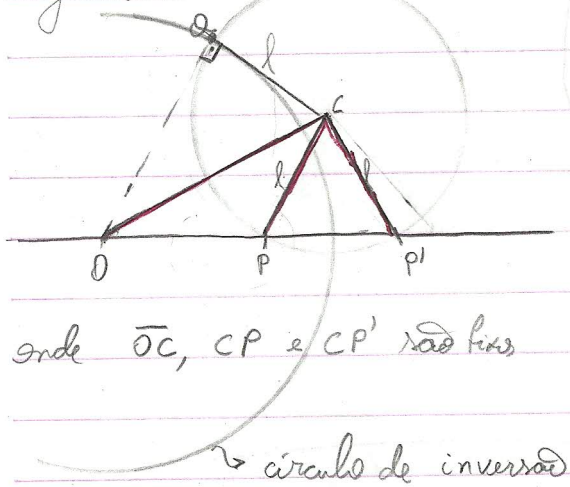
15 / 08 / 11

15/08/2011

Na Matemateca existe uma peça que faz a inversão. Ela funciona da seguinte forma



$$OQ^2 = OP \cdot OP' = \underbrace{OC^2 - l^2}_{r^2 \text{ definido}}$$

onde $\overline{OC}$, CP e CP' são fixos

↳ círculo de inversão

Disco de Poincaré

$$\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$
$$= \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 < 1\}$$

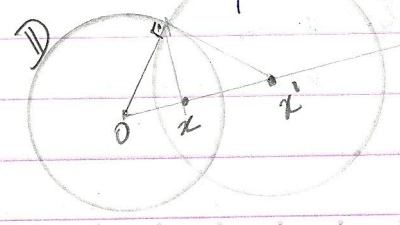
→ Ler o capítulo sobre transformações lineares fracionárias em qqr livro de análise complexa.

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Geometria em $\mathbb{D}$

Declaramos que inversão em círculos $\perp \partial\mathbb{D}$ são isometrias

↳ são transformações rígidas de pts. Preserva distância

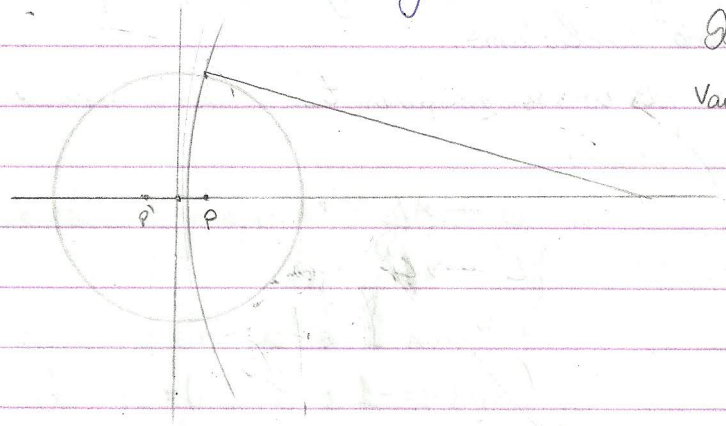


tomando $x \in \mathbb{D}$, faço $i_{\mathbb{D}}$ e determino x'. Seja C o circ. de centro x' e $\perp \partial\mathbb{D}$. Então ao fazer $i_C(x)$ chegarei em O.

15/8/11

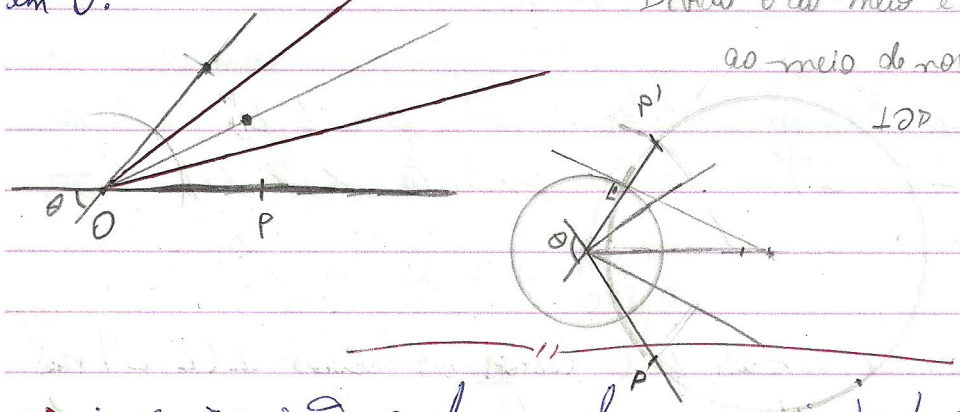
ic é uma involução, ou seja, $ic^2 = id$.

Quanto maior esse raio tende a ∞, vai aparecendo uma reflexão.



(*) O grupo gerado pelas inversões em circ. $\perp \partial\mathbb{D}$ contém as rotações centradas em O.

Divido θ ao meio e depois cada $\frac{\theta}{2}$ divido ao meio de novo.

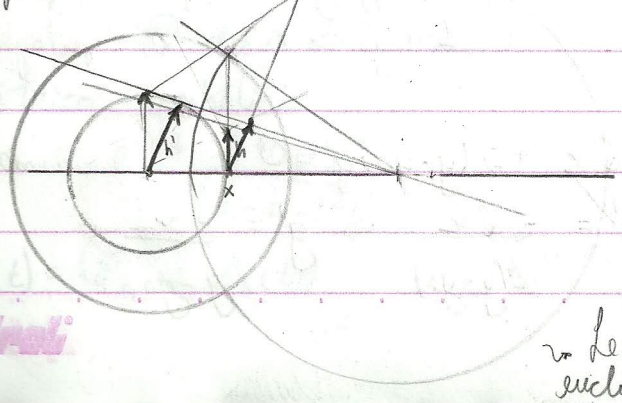


→ inversões são conformes, levam o conjunto {círculo + retas} no conjunto {círculos + retas} (ou seja, nele mesmo)

→ Rotações centradas na origem pertencem à $I(\mathbb{D})$, onde $I(\mathbb{D})$ é o grupo gerado pelas inversões $\perp \partial\mathbb{D}$

$I(\mathbb{D})$ age transitivamente, ou seja, $\forall x, y \in \mathbb{D}$ $\exists g \in I$ tq $g(x) = y$ (existe uma inversão)

E para determinar $\|h\|_{hip.}^2$?

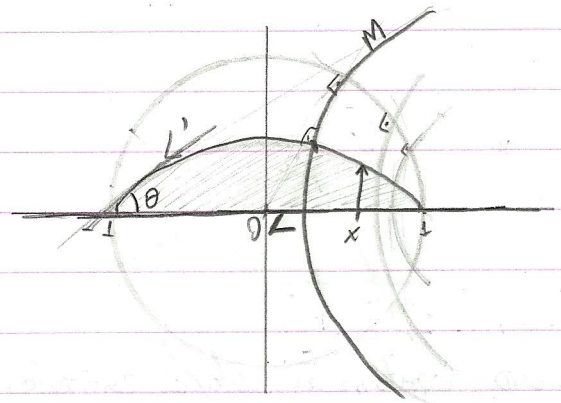


São conforme, então, mantem o ângulo

→ Levo h para o O (usando inversão), rotaciono com o tamanho euclidiano e volta para x.

15/08/11

→ $I(\mathbb{D})$ age transitivamente no conjunto de vetores tangentes a quaisquer $x \in \mathbb{D}$ de mesmo comprimento euclidiano.



Os círculos ortogonais tem todos o mesmo tamanho.

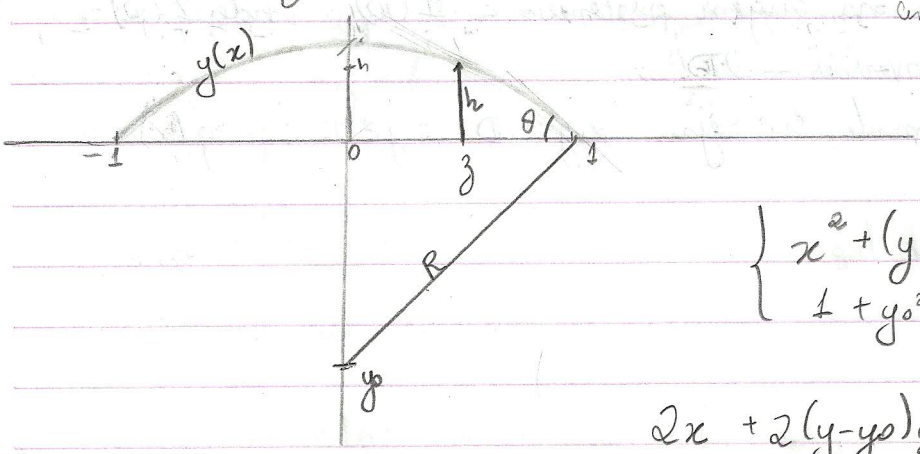
$i_M \begin{cases} L \longrightarrow L \\ L' \longrightarrow L' \end{cases}$ → reta que passa no centro de M (diametro)

↳ pois 1 e -1 são inversos ($i_M(1) = -1$ e $i_M(-1) = 1$) além disso, $L' \cap M$ se mantem (pois $\in M$) logo $i_M(L')$ deve passar por $-1, 1, L' \cap M$ que é o próprio L'.

i_M preserva a "meia banana determinada por L, L' e troca arcos de círculo $\perp (L, L')$ entre si, portanto $\underbrace{\alpha, i_M(\alpha)}_{\text{arcos } \perp (L, L')}$ são isométricos

Escolhendo M variando, vemos que todos os arcos $\perp (L, L')$ na "banana" tem o mesmo comprimento hiperbólico, que depende apenas do ângulo θ da "banana".

$y(x)$ é a circunferencia de centro $(0, y_0)$ e raio R



$$\begin{cases} x^2 + (y - y_0)^2 = R^2 & \to \text{eq do circ.} \\ 1 + y_0^2 = R^2 & \to \text{pitágoras} \end{cases}$$

$$2x + 2(y - y_0)y' = 0 \quad \text{(Derivando a 1ª eq)}$$

$$y' = \frac{-2x}{2(y - y_0)} \Rightarrow y' = \frac{-x}{y - y_0}$$

15 / 8 / 11

Então $y'(1) = \frac{\pm 1}{y_0}$ (pois se $x=1$ então substituindo na 1ª eq $1+(y-y_0)^2 = R^2 = 1+y_0^2 \Rightarrow y=0$)
2ª eq

Quando $x=z$ temos $\Rightarrow y(z)=h$

$$\begin{cases} z^2+(h-y_0)^2=R^2 \\ 1+y_0^2=R^2 \end{cases} \quad z^2+(h-y_0)^2 = 1+y_0^2$$

$$\Rightarrow z^2+h^2-2hy_0+\cancel{y_0^2} = 1+\cancel{y_0^2} \Rightarrow y_0 = \frac{1-z^2-h^2}{-2h}$$

a tangente de $y(x)$ em (1)

Logo podemos escrever $y'(1) = \frac{\pm 1}{y_0} = \pm\frac{2h}{1-z^2-h^2}$

Então para h pequeno, θ pequeno temos

Bem real, de fato, qdo θ é peq, $\theta \simeq tg\theta$

$$\theta \simeq tg\theta \simeq \frac{2h}{1-z^2} \qquad \|h\| = f(\theta)$$

Decidindo que o comprimento hiperbólico de h deve ser proporcional

$$\|h\|_{hip} \simeq \theta \simeq \frac{2\|h\|_{Euc}}{1-|z|^2}$$

decidimos

Livro do Thurston

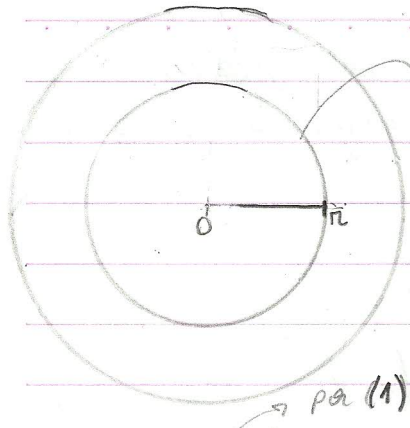
Definição: $\mathbb{D}$ disco de Poincaré

Métrica hiperbólica

$$\boxed{ds^2 = \frac{4\,dx^2}{(1-|x|^2)^2}} \qquad (1)$$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ $\quad dx^2(\gamma'(t)) = (\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2$

15/08/11



círculo hiperbólico centrado em 0.
euclidiano

Qual a distância no disco de Poincaré de 0 a r?

por (1) ??

Por causa da Regra da Cadeia

$$d_{\mathbb{D}}(0,r) = \int_0^r \frac{2}{1-s^2}\,ds = \int_0^r \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}\right) ds = -\ln|1-s| + \ln|1+s| \overset{s<1}{=}$$

$$\frac{2}{1-s^2} = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}$$

$$= -\ln 1-s + \ln 1+s = \ln \frac{1+s}{1-s}\Big|_0^r = \boxed{\ln \frac{1+r}{1-r}}$$

$$R = \ln \frac{1+r}{1-r} \iff e^R = \frac{1+r}{1-r} \Rightarrow e^R = \frac{1-r}{1-r} + \frac{2r}{1-r} = \frac{1+2r}{1-r}$$

R = raio hiperbólico

$$\Rightarrow e^R - 1 = \frac{2r}{1-r} \Rightarrow$$

$$(e^R-1) - r(e^R-1) = 2r \Rightarrow e^R - 1 = r(2+e^R-1)$$

$$\Rightarrow r = \frac{e^R-1}{e^R+1}$$

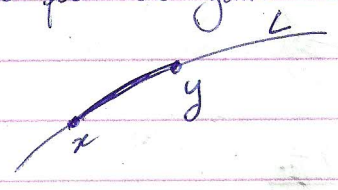
E ainda $\dfrac{e^R-1}{e^R+1} = \dfrac{e^{R/2} - e^{-R/2}}{e^{R/2} + e^{-R/2}} = \operatorname{tgh} R/2 = r$

15/08/11

Antes de continuar, vamos ver uma definição.

Geodésicas

Curvas que realizam a distância entre pontos localmente

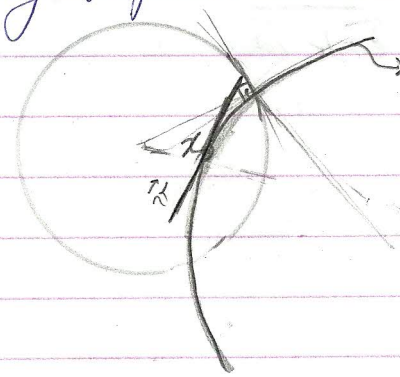


Comprimento de $L(x,y)$ = distancia de x a y.

$\Rightarrow L$ é uma geodésica

Quais são as geodésicas em $\mathbb{D}$?

Fato: Num espaço razoável, por um ponto e uma direção tangente passa uma única geodésica.



$\rightarrow L$ = o arco de círculo $\rightarrow$
- passa por x
- tangente a $\vec{v}$
- $\perp \partial\mathbb{D}$

i_L é inversão em L

i_L é isometria

i_L manda geodésica em geodésica.

i_L fixa L ponto a ponto e move todos os outros pontos

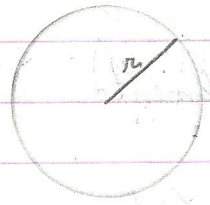
Afirmação Uma curva diferenciável que é preservada ponto a ponto por uma isometria que move todos os outros pontos é uma geodésica.

A única geodésica que passa por $x, \vec{v}$ é fixada por uma isometria que fixa $(x,\vec{v})$ Como a única curva tangente a $(x,\vec{v})$ que é fixada por i_L é L, então L é a geodésica

Vale em qqr dimensão.

15/08/11

Comprimento hiperbólico do círculo de raio R



$\gamma(t) = (r\cos t, r\,\text{sen}\, t)$

$\gamma'(t) = -r\,\text{sen}\, t, r\cos t$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2(\cancel{\text{sen}^2 t + \cos^2 t})} = r$

$\frac{2r}{1-r^2}t\Big|_0^{2\pi} = \frac{2r\,2\pi}{1-r^2} = \frac{4\pi r}{1-r^2}$

$$\int_\gamma \frac{2\|\gamma'(t)\|}{1-\|\gamma(t)\|^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1-r^2}\,dt = \frac{4\pi r}{1-r^2}$$

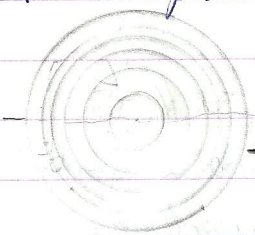
Comprimento hiperbólico do círculo hiperbólico de raio hiperbólico R

$$\frac{4\pi r}{1-r^2} = \frac{4\pi\, \text{tgh}\, R/2}{1-\text{tgh}^2 R/2} = \frac{4\pi\, \text{tgh}\, R/2}{\text{sech}\, R/2} = \frac{4\pi\, \text{senh}\, R/2}{\cancel{\cosh R/2}} \cdot \cancel{\cosh^2 R/2}$$

$$= 4\pi\, \text{senh}\, R/2 \cosh R/2 = \boxed{2\pi\, \text{senh}\, R}$$

Exercício

Área hiperbólica do círculo de raio hiperbólico R é $4\pi\, \text{senh}^2 R/2$



$$\text{Área} = \int \text{circ.}(R)\,dR = 2\pi \int_0^R \text{senh}(s)\,ds = -\text{senh}^2 R/2$$

$$-2\pi \cosh(s)\Big|_0^R = -2\pi(\cosh R - 1) = -2\pi\left(\cosh^2\frac{R}{2} - \text{senh}^2\frac{R}{2} - 1\right)$$

$$= -2\pi\left(-2\,\text{senh}^2 R/2\right) = 4\pi\, \text{senh}^2 \frac{R}{2}$$

Veja que $\frac{\text{Circunf}(R)}{\text{Área}(R)} = \frac{\cancel{4\pi}\, \cancel{\text{senh}\, R/2} \cos R/2}{\cancel{4\pi}\, \text{senh}^{\cancel{2}} R/2} = \frac{\cosh R/2}{\text{senh}\, R/2} = \frac{e^{R/2} + e^{-R/2}}{e^{R/2} - e^{-R/2}} \xrightarrow{R\to\infty} = 1$