16/08/11

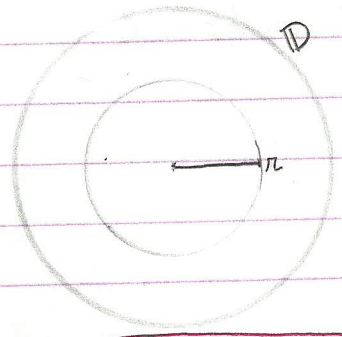
16/08/2011

* Começamos montando as peças da matemática, onde em volta de cada vértice, colocamos, ao invés de 6 triângulos equiláteros, 7 triângulos equiláteros.

Métrica hiperbólica em $\mathbb{D}$

$$\boxed{ds^2 = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}|dz|^2}$$

Círculos centrados em 0



R = raio hiperbólico

$$\begin{cases} R = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \\ r = \operatorname{tgh}\left(\frac{R}{2}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Área} = 4\pi \operatorname{senh}^2\left(\frac{R}{2}\right)}$$

$$\frac{\text{Circ}}{\text{Área}} = \frac{\cosh R/2}{\operatorname{senh} R/2} \xrightarrow{R\to\infty} 1$$

$$\operatorname{senh}(R) = R + \frac{R^3}{3!} + O(R^5)$$ qqr coisa

$$\cosh(R) = 1 + \frac{R^2}{2} + O(R^4)$$

Para $R \approx 0$, circ. e área são $\approx$ euclidianas

$$\text{Circunferência} = \frac{4\pi r}{1-r^2} = 4\pi \operatorname{senh}(R/2)\cosh(R/2) = \boxed{2\pi \operatorname{senh}\left(\frac{R}{2}\right)}$$

Curvatura Gaussiana

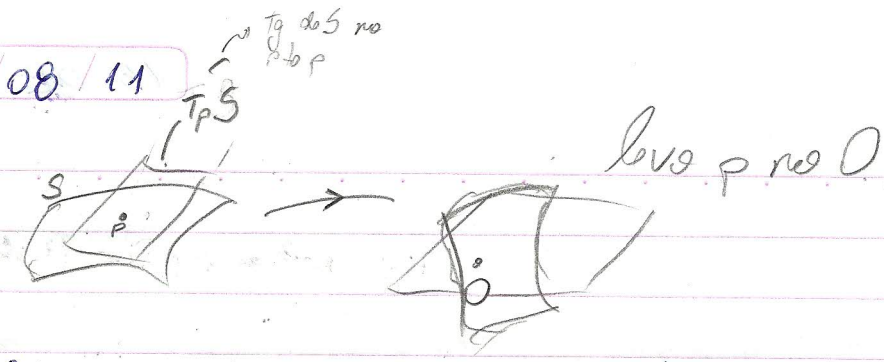
Se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função tq $f(0)=0$, $f_x f_x = 0$; S = gráfico de f.

$K(0) = \det \operatorname{Hess} f(0)$

A matriz $\operatorname{Hess} f(0)$ é $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ então

$$\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = K(0)$$

16/08/11



Se $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ temos

$$\det \text{Hess} = \det\begin{pmatrix} 2A & 2B \\ 2B & 2C \end{pmatrix} = 4AC - 4B^2 = 4(AC - B^2)$$

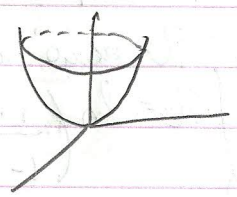
$f_{xx} = (2Ax + 2By)'_x = 2A$ $\quad$ $f_{yx} = (2Bx + 2Cy)'_x = 2B$

$f_{xy} = (2Ax + 2By)'_y = 2B$ $\quad$ $f_{yy} = (2Bx + 2Cy)'_y = 2C$

Ou seja $K(0) = 4(AC - B^2)$

Seja $A = C = 1/2$, $B = 0$

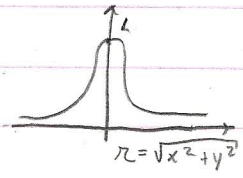
$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$



Parabolóide

Veja que $K(0) = 1$

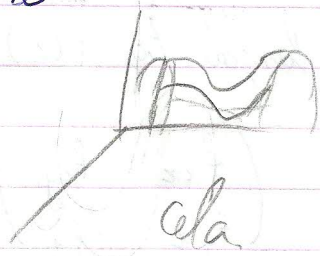
na origem é 1, quando se afasta, decai



Seja $A = 1/2$, $B = 0$, $C = -1/2$

$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

$K(0) = -1$



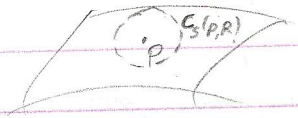
Sela

16/08/11

Curvatura calculada intrisicamente

consigo colocar o p no 0, daí, tenho K(0)

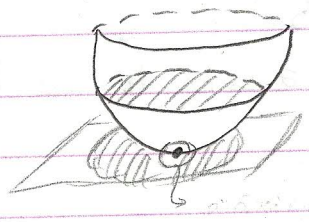
FATO Circunferencia $(C_S(p,R)) = 2\pi\left(R - \frac{1}{6}K(p)\cdot R^3 + O(R^4)\right)$ (1)



Para raios muito pequenos, o tamanho fica próximo do euclidiano

$R^3 \to 0$, $R^4 \to 0 \Rightarrow C_S(p,R) = 2\pi R$

Veja no exemplo do parabolóide.



Se tomo o ponto do vértice, a circunferencia em torno dele para um R pequeno, fica muito próxima do euclidiano (quando jogamos no plano) Agora se tomo uma circunferencia de raio maior, ao "colocá-la" no plano, ela ficará maior, ou seja, no parabolóide o círculo é menor do que se estivesse no plano. Isso se deve ao fato da curvatura ser positiva.

Quando temos uma superfície de curvatura negativa, acontece o contrário, o círculo é maior do que se estivesse no plano.

A curvatura ~~dos~~ $\mathbb{D}$ em 0

$$\text{Circunf.}(C_{\mathbb{D}}(0,R)) = 2\pi \underbrace{\operatorname{senh}(R)}_{\text{comprimento da circunf}} = 2\pi\left(\overbrace{R + \frac{R^3}{3!} + \dots}^{\operatorname{senh} R}\right) \quad (2)$$

De (1) e (2) temos que $K_{\mathbb{D}}(0) = -1$ $\quad \cancel{R} - \frac{R^3}{\cancel{6}}K(0) = \cancel{R} + \frac{R^3}{\cancel{6}} \Rightarrow K(0) = -1$

Por causa das isometrias podemos concluir que $\mathbb{D}$ tem curvatura constante igual a -1.

16/08/11

No modelo da matemática o comprimento da circunferência é

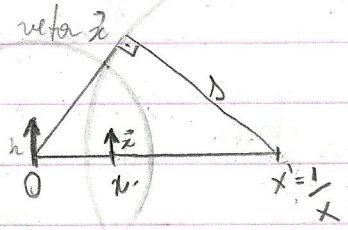
$\frac{7\pi R}{3}$ $\left(7 \times \frac{\pi}{3}\right.$ de cada triângulo$\left.\right)$

$K = -\frac{\pi}{3}\left(\delta_{vértice}\right)$

É negativo pois tem mais ângulo do que deveria.

Calcule a inversão que leva 0 em x.

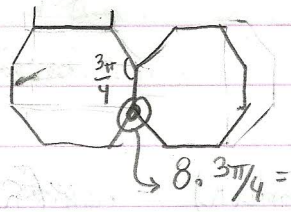
Se o vetor h tem medida y (eucl) o vetor z deve ser $\frac{2}{1-|x|^2} \cdot$ mod eucl



→ É a inversão de centro x' e raio s

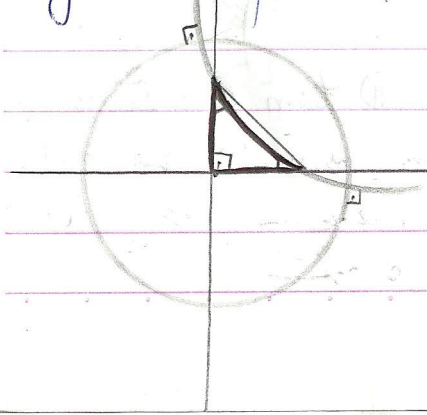
Suponha o vetor $\vec{h}$ tq $\|h\|_{eucl} \approx \|h\|_{hip}$

O bitoro, quando "abrimos" fica um octágono



não conseguimos fazer isso no plano euclidiano

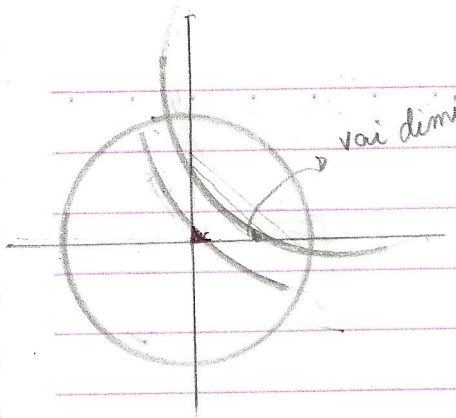
Veja como ficam os triângulos no plano hiperbólico.



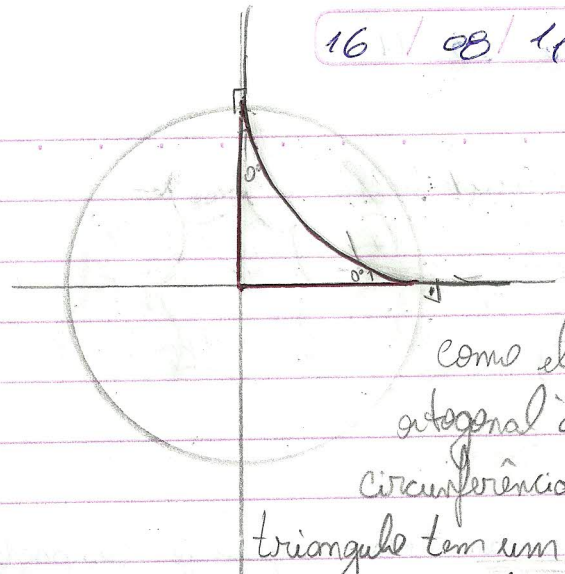
Veja que o triângulo formado pelas geodésicas, tem um ângulo de 90° e os outros dois são menores do que se tivessemos uma linha reta unindo-os

→ A soma dos ângulos internos do Δ é menor do que π //

16/08/11

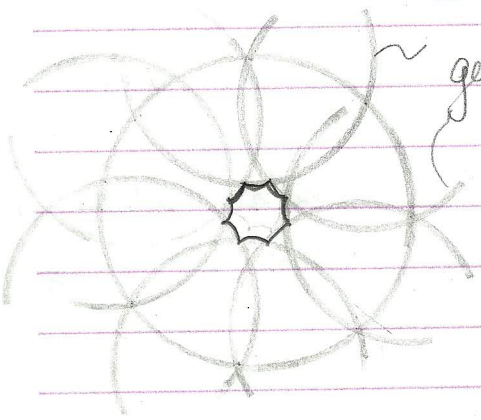


no limite temos ⇒



Como ele é ortogonal à circunferência, o triangulo tem um ângulo medindo $\frac{\pi}{2}$ e os outro dois medem 0° ⇒ a soma dos ângulos internos é $\pi/2$. É o triangulo ideal

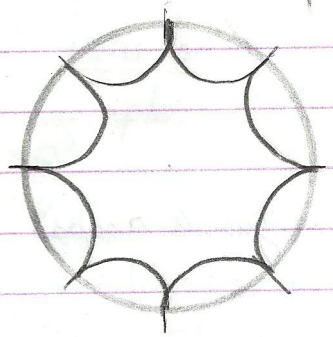
Quando o triangulo é muito pequeno, ele se aproxima do euclidiano e o soma dos ângulos internos é π



geodésicas

qto menor o octágono, mais próximo do euclidiano ⇒ ou seja tem ângulo demais.

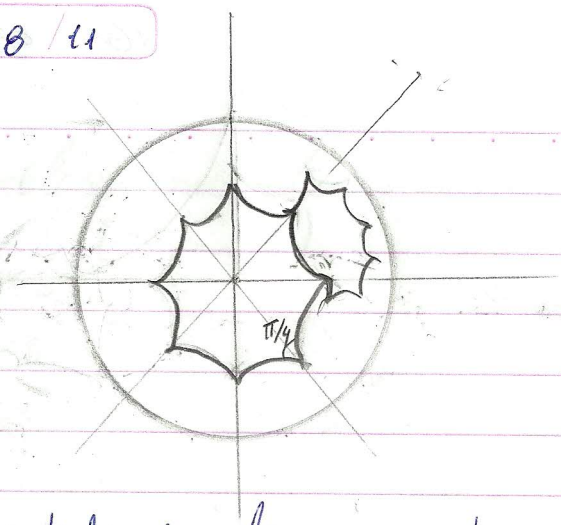
Outro caso é quando ele está no limite

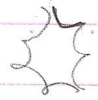


Como todos os arcos são geodésicos, eles são ortogonais à circunferência ⇒ que cada ângulo interno mede 0° ⇒ a soma dos ângulos internos é 0.

Então se no 1º caso tem ângulo demais e no 2º caso tem ângulo 0° então existe um octógono "intermediário" que cada ângulo interno mede $\pi/4$ e a soma dos ângulos será 2π. E aí será possível cobrir o plano "juntando" os octógonos

16 / 08 / 11



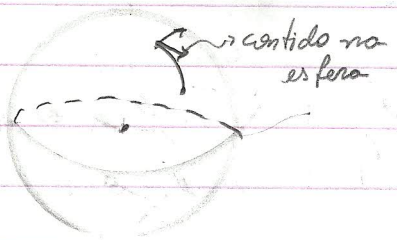


Teorema: toda superfície compacta, orientável, $g \geq 2$ possui ao menos uma estrutura hiperbólica
↳ gênero

Na verdade tem um espaço de roupas hiperbólicas - Espaço de módulo de Teichmuller

$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$Isom(S^2) = O(3)$



leve qualquer ponto em outro através de uma isometria, ou seja, é homogênea

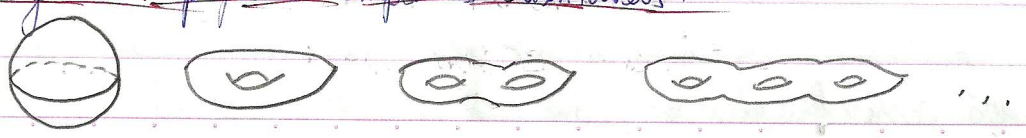
$K(S^2) = 1$ → constante

$K(\text{plano}) = 0$ → constante

$K(\mathbb{D}) = -1$ → constante

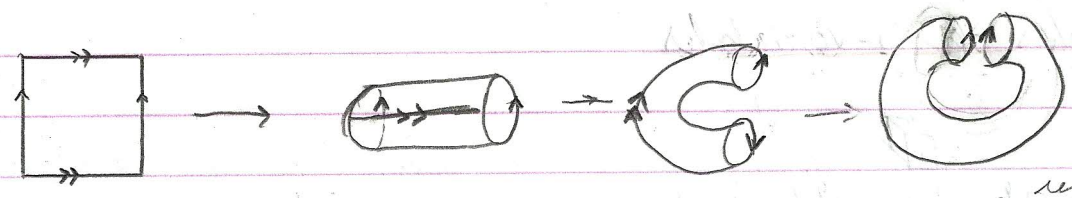
Teorema: Toda superfície compacta orientável tem um guarda roupa métrico predileto. (toro $K=0$)

Algumas superfícies compactas orientáveis:



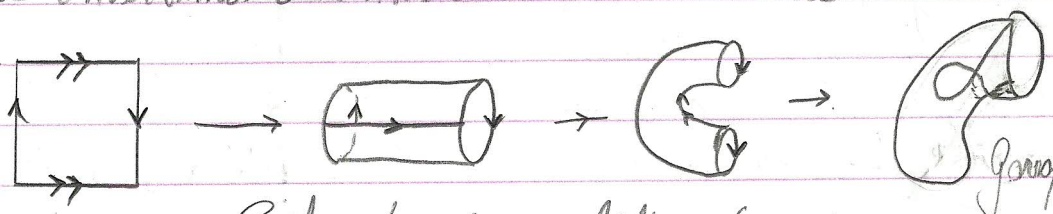
16/08/11

Toro



usar uma folha de papel p/ guiar

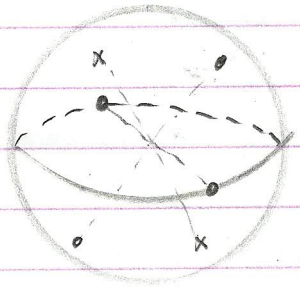
Agora se invertemos o sentido de um dos lados



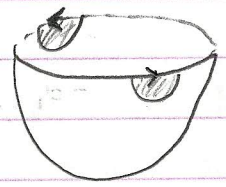
Garrafa de Klein.

Prefere tecido euclidiano (assim como o toro)

Outro é o espaço elíptico $\simeq \mathbb{R}P^2$ = espaço projetivo.



tomando metade da esfera →

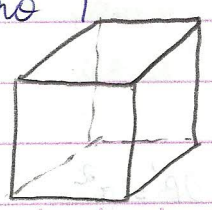


Prefere o tecido esférico.

3- Variedades

Exemplos

1) $\mathbb{R}^3$
2) Esfera de dim 3
$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$
3) Toro T^3



cada lado é associado ao seu oposto na mesma direção (assim como o T^2)