22/08/11

22/08/11

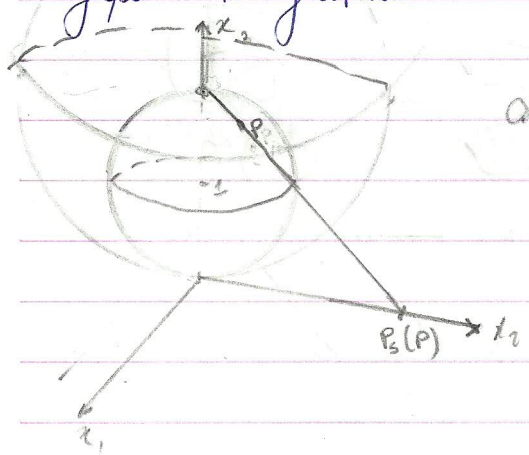
Exemplos de 3-variedades

0) $\mathbb{R}^3$

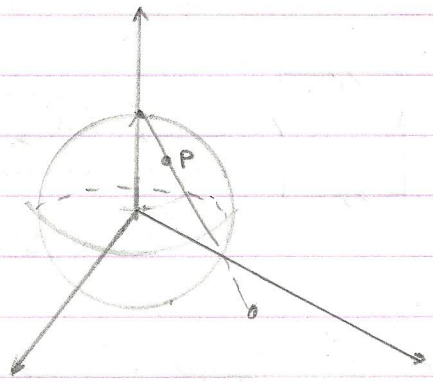
1) T^3

2) $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \{x \in \mathbb{R}^4 / |x| = 1\}$

Projeção Estereográfica

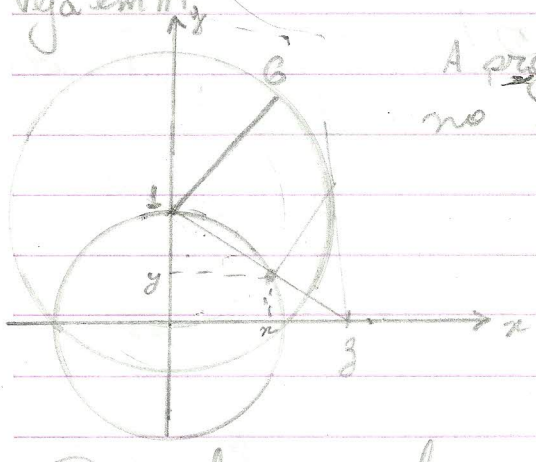


Em $\mathbb{R}^3$ é análogo



Em $\mathbb{R}^n$ $P_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$

Veja em $\mathbb{R}^2$



A proj. estereográfica é a inversão no círculo G

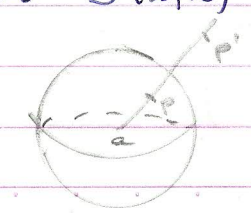
$$z = \frac{x}{1-y}$$

semelhança Δ's

$$\frac{1}{z} = \frac{y}{z-x} \Rightarrow z = \frac{x}{1-y}$$

são conformes e levam esferas em esferas

$\mathbb{R}^4$: $S(a,r)$ é uma hiperesfera de centro a e raio r.



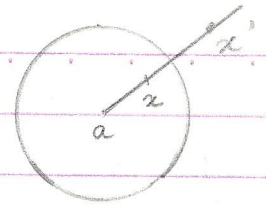
$= \{x \in \mathbb{R}^4 / |x-a| = r\}$

$= \{(x_1, \dots, x_n); \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|^2 = r^2$

$i_{S(a,r)}(P) = P'$ é o ponto no raio OP tq $OP \cdot OP' = r^2$.

22/08/11

$$i_{S(a,r)}(x) = a + r^2\left(\frac{x-a}{|x-a|^2}\right)$$



Vamos adotar a seguinte notação

$$x^* = i_{S(0,1)}(x) = \frac{x}{|x|^2} = i(x)$$ (a inversão na esfera unitária)

Então, segue que

$$i_{S(a,r)}(x) = a + r^2(x-a)^*$$

Translação homotetia

$$i_{S(a,r)}(x) = T_a \circ h_{r^2} \circ i \circ T_{-a}(x)$$ ou ainda

$$= T_a \circ h_r \circ i \circ h_{1/r} \circ T_{-a}$$

$$= (T_a \circ h_r) \circ i \circ (T_a \circ h_r)^{-1}$$ → Usando o fato que $i \circ h_r^{-1} = h_r \circ i$

Vamos denotar por $P(a,t)$ o seguinte conjunto

$$\left.\begin{aligned} P(a,t) &= \{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = t\} \\ &= \{x : \langle x, a\rangle = t\} = \{x : \langle x,a\rangle - t\rangle = 0\} \\ S(a,r) &= \{x : \langle x-a, x-a\rangle = r^2\} \\ &= |x|^2 + 2\langle x-a\rangle + |a|^2 = r^2 \\ &= |x|^2 + 2\langle x-a\rangle + (|a|^2 - r^2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Usaremos isso na demonstração do lema abaixo:

<u>Lema</u>: Inversões preservam o conjunto {hiperesferas, planos}.

Basta provar que isto vale para $i = i_{S^{n-1}}$

Suponha $y = x^* \Rightarrow y = \frac{x}{|x|^2}$ $\quad x = \frac{y}{|y|^2} \Rightarrow |x|^2 = \frac{1}{|y|^2}$

$y_1 = \frac{x_1}{|x|^2}, \dots, y_n = \frac{x_n}{|x|^2} \Rightarrow |y|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{(|x|^2)^2} = \frac{\cancel{|x|^2}}{|x^2|^{\cancel{2}}} = \frac{1}{|x|^2} \Rightarrow |y|^2 = \frac{1}{|x|^2}$

$\Rightarrow \boxed{|x|^2 = 1/|y|^2}$ $\quad |y|^2 = \frac{1}{|x|^2} = |y|^2 \cdot x = \frac{x}{|x|^2} = y \Rightarrow \boxed{x = \frac{y}{|y|^2}}$

22/08/11

De (1), temos

$$\boxed{|x|^2} + 2\langle x, \overset{\text{centro}}{\boxed{a}}\rangle + (|a|^2 - r^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|y|^2} + 2\langle \frac{y}{|y|^2}, a\rangle + (|a|^2 - r^2) = 0 \Rightarrow \text{ multiplicando por } |y|^2$$

$$1 + 2\langle y, a\rangle + (|a|^2 - r^2)|y|^2 = 0 \Rightarrow \text{ Dividindo por } |a|^2 - r^2 \ (\text{se } |a|^2 \neq r^2)$$

$$\boxed{|y|^2} + 2\langle y, \overset{\text{centro}}{\boxed{\frac{a}{|a|^2 - r^2}}}\rangle + \frac{1}{|a|^2 - r^2} = 0$$

Sendo $b = \text{centro} = \dfrac{a}{|a|^2 - r^2}$ e $s = \text{raio}$.

$$|b|^2 - s^2 = \frac{|a|^2}{||a|^2 - r^2|^2} - s^2 = \frac{1}{|a|^2 - r^2} \Rightarrow$$

$$s^2 = \frac{|a|^2}{||a|^2 - r^2|^2} - \frac{|a|^2 - r^2}{(|a|^2 - r^2)^2} = \frac{r^2}{||a|^2 - r^2|^2}$$

Então

$$i(S(a,r)) \underset{r \neq |a|}{=} S(b,s) \quad \text{onde} \begin{cases} b = \dfrac{a}{|a|^2 - r^2} \\ s = \dfrac{r}{||a|^2 - r^2|} \end{cases}$$

Por outro lado, se $|a| = r$ temos $y = \dfrac{x}{|x|^2} = x^*$ que satisfaz

$1 + 2\langle y, a\rangle = 0$

$P(a, 1/2)$

$\ni P(a,t) = \{\langle z, a\rangle = t\}$

22/08/11

$S^3 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$

$= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ onde $z_1 = x_1 + i x_2$; $z_2 = x_3 + i x_4$

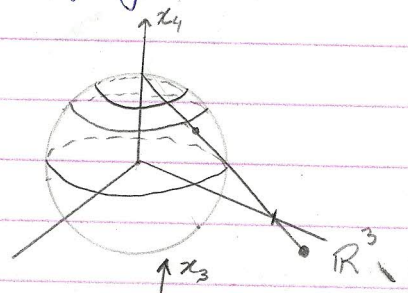
Podemos "pedir" S^3 um conjunto do tipo

$T_r = \{(z_1, z_2); |z_1|^2 = r, |z_2|^2 = 1 - r\}$ → Toro bi-dimensional se $r \neq 0$ ou $r \neq 1$

$0 \leq r \leq 1$

"fibração" de S^3 por toros (e duas fibras círculos)

Quando projetados por P_S, cada T_r se torna um toro de revolução.



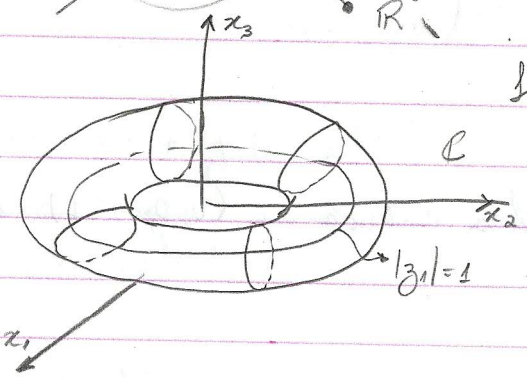


Imagem da proj. estereográfica quando $r = 0$, $z_2 = 1$

Os toros vão "engordando" e cobrindo o $\mathbb{R}^3$

As geodésicas são os círculos máximos (de raio 1)

Isometrias de $\mathbb{R}^n$ são $x \mapsto Ax + b$, $A \in O(n)$

↳ linear + translação, A é matriz ortogonal

$A^T A = I$

Idéia da prova:

Se preserva norma, preserva o produto interno (pois este vem da norma)

preservando o produto interno, garantimos a linearidade.

"Dado um círculo máximo, existe uma transformação que o preserva

22/08/11

$S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C}^2$

1-subespaço complexo em $\mathbb{C}^2$ são da forma $z_1 = \lambda z_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Retas Vamos chamar de $R(\lambda)$

Passa pela origem

$R(\lambda) \cap S^3$ é um círculo máximo. Por todo ponto $(z_1, z_2) \in S^3$ passa exatamente um tal círculo $R\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \cap S^3$

23/08/2011

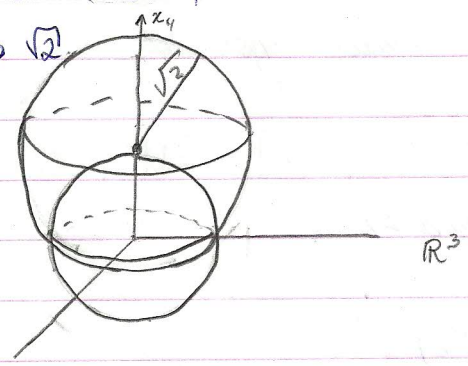
Como já vimos

$S^3 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$P_S : S^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$P_S(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{1-x_4}(x_1, x_2, x_3)$

P_S é a restrição à S^3 da inversão na 3-esfera centrada em $(0,0,0,1)$ de raio $\sqrt{2}$.



Lema: Inversões em 3-esferas em $\mathbb{R}^{n+1}$ preservam o conjunto {esfera, planos} e são conformes