22/08/11

$S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C}^2$

1-subespaço complexo em $\mathbb{C}^2$ são da forma $z_1 = \lambda z_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Retas — Vamos chamar de $R(\lambda)$

↳ Passa pela origem.

$R(\lambda) \cap S^3$ é um círculo máximo. Por todo ponto $(z_1, z_2) \in S^3$ passa exatamente um tal círculo $R\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \cap S^3$

23/08/2011

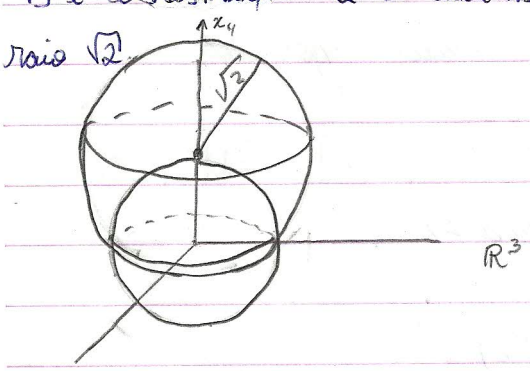
Como já vimos

$S^3 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$P_S : S^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

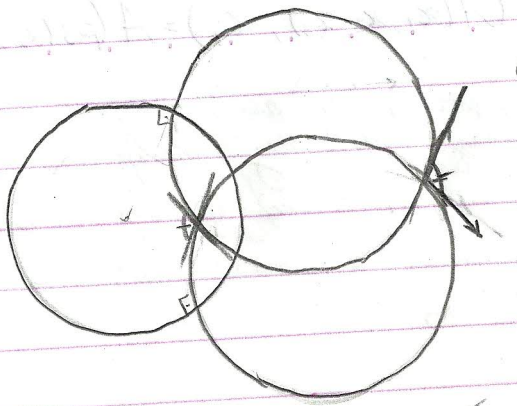
$P_S(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{1-x_4}(x_1, x_2, x_3)$

P_S é a restrição à S^3 da inversão na 3-esfera centrada em $(0, 0, 0, 1)$ de raio $\sqrt{2}$.

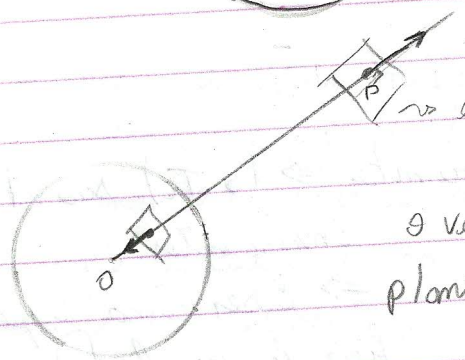


Lema: Inversões em 3-esferas em $\mathbb{R}^{n+1}$ preservam o conjunto {esfera, planos} e são conformes

23/08/11



os ângulos são mantidos



$\rightsquigarrow$ espaço perpendicular $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

o vetor troca de direção e os outros pontos do plano se mantém.

$\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \approx (\underbrace{x_1 + ix_2}_{z_1}, \underbrace{x_3 + ix_4}_{z_2})$

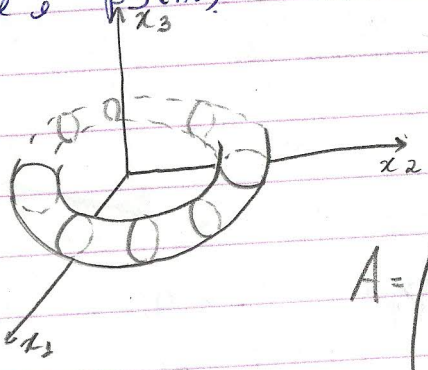
$S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$

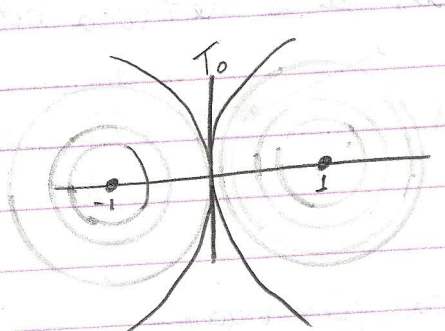
Decomposição da 3-esfera em $T_r = \{|z_1|^2 = r, \ |z_2|^2 = 1-r, \ 0 \le r \le 1$

Então $S^3 = \bigcup_{0 \le r \le 1} T_r$

Os T_r são toros em S^3, exceto T_0 e T_1 que são círculos

O que é $p_{x_3}^S(T_r)$



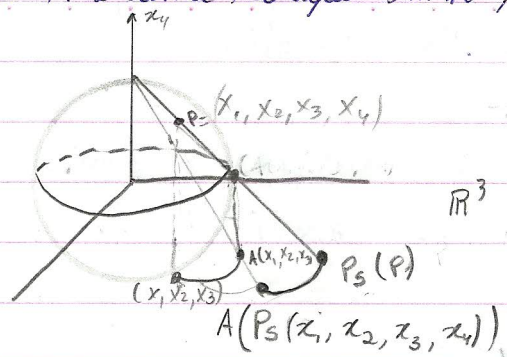


É invariante

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rotação em } \mathbb{R}^3$$

23/08/11

Se A é uma rotação em $\mathbb{R}^3$, então $P_S(A(x_1,x_2,x_3),x_4) = A(P_S(x_1,x_2,x_3,x_4))$



Ou seja, tanto faz projetar o ponto e rotacioná-lo em $\mathbb{R}^3$ ou rotacionar o ponto em $\mathbb{R}^3$ e projetá-lo

$A \in O(3)$, $A^TA = I$ (A é ortogonal)

Os T_r são, claramente, $\begin{bmatrix} A & \\ & 1 \end{bmatrix}$ - invariante $\Rightarrow P_S(T_r)$ são A-invariantes

$\Rightarrow$ É ser uma superfície de revolução.

Exercício: Isometrias de $\mathbb{R}^n$ são da forma $x \mapsto Ax + b$ onde $A \in O(n)$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ $\hookrightarrow$ Preservam distância

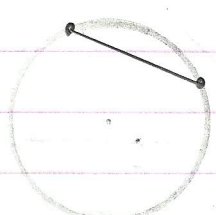
$\|x\|^2 = \sum x_i^2$

$d(x,y) = \|x-y\|$

$\langle x,y \rangle = \|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$

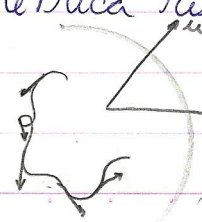
Isometria $\Rightarrow$ Preserva o produto interno $\Rightarrow$ mantém a linearidade

Em S^n usamos ou a métrica cordal



a distância entre os pontos é o tamanho euclidiano da corda.

ou a métrica riemaniana

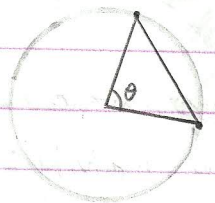


$\langle u,v \rangle_{S^n} := \langle u,v \rangle_{\mathbb{R}^n}$

$\rightsquigarrow$ faz a integral do caminho

23/08 11

As isometrias são as mesmas em ambas as métricas



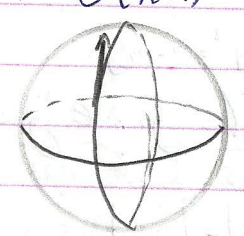
$2\operatorname{sen}\theta/2$ -- qqr coisa desse tipo

Tem uma fórmula que leva de uma métrica na outra

O que é a esfera métrica S^n

Usando o mesmo tipo de raciocínio que usamos para $\mathbb{D}$ (disco de Poincaré) mostra-se que as geodésicas em S^n são círculos máximos (isto é, círculos de raio 1). Isto é, dado um círculo máximo γ existe uma isometria que fixa γ ponto a ponto e move todos os outros pontos. ↳ isto é, $x \mapsto Ax$, $A \in O(n)$

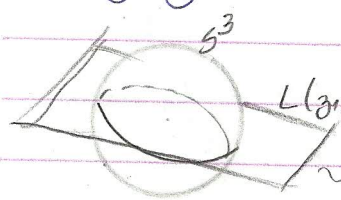
$\operatorname{Isom}(S^n) = O(n+1)$



S^3

Dado $(z_1, z_2) \in S^3$, consideramos a linha complexa $L(z_1, z_2) = \{(\lambda z_1, \lambda z_2), \lambda \in \mathbb{C}\} \in \mathbb{CP}^1$.

$C(z_1, z_2) = S^3 \cap L(z_1, z_2)$ é um círculo máximo $\Rightarrow$ geodésica em S^3



↳ Plano que passa pela origem

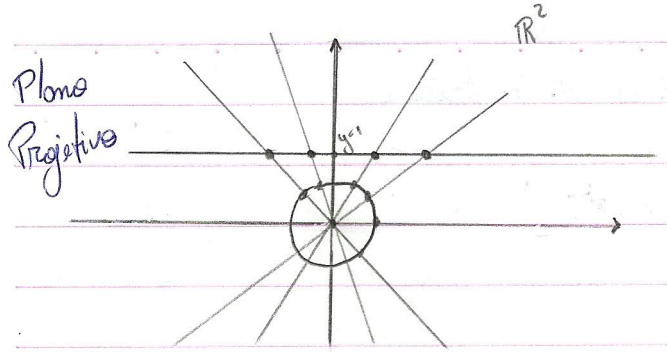
$h : S^3 \to \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ → "fibração de Hopf"

$(z_1, z_2) \mapsto L(z_1, z_2)$

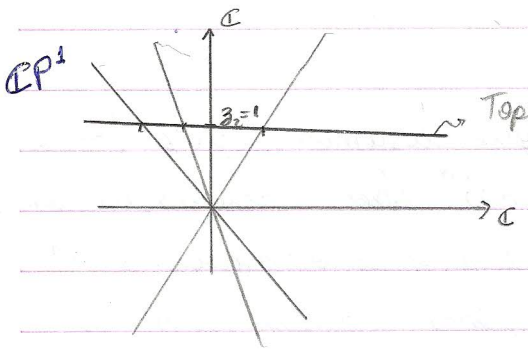
cujas fibras são círculos

↳ $h^{-1}(p \in S^2)$ → cada linha de S^2 leva em (z_1, z_2)

23/08/11

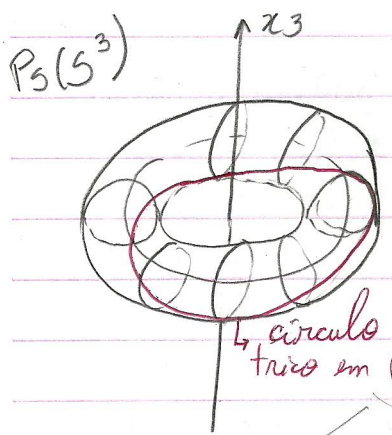


Cada ponto em $y=1$ determina uma reta.
Como ∞ não tem representação em $y=1$, definimos o pto no infinito
Outra forma, é representar pelo círculo



Topologicamente é uma esfera de $\mathbb{C}$

$\mathbb{CP}^1$ é conjunto de todas as retas que podem ser representadas por um ponto

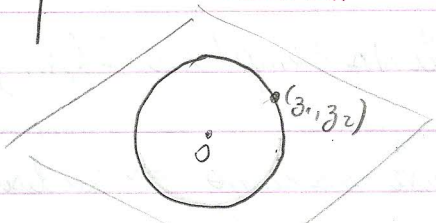


$T_r = \{|z_1|^2 = r \;,\; |z_2|^2 = 1-r\}$

$T_r \cap L(z_1, z_2) = T_r \cap L(e^{it} z_1, e^{it} z_2)$

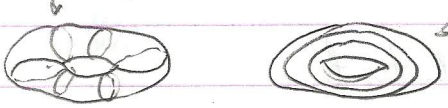
$|e^{it} z_1| = |z_1|$ e $|e^{it} z_2| = |z_2|$

$|z_1|^2 = r$ $\quad$ $|z_2|^2 = 1-r$



Ao multiplicar por e^{it}, fica andando sobre o círculo.

↳ é um círculo geométrico, fica no toro e da uma volta no sentido de z_1 e outra no sentido de z_2



Por todo ponto de $P_S(T_r)$ passa um círculo geométrico, ou seja, é possível cobrir esse toro com círculos geométricos

23/08/11

A esfera S^2 deixa fixo dois pontos, independente da isometria, na S^1 e S^3 isso não acontece, é possível mover todos os pontos

S^3 é um grupo topológico.

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^4 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

é álgebra • não comutativa.

$$\left.\begin{array}{l} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j \\ ji = -k\quad kj = -i,\ ik = -j \end{array}\right\} + \text{distributividade} \rightsquigarrow \text{álgebra.}$$

$q = a + bi + cj + dk$

$\bar{q} = a - bi - cj - dk$

$q\bar{q} \geq 0$, será $= 0 \Leftrightarrow q = 0$

$|q|^2 = q \cdot \bar{q} = \|q\|^2_{\mathbb{R}^4} = a^2 + b^2 + c^2 + d^4$

$S^3 = \{q \in \mathbb{H};\ |q|^2 = 1\}$ $\quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z|^2 = 1\}$

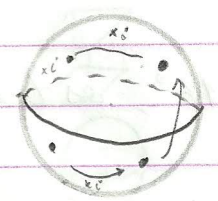
$(S^3, \bullet = \text{Produto de quaterno})$ é um grupo não comutativo (Grupo de Lie)

Multiplicação à Direita ou à esquerda são isometrias.

$p \xmapsto{\phi_p} q \cdot p$ (tudo sai do lugar)

Tome $i = 0 + 1i + 0j + 0k$

$i \cdot i = -1$



Tome a esfera, ao multiplicar por i, tudo muda de lugar, na quarta vez que multiplico por i, volta para o ponto inicial

Multiplicação por i à esquerda gera um grupo de isometria de ordem 4

23/08/11

Tecido que 2,3-variedades preferem em seu guarda-roupa

Dim 2 - , ,

esfera - tecido de curvatura +1 S^2 ou P^2

Tecido plano T^2 ou K^2 garrafa de Klein curvatura 0

tecido hiperbólico curvatura -1.

Dim 3

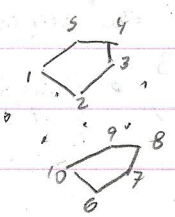
$\mathbb{R}^3/\Gamma \xrightarrow{T^3}$ T^3 Usa tecido euclidiano (plano) , S^3, espaço elíptico $S^3/\{\pm 1\}$

Exemplos de 3-variedades

Além dos 3 acima

- Espaço dodecaédrico de Poincaré

$\frac{5\times 12}{3} = 20$ vértices



1~6 11~15

2~7 12~16

3~8

4~9

5~10

$\frac{5\times 12}{2} = 30$ lados

Todos são identificados em grupo de 3

Como os triângulo na esfera tem a soma dos angulos $>\pi$, tal espaço veste roupa esférica

(Cada ângulo do pentágono do dodecaedro mede $\approx 116°$, os três ladosjuntos somam algo menor que $360°$