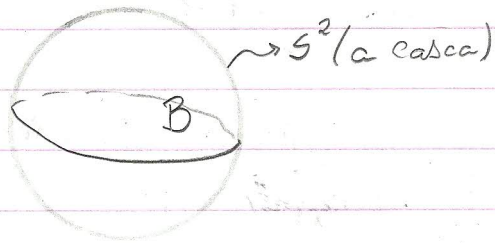
30/08/11

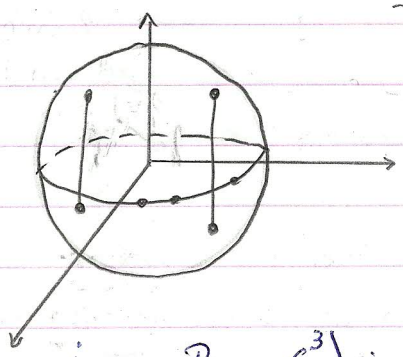
30/08/2011

- Mais uma classe de exemplos de 3-variedades
  Bola em $\mathbb{R}^3$



S^3 pode ser obtida (topologicamente) identificando-se pontos de S^2 (borda da bola) que são simétricos em relação ao plano xy

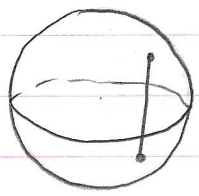
mostrar que $B/_{\sim} = S^3$



Pontos do círculo máximo ficam sozinho em sua classe, não se identificam com nenhum outro.

$i_{S^2(0,1)} B = S^3 \setminus \text{int}\, B$

$i(B)$

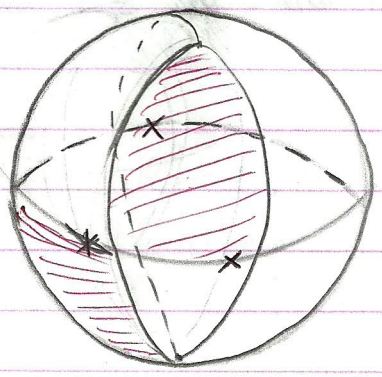


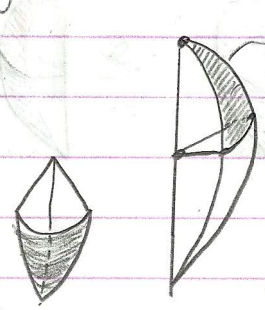
Como a inversão manda o interior para o exterior e vice-versa, "achatamos" a bola e juntamos com o exterior.

//

30/08/11

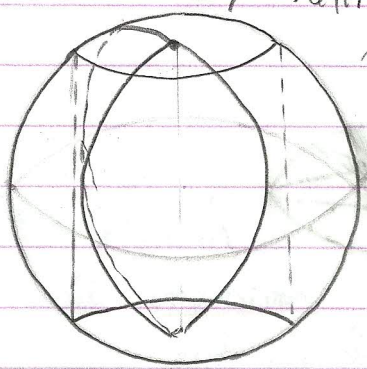
Divide a bola em 3 meridianos, daí, rotaciona e depois junta

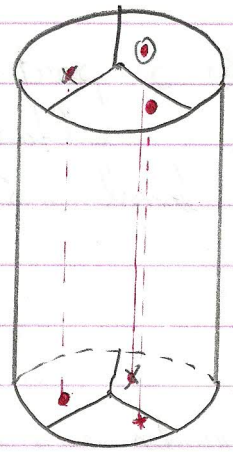




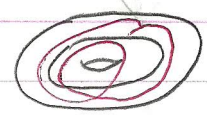
fibração de Seifert → Decomposição da variedade em círculos.

Os pontos do círculo máximo são identificados em grupos de 3 pontos (ou q, no caso de divisão p/q) enquanto os outros são 2 a 2



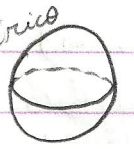


Cada linha deve dar 3 voltas antes de fechar.



D2

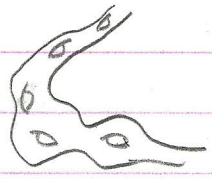
esférico



Euclidiano

Resto veste hiperbólico

$K = -1$



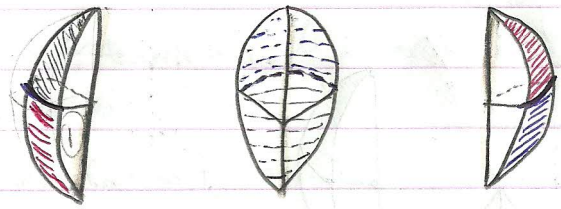
Garrafa de Klein

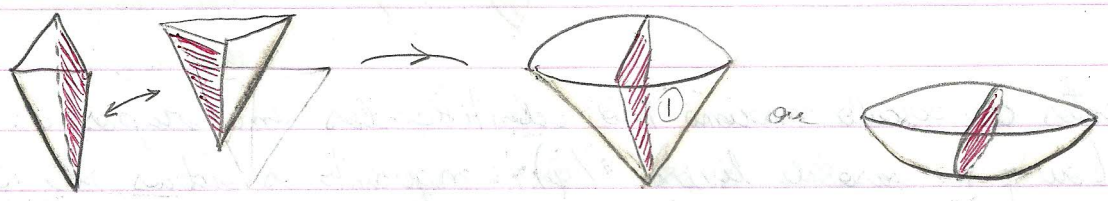
cilindro aberto → infinito

Na dimensão 3 acontece algo parecido

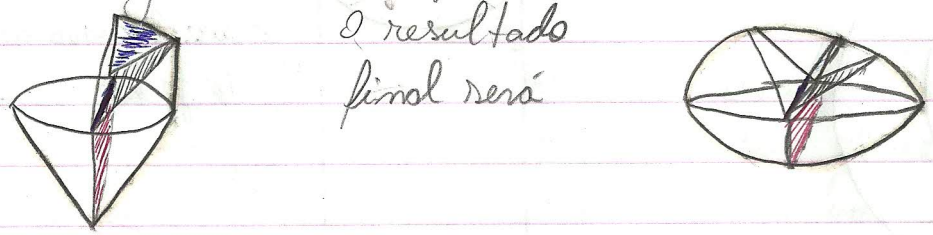
30/08/11

Ao dividir os três pedaços temos 6 tetraedros





Aí vamos juntando as partes o resultado final será



O miolo vira o equador e o equador vira o miolo.

no caso em que dividimos a bola em 3, reconstruímos no mesmo tipo (em 3 divisões). Dependendo dos primos que tomamos, o resultado final será diferente do que tínhamos. (Por exemplo, se for 2/7 será homeomorfo a 3/7)

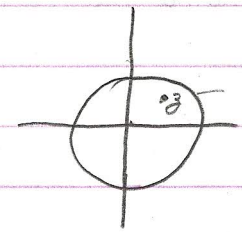
Mostre que estes quocientes são S^3/(grupos cíclicos finitos).

30/08/11

De volta à geometria Hiperbólica

Dim 2

Modelo: $\mathbb{R}^2 \to$ disco unitário



$$\boxed{\frac{2|dz|}{1-|z|^2}}$$

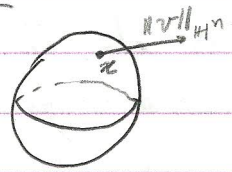
→ tamanho euclidiano

→ métrica hiperbólica

→ distância até origem

Dim $n \geq 2$

$B \subseteq \mathbb{R}^n$



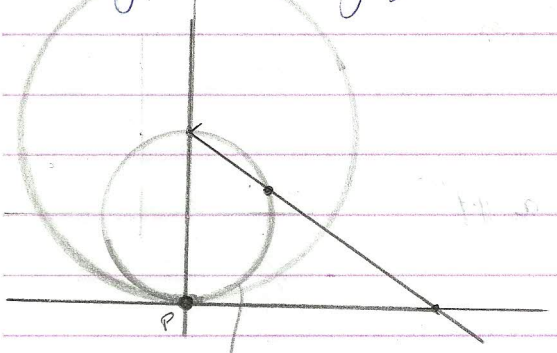
$$\boxed{\|H^n = \frac{2\|v\|_{\mathbb{R}^n}}{1-\|x\|^2}}$$

- B^n = bola unitária em $\mathbb{R}^n$
- Inversões em $(n-1)$-esferas $\perp \partial B^n$ são isometrias → métrica hiperbólica

Outros Modelos

① Modelos inversivos

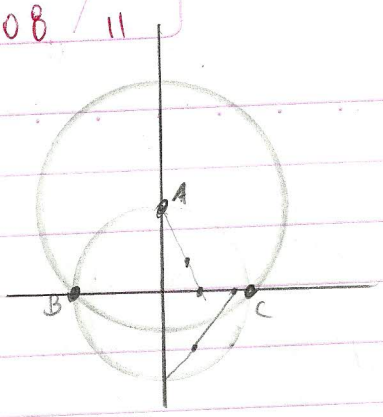
Projeção esteriográfica são inversões



a inversão dessa bola (pela maior) vai na reta, já que ela passa pelo centro e tem o ponto P fixo.

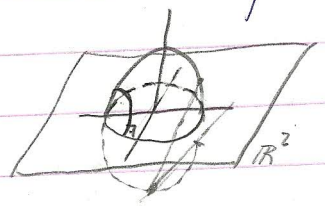
Temos ainda o outro caso:

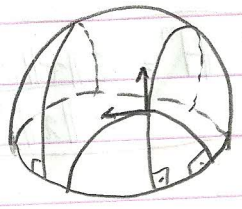
30/08/11



Do mesmo modo, a bola menor é levada na reta. (A, B, C) são fixos

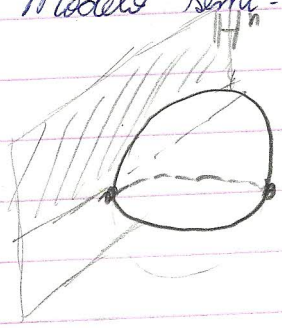
② Modelo semi-esférico





as retas são os círculos, mas os ângulos são como a gente vê.

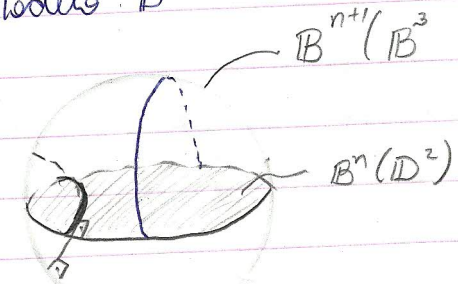
③ Modelo semi-espaço (superior)



As projeção do ponto antípoda ao pto tangente ao plano, conseguimos obter o meio plano superior

Observação Isometrias de $\mathbb{H}^n$ se estendem a $\mathbb{H}^{n+1}$

Modelo $\mathbb{B}^n$



um círculo perpendicular a $\mathbb{D}^2$ é inclinável a um círculo perpendicular ao bordo de $\mathbb{B}^3$

30/08/11

Dimensão 2 usando $\mathbb{C}$

$z = x + iy$

Transformações lineares fracionárias (TLF)

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az}{cz+d} + \frac{b}{cz+d} = \frac{a}{c+\frac{d}{z}} + \frac{b}{cz+d}$$

$ad - bc \neq 0$

isso ainda pode ser escrito como uma composição de transformação do tipo:

$$\begin{cases} z \mapsto z+b & \to \text{translação} \\ (*)\ z \mapsto \lambda z & \to \text{dilatação complexa} \\ (**)\ z \mapsto \frac{1}{z} & \to \text{composição de rotação e reflexão} \end{cases}$$

Compondo essas chega na $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$

(*) $\lambda = r_0 e^{i\theta_0} \Rightarrow z \mapsto \lambda z = r_0(e^{i\theta_0} z)$

↳ rotação

↳ homotetia

(**) $z = re^{i\theta}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \overline{(i s(z))}$

Lema: Suponha que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ preserva o disco unitário $\mathbb{D}$. Então T é uma isometria na métrica hiperbólica

30/08/11

Lema: Transformações lineares Fracionárias que preservam o disco unitário são da forma $T(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ $\quad |a| < 1$

Observação: TLF preservam {círculos, retas}. TLF são homeomorfismos $\hat{\mathbb{C}}$ (com ponto no infinito).

$T^{-1}(a) = TLF$

Note que $T(z) = \underbrace{e^{i\theta}}_{\text{rotação}} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

Podemos considerar $\theta = 0 \Rightarrow |T(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \overset{(*)}{=} \frac{|z-a|}{\left|1-\frac{\bar{a}}{\bar{z}}\right|} =$

$= \frac{\overset{1}{\cancel{|\bar{z}|}}\,|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}|} = \frac{b}{|b|} = 1$ //

(*) $|z|^2 = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}}$

Então o círculo unitário é preservado //.

05/09/11 e 06/09/11 → Semana da Pátria.
12/09/11 → Classificação de Superfícies - Minha apresentação
13/09/11 → Grupos - Apresentação Felipe.