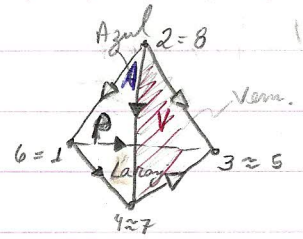
19/09/11

*No desenho da lesma:




Azul atrás, Vermelho direita
Laranjo embaixo Preto no esquerdo

Veja a aula do dia 29/08 que fizemos associação no tetraedro.

---

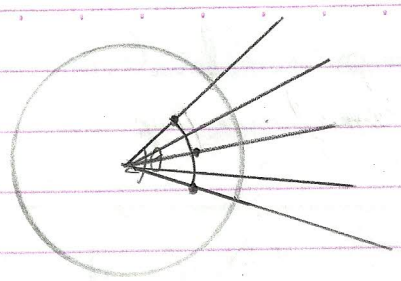
26/09/2011

Dimensão $\begin{cases} 2 & (\mathbb{R}) \\ 1 & (\mathbb{C}) \end{cases}$ (Fórmulas)

Plano Hiperbólico $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ com a métrica $\dfrac{2|dz|}{1-|z|^2}$

Lema: $\mathrm{Isom}(\mathbb{D}) = \langle$ inversões em círculos $\perp \partial\mathbb{D} \rangle$
$\qquad\qquad\qquad

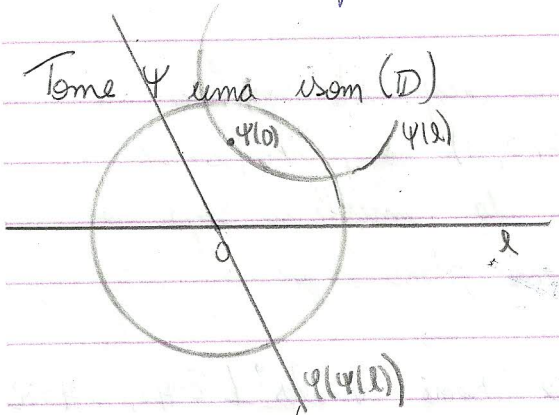
26/09/11



Isso mostra como é possível levar uma direção na outra

Corolário Essa transformação $\varphi$ pode ser tomada preservando a orientação

Tome $\psi$ uma isom ($\mathbb{D}$)




$l$: eixo $x$

Tome $\varphi \in \Gamma$ tal que $\varphi(\psi(0)) = 0$ e $\varphi(\psi(l)) = l$.

Além disso, escolhemos $\varphi$ de forma que $\varphi \circ \psi$ fixe $l$ ponto a ponto

↳ a partir de uma rotação, chega-se em $l$, basta escolher a orientação adequada para que $l$ fique fixo ponto a ponto

Por conformabilidade deve preservar todas as geodésicas → ou fixa ponto a ponto
↳ ou é levada para o outro lado

Veja que $\varphi \circ \psi$ preserva cada geodésica $\perp$ a $l$

$\Rightarrow$ $\varphi \circ \psi$ ou $\overline{\varphi \circ \psi}$ (+ reflexão) fixa cada geodésica $\perp l$ ponto a ponto

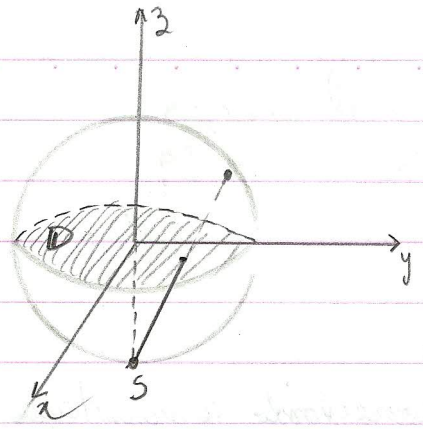
$\Rightarrow$ será igual à identidade

---

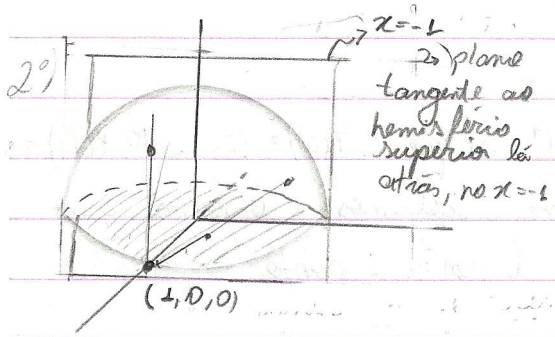
Outro modelo do plano hiperbólico: $\mathbb{H}$ o semi-plano superior.

1ª maneira: Chegar até $\mathbb{H}$ via duas projeções estereográficas

26/09/11




Proj. esterográfica do polo Sul leva $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2(x,y)$ no hemisfério superior.

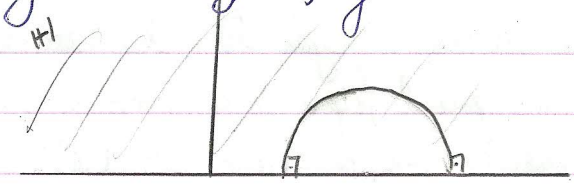


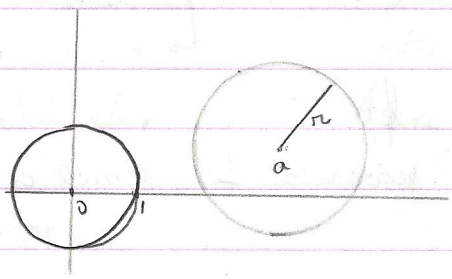

Fazer a proj. esterográfica de $(1,0,0)$ no plano $\{x=1\}$

Imagem do hemisfério superior é o semi-plano superior

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ geodésicas são "semi-círculos" $\perp \partial\mathbb{H}$, $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$

inclui retas



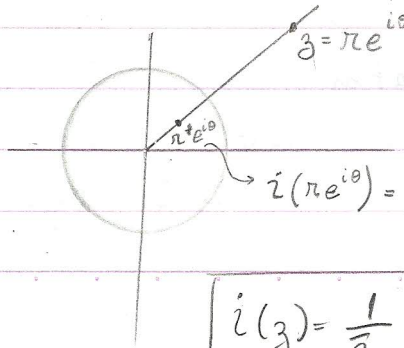

inversão

Translação o inversão no unitário

$i_{S(a,r)} = T_a \circ h_r \circ i \circ h_{\frac{1}{r}} \circ T_{-a}$

homotetia

Seja então $z = re^{i\theta}$ (um pto em uma circunferência)




$$\frac{e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}{e^{+i\theta} = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} \cdot \frac{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta} =$$

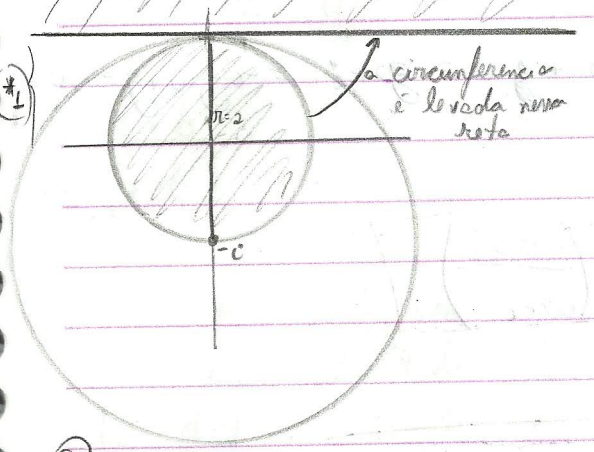
$$i(re^{i\theta}) = h_{\frac{1}{r}} \circ i_c \circ h_{\frac{1}{1}}(re^{i\theta}) = \frac{1}{r}e^{i\theta} = \frac{1}{re^{-i\theta}} = \frac{1}{\underbrace{re^{i\theta}}_{z}}$$

$$\boxed{i(z) = \frac{1}{\bar{z}}}$$

26/09/11

Vamos agora construir uma composição de inversões que levam $\mathbb{D}$ em $\mathbb{H}$

(*1)




$$i_{S(-i,2)}(z) = T_{-i} \circ h_2 \circ i \circ h_{\frac{1}{2}} \circ T_i\,(z)$$

$$= T_{-i} \circ h_2 \circ i \circ h_{\frac{1}{2}}(z+i) =$$

$$= T_{-i} \circ h_2 \circ i\left(\frac{1}{2}(z+i)\right) =$$

$$= T_{-i} \circ h_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{2}(\bar{z}-i)}\right)^{(*)} =$$

$$= T_{-i}\left(\frac{2}{\frac{1}{2}(\bar{z}-i)}\right) = \frac{4}{\bar{z}-i} - i$$

(*) $i(z) = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow i\left(\frac{1}{2}(z+i)\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}\overline{(z+i)}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(\bar{z}-i)}$$

$$i_{S(-i,2)}(\mathbb{D}) = \{z,\ \operatorname{Im} z > 1\}$$

(-i para "descer" até o eixo x) (*2)

$$\boxed{\varphi(z) = \frac{4}{\bar{z}-i} - 2i \qquad \varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{H}}$$

Tome agora $\varphi_1 : z \longmapsto -\bar{z}$

$$\varphi_1\left(\frac{4}{\bar{z}-i} - 2i\right) = -\frac{4}{\overline{\bar{z}-i}} - \overline{(-2i)} = \frac{-4}{z+i} - 2i = \frac{-4-2zi+2}{z+i} = \frac{-2-2zi}{z+i}$$

$$= 2i\,\frac{(-z-1/i)}{z+i} = 2i\,\frac{(-z+i)}{(z+i)}$$

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

26 / 09 / 11

$$S(z) = i\left(\frac{(-z+i)}{(z+i)}\right)$$

$\frac{w}{i} = -iw$

$$S(z) = w \Rightarrow -iw = \frac{-z+i}{z+i} = -izw + zw = -z+i = -izw + z = -w+i$$

$$= z(-iw+1) = -w+i$$

$$z = \frac{-w+i}{-iw+1} \Rightarrow \boxed{z = i\left(\frac{-w+i}{w+i}\right)}$$

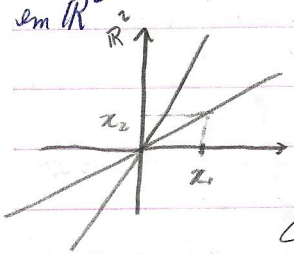
---

Grupo de transformações lineares Fracionárias: grupo de Möbius

$$\text{Möb}(\mathbb{C}) = \left\{T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0\right\}$$

Obs.: Se $ad-bc=0 \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = \text{constante}$

Ação em $\mathbb{C}P^1$: Como matriz $2\times 2$ age em retas (pela origem) em $\mathbb{R}^2$




$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}, \text{ com } x_2 \neq 0$$

Seja $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$, $l_\lambda$ a reta que passa por $(x_1, x_2)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(l_\lambda) = l_\mu, \text{ onde } \mu = \frac{ax_1+bx_2}{cx_1+dx_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x_2}\left(a\frac{x_1}{x_2}+b\right)}{\cancel{x_2}\left(c\frac{x_1}{x_2}+d\right)} = \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$$

26/09/11

Note que se tomarmos $\mathbb{C}^2$ teremos, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2}, \quad z = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\frac{az+b}{cz+d}.$$

Tomando a matriz inversa (existe pois $\det \neq 0$)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Então

$$S(z) = i\frac{(-z+i)}{z+i} = \frac{-iz-1}{z+i} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}.$$

Temos os seguintes grupos:

$$GL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ matriz complexa } 2\times 2 \text{ com } \det \neq 0 \right\}$$

$$GL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow Möb(\mathbb{C})$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow Möb(\mathbb{C}) \simeq PGL(2\,\mathbb{C})$$

Projetividade

isomorfo

Outra informação importante é $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0 \rightsquigarrow ad-bc = 1$.

basta tomar um escalar conveniente

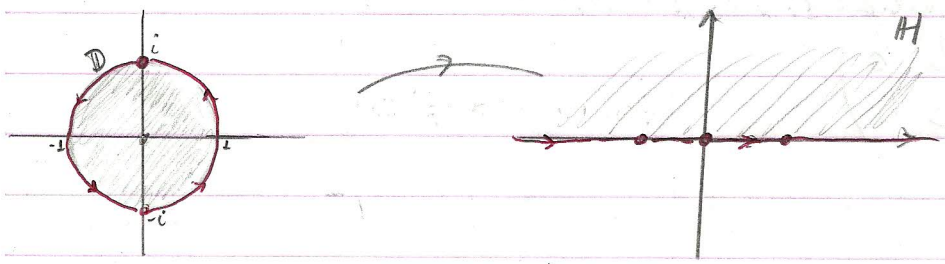
Outro grupo importante $SL(2, \mathbb{C})$ é um subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$

↳ matrizes inversíveis $2\times 2$ com $\det = 1$

26/09/11

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}}_{\text{dois elementos diferentes em } SL(2,\mathbb{C})} \qquad \text{Möb}(\mathbb{C}) \cong PSL(2,\mathbb{C})$$

$$S(z) = i\left(\frac{-z+i}{z+i}\right) = \frac{-iz-1}{z+i} \sim \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \notin SL(\det = 2)$$




O $\mathbb{D}$ é levado na reta

$S(0) = -1/i = i$ $\qquad S(-i) = \dfrac{-(i)^2-1}{-i+i} = \infty$

$S(i) = \dfrac{-i(i)-1}{i+i} = 0$ $\qquad S(-1) = \dfrac{i-1}{-1+i} = 1$

$S(1) = \dfrac{-i-1}{1+i} = -1$

Se dividirmos tudo por $\sqrt{2}$ teremos

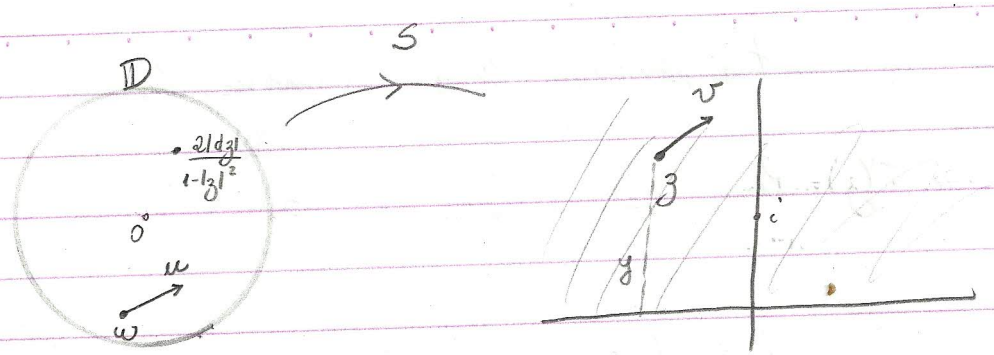
$$\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

, assim a inversa $\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad S^{-1}(w) = \frac{\frac{1}{2}(iw+1)}{\frac{1}{2}(-w-i)} = \frac{-iw-1}{w+i}$$

$$\boxed{S^{-1} = S}$$

26/09/11




$z = S(w)$

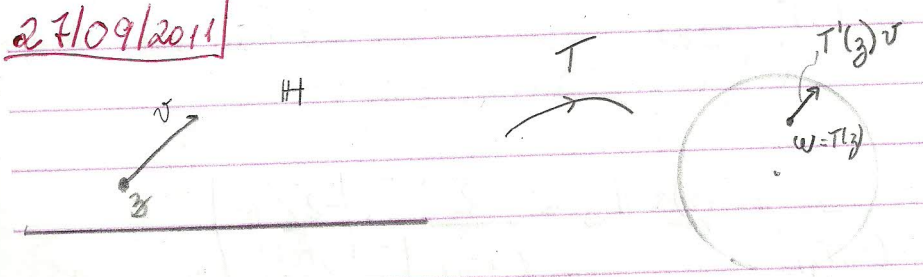
$v = S(u)$ (entenda como $D_w S(u) = v$)

$\|v\|_{z,hip} := \|u\|_{w,hip}$ $\qquad$ $\|u\|_{w,hip} = \dfrac{2\|u\|_{euc}}{1-|w|^2}$

Mostre que $\|v\|_{z,hip} = \dfrac{1}{\underbrace{Im(z)}_{\text{parte imaginária}}}\|v\|_{euc} = \dfrac{1}{y}\|v\|_{euc}$

---

27/09/2011




Vimos que $T(z) = \dfrac{-z+i}{z+i}$ (o "i" na frente serve apenas para rotacionar então podemos omitir

Definição $\|v\|_{z,hip} := \|T'(z)\, v\|_{w,hip}$