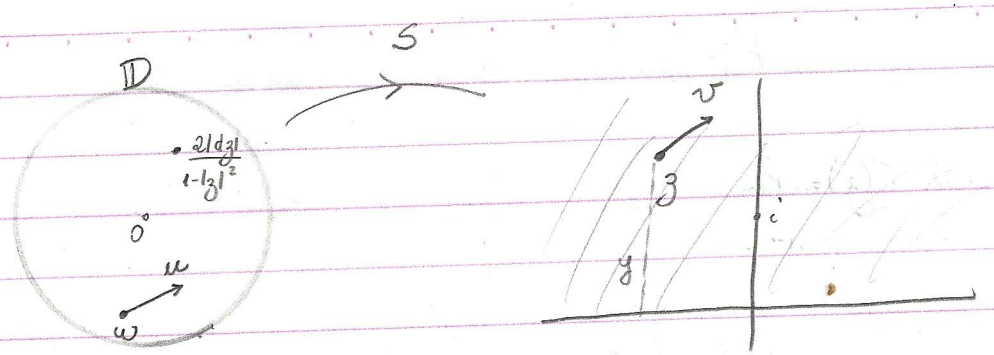
26/09/11



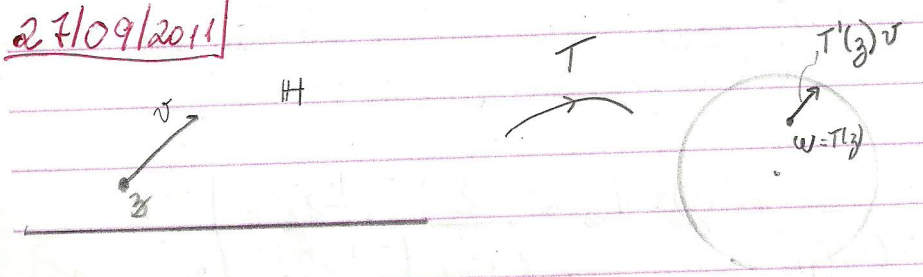
$z = S(w)$

$v = S(u)$ (entenda como $D_w S(u) = v$)

$\|v\|_{z,hip} := \|u\|_{w,hip}$ $\qquad$ $\|u\|_{w,hip} = \dfrac{2\|u\|_{euc}}{1-|w|^2}$

Mostre que $\|v\|_{z,hip} = \dfrac{1}{\underbrace{Im(z)}_{\text{parte imaginária}}}\|v\|_{euc} = \dfrac{1}{y}\|v\|_{euc}$

27/09/2011



Vimos que $T(z) = \dfrac{-z+i}{z+i}$ (o "i" na frente serve apenas para rotacionar então podemos omitir

Definição $\|v\|_{z,hip} := \|T'(z)\, v\|_{w,hip}$

27/09/11

Lembre que para derivar uma transformação linear fracionária fazemos da seguinte maneira:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow T'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{T(z+h) - T(z)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{a(z+h)+b}{c(z+h)+d} - \frac{az+b}{cz+d}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{(az+ah+b)(cz+d)-(az+b)(cz+ch+d)}{(c(z+h)+d)(cz+d)}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\cancel{acz^2} + \cancel{azd} + \cancel{ahcz} + \cancel{ahd} + \cancel{bcz} + \cancel{bd} - \cancel{acz^2} - \cancel{azch} - \cancel{azd} - \cancel{bcz} - \cancel{bch} - \cancel{bd}}{(c(z+h)+d)(cz+d)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{ad-bc}{(\cancel{c(z+h)}+d)(cz+d} = \boxed{\frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = T'(z)}$$

Veja Também que sendo $T(z) = \frac{-z+i}{z+i}$ temos $a=-1$, $b=i$, $c=1$, $d=i$

$$\Rightarrow T'(z) = \frac{-i-i}{(z+i)^2} = \frac{-2i}{(z+i)^2}$$

Então

$$\|v\|_{z,hip} = \|T'(z)v\|_{w,hip} = \frac{2}{1-|T_z|^2}\|T'(z)v\|_{euc} = \frac{2}{1-\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2}\cdot\left|\frac{-2iv}{(z+i)^2}\right|$$

$$= \frac{4}{|z+i|^2-|z-i|^2}|v| = \frac{4|v|}{\cancel{x^2}+(y+1)^2-\cancel{x^2}+(y-1)^2} = \frac{\cancel{4}|v|}{\cancel{4}y} = \frac{1}{y}|v|$$

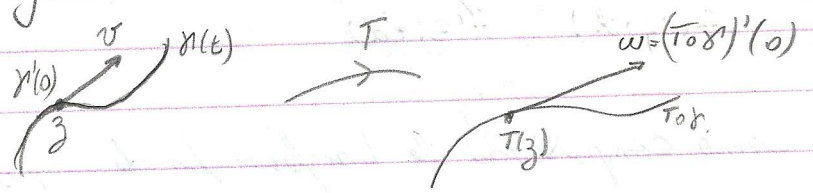
Sendo $z+i = x+iy+i = x+i(y+1)$
$z-i = x+iy-i = x+i(y-1)$

27/09/11

Sendo assim, temos que a métrica em D é dada por $\frac{2}{1-|z|^2}|dz|$ enquanto em $\mathbb{H}$ temos $\frac{|dz|}{\operatorname{Im}(z)}$

//

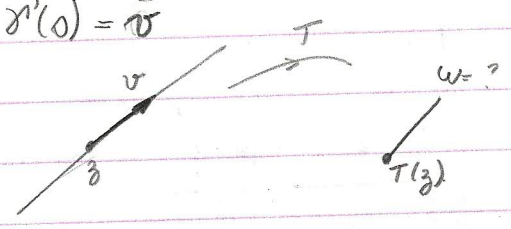
Veja



Se pensarmos nas possíveis curvas que passam por z, e às quais v é tangente, é imediato pensar na reta

$\gamma(t) = z + tv$

$\gamma'(0) = v$



$$w := \frac{d}{dt} T\circ\gamma(t)\Big|_{t=0}$$

Fazendo então $w = \lim_{t\to 0}\left(\frac{a(z+tv)+b}{c(z+tv)+d} - \frac{az+b}{cz+d}\right)\cdot\frac{1}{t} = \dots = \left(\frac{ad-cb}{(cz+d)^2}\right)v$ já fica multiplicado pela reta

//

Transformações Lineares Fracionárias (TLF)

$$z \xmapsto{T} \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc \neq 0$$

$\text{Möb}(\mathbb{C}) \simeq PGL(2,\mathbb{C}) = GL(2,\mathbb{C})$ projetivizado

$PSL(2,\mathbb{C})/\pm Id.$

27/09/11

Temos ainda a seguinte igualdade:

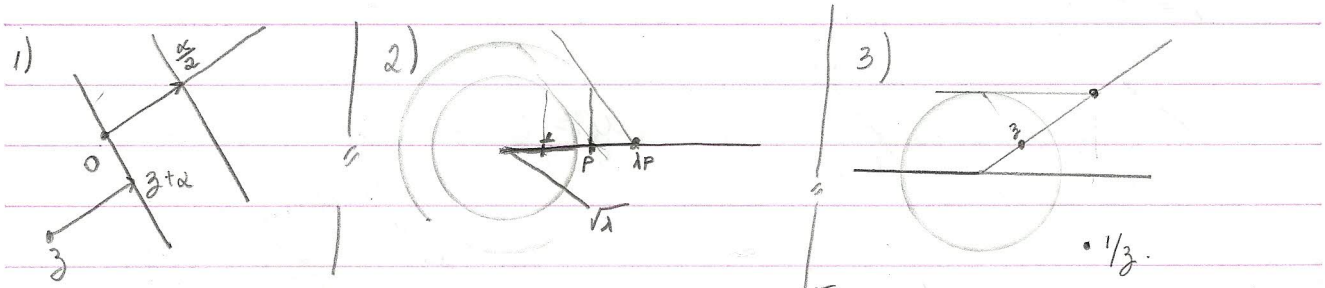
$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{-ad+bc}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c}$$

$$\frac{-ad+bc+acz+ad}{c^2z+cd} = \frac{caz+bc}{c(cz+d)} = \frac{\cancel{c}(az+b)}{\cancel{c}(cz+d)}$$

Toda TLF pode ser obtida como composição de transformações de 3 tipos

$$\begin{cases} 1)\ z \longmapsto z+\alpha \\ 2)\ z \longmapsto \lambda z \\ 3)\ z \longmapsto \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \end{cases}$$

Além disso, note que todas essas composições são de, exatamente, ~~de~~ 2 ou 4 inversões



Faz a inversão no círculo unitário e reflete no eixo x.

<u>Lema</u> O grupo de Möbius ($\mathbb{C}$) preserva {círculos e retas} (Foi o que acabamos de mostrar)

<u>Recomendação</u>: Ler parte de qualquer livro de análise complexa sobre TLF
- Ahlfors
- Ford: Automorphics Forms

27/09/11

$\mathbb{H} \rightsquigarrow \mathbb{D}$

$T(z) = \dfrac{-z+i}{z+i}$

Fórmulas para as isometrias de $\mathbb{H}$

Lema: A forma geral de um elemento de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ é

(i) $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

(ii) $z \longmapsto \dfrac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b}$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

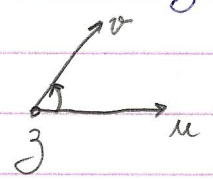
$ad - bc > 0$

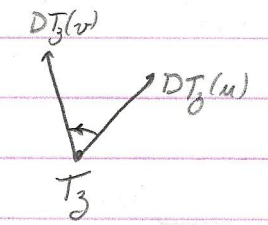
↳ Se $ad-bc<0$ não iria preservar o semi-plano superior

Note que fazendo $\frac{1}{z}$ de (i) chegamos em (ii)

Note ainda que

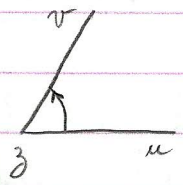
$$D_z T(v) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\, v$$

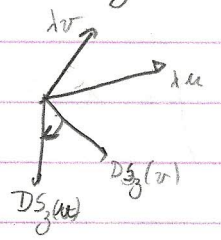




o ângulo e a orientação são mantidos

Se $S(z) = \dfrac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b}$ $\quad DS_z(v) = \dfrac{cb-da}{(a\bar{z}+b)^2} \cdot \bar{v}$





preserva o ângulo e inverte a orientação

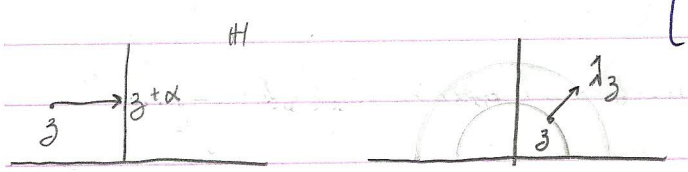
27/09/11

Demonstração do Lema

$$\frac{az+b}{cz+d} = -\frac{ad-bc}{c^2(z+d/c)} + \frac{a}{c} \xleftarrow{\text{composição}} \begin{cases} z \mapsto z+\alpha \\ z \mapsto \lambda z \\ z \mapsto -1/z \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \lambda \in \mathbb{R}^+$$

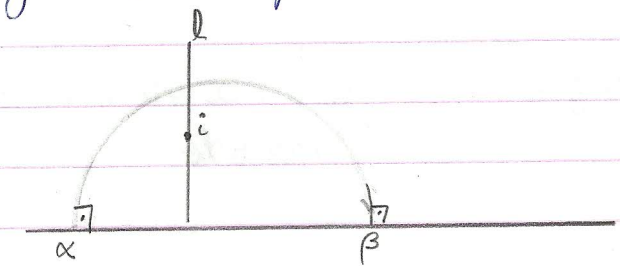
$$\frac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b} = \frac{ad-bc}{a^2(\bar{z}+b/a)} + \frac{c}{a} \xleftarrow{\text{composição}} \begin{cases} z \mapsto z+\alpha \\ z \mapsto \lambda z \\ z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} \end{cases}$$

↳ inversão no círculo unitário preserva o semi plano superior



Preservam Semi-plano superior

Mostrar que toda isometria Ψ é de uma das formas (i), (ii) "desfazemos" pós-compondo com elementos da forma (i), (ii)



As geodésicas de $\mathbb{H}$ são retas ou círculos perpendiculares ao bordo pois mantem {retas e círculos}

$$z \xrightarrow{T_1} \frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} = \alpha - \beta$$

$$T_1 \circ \Psi \begin{cases} 0 \xrightarrow{\Psi} \alpha \xmapsto{T_1} 0 \\ \infty \xrightarrow{\Psi} \beta \xmapsto{T_1} \infty \end{cases}$$

Por definição $\Psi(0) = \alpha$
$\Psi(\infty) = \beta$

27/02/11

Se $\alpha > \beta$, o semi-plano superior é preservado.
Basta definir

$T_2(z) = \mu z$, $\mu = \dfrac{1}{|T_1(i)|}$ $\qquad T_1$

$$\left.\begin{array}{l} T_2 \circ T_1 \circ \psi(l) = l \\ T_2 \circ T_1 \circ \psi(i) = i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

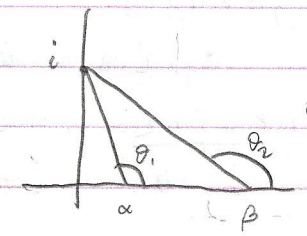
Se $T_2 \circ T_1 \circ \psi$ fixa l ponto a ponto então é igual a Id.

Caso contrário, $\Rightarrow \dfrac{1}{T_2 \circ T_1 \circ \psi}$ fixa l ponto a ponto.

Se $\alpha < \beta$, além das composições anteriores fazemos $T_3(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$

Veja que $T_1(i) = \dfrac{i-\alpha}{i-\beta} = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ se $\alpha < \beta$,

esse está no semi-plano inferior.



$\theta_1 - \theta_2 < 0$

03/10/2011

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Métrica: $\dfrac{|dz|}{y \to \operatorname{Im} z}$