27/02/11

Se $\alpha > \beta$, o semi-plano superior é preservado.
Basta definir

$T_2(z) = \mu z$, $\mu = \dfrac{1}{|T_1(i)|}$ $\qquad T_1$

$$\left.\begin{array}{l} T_2 \circ T_1 \circ \psi(l) = l \\ T_2 \circ T_1 \circ \psi(i) = i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

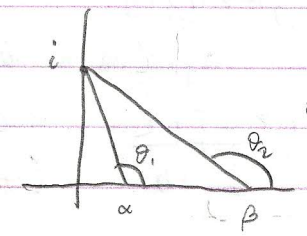
Se $T_2 \circ T_1 \circ \psi$ fixa l ponto a ponto então é igual a Id.

Caso contrário, $\Rightarrow \dfrac{1}{T_2 \circ T_1 \circ \psi}$ fixa l ponto a ponto.

Se $\alpha < \beta$, além das composições anteriores fazemos $T_3(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$

Veja que $T_1(i) = \dfrac{i-\alpha}{i-\beta} = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ se $\alpha < \beta$,

esse está no semi-plano inferior.



$\theta_1 - \theta_2 < 0$

03/10/2011

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Métrica: $\dfrac{|dz|}{y \to \operatorname{Im} z}$

03/10/11

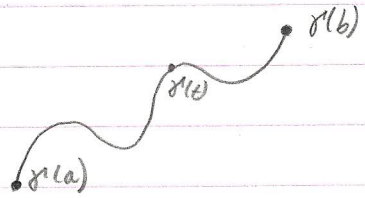
$$\|\gamma\|^{\mathbb{H}}_{hip} = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{y} = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{y(t)}\,dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}\,dt \geq$$

$$\geq \int_a^b \frac{|y'(t)|}{y(t)}\,dt \geq \ln\frac{y(b)}{y(a)}, \quad \text{onde } \gamma:[a,b]\to\mathbb{H}$$

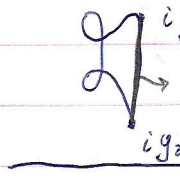
$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\|$$

Se $y' > 0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{y(b)}{y(a)}$



Obs.: Este ↑ Poderia ter sido o começo do curso.



este é a menor curva que une os dois pontos.

Observação importante: O segmento vertical de $z_1 = iy_1$ a $z_2 = iy_2$ é o segmento de menor comprimento de z_1 a z_2.

Lema As isometrias de $\mathbb{H}$ são de uma das formas $\begin{cases} z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \\ z \mapsto \dfrac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b} \end{cases}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc>0$ (**)

$GMöb(\mathbb{C})$ = grupo gerado por reflexões e inversões.

$\underbrace{Möb(\mathbb{C})}_{\text{transformações que preservam orientação}} \subseteq GMöb(\mathbb{C})$

$$GL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\Psi} Möb(\mathbb{C})$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

$ad-bc \neq 0$

Ψ é um homeomorfismo de grupo $Nuc(\Psi) = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

03/10/11

Lembre-se que: $G\text{Möb}(\mathbb{C})$ é gerado por $i_{S(a,r)}$ que é conjugada por translações e homotetias a $i_{S(0,1)}$ (Toda inversão em esfera de centro a e raio r é uma inversão na esfera unitária (centro 0 e raio = 1)).

Exercício: Mostre que toda transformação em $\text{Möb}(\mathbb{C})$ pode ser levada na fórmula acima $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

$$z \longmapsto \frac{\lambda a z + \lambda b}{\lambda c z + \lambda d} = \frac{az+b}{cz+d}$$

$\det = \lambda^2(ad-bc)$. podemos escolher $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{ad-bc}}$

Podemos escolher $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow T \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \Leftrightarrow T \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Aqui ainda existem dois valores para λ ($\oplus$ e $\ominus$) por isso ainda existe ambiguidade.

Temos ainda os grupos $SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad-bc = 1, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right.$ e

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad-bc = 1, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ $\begin{cases} \text{preserva } \mathbb{H} \Leftrightarrow ad-bc > 0 \\ \text{Troca } \mathbb{H} \leftrightarrow \overline{\mathbb{H}} \Leftrightarrow ad-bc < 0. \end{cases}$

$T(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ $\begin{matrix} > 0 \Leftrightarrow ad-bc > 0 \\ < 0 \Leftrightarrow ad-bc < 0. \end{matrix}$

03/10/11

$$T(z) = \frac{-ad+bc}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c} = -\frac{\left(\frac{ad-bc}{c^2}\right)}{\left(z+\frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c}$$

$z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc>0$ é gerado por transformações do tipo:

$$\begin{cases} z \mapsto z+a, & a \in \mathbb{R} \\ z \mapsto \lambda z, & \lambda > 0 \\ z \mapsto -1/z \end{cases}$$

e $z \mapsto \dfrac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b} = \dfrac{ad-bc}{a^2\left(\bar{z}+\frac{b}{a}\right)} + \dfrac{c}{a}$

Temos então que $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ e $z \mapsto \dfrac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b}$ são gerados por

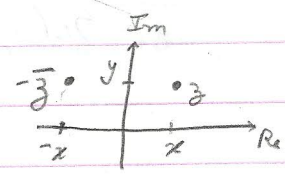
$z \mapsto z+a$, $a \in \mathbb{R}$

$z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$

$z \mapsto 1/\bar{z}$ } $z \mapsto -\dfrac{1}{z}$ → inversão no círculo unitário

$z \mapsto -\bar{z}$ → reflexão no eixo imaginário

$z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$, $-\bar{z} = -x+iy$



Sendo assim, (**) $\subseteq$ Isom(H). Toda isometria é do tipo de (**)

$$\mathrm{Isom}^+(H) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1 \right\} \underset{\text{Isomorfismo}}{\sim} PSL(2,\mathbb{R})$$

↳ acaba com a ambiguidade

↓ queremos mostrar

03/10/11

Lema: $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ age transitivamente em triplas de pontos em $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Isto é, dadas 2 triplas $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ e $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} \subseteq \hat{\mathbb{R}}$, existe uma única transformação $x \xmapsto{T} \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\begin{cases} T(\alpha_1) = \alpha_2 = 0 \\ T(\beta_1) = \beta_2 = \\ T(\gamma_1) = \gamma_2 = \infty \end{cases}$. (Note que escolhemos $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$ e $\gamma_2 = \infty$).

Sem especificar o sinal de $ad-bc \neq 0$

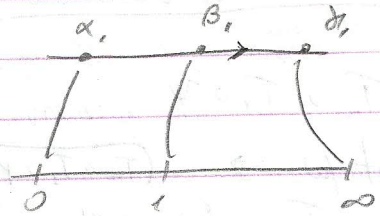
$$T(x) = \frac{x-\alpha_1}{x-\gamma_1} \cdot \overbrace{\left(\frac{\beta_1-\gamma_1}{\beta_1-\alpha_1}\right)}^{\mu}$$

Veja: $T(\alpha_1) = \dfrac{\cancel{\alpha_1-\alpha_1}}{\alpha_1-\gamma_1}\left(\dfrac{\beta_1-\gamma_1}{\beta_1-\alpha_1}\right) = 0$; $T(\beta_1) = \dfrac{\cancel{(\beta_1-\alpha_1)}}{\cancel{(\beta_1-\gamma_1)}} \cdot \dfrac{\cancel{(\beta_1-\gamma_1)}}{\cancel{\beta_1-\alpha_1}} = 1$

$$T(\gamma_1) = \frac{\gamma_1-\alpha_1}{\cancel{\gamma_1-\gamma_1}}\left(\frac{\beta_1-\gamma_1}{\beta_1-\alpha_1}\right) = \infty$$

$$T(x) = \frac{\mu x - \mu\alpha_1}{x-\gamma_1} \qquad \det = -\mu\gamma_1 + \mu\alpha_1 = \mu(\alpha_1-\gamma_1) = \frac{\beta_1-\gamma_1}{\beta_1-\alpha_1}(\alpha_1-\gamma_1) \neq 0$$

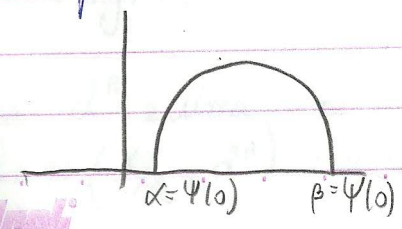
Outra transformação: $T(\alpha_1) = 1$, $T(\beta_1) = 0$, $T(\gamma_1) = \infty$



$$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}) \subseteq \begin{cases} z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}, & ad-bc>0 \\ z \mapsto \dfrac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b} & a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dada Ψ uma isometria, vamos "desfazê-la" por um elemento de

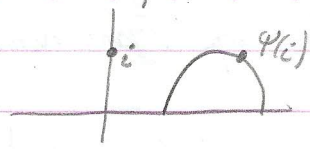
(1) Ψ preserva a orientação



03/10/11

escolher de modo que $\det \pm(\alpha-\beta)>0$

Tome $T_1(z) = \pm\left(\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\right)$



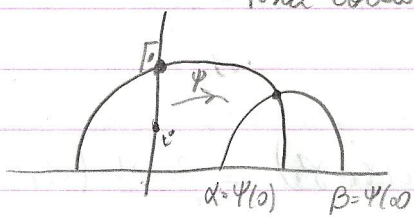
$\Rightarrow T_1 \circ \Psi$: eixo imaginário >0 ↺

$T_2(z) = \mu z$ onde $\mu = \dfrac{i-\beta}{i-\alpha}$

Então $T_2 \circ T_1 \circ \Psi$ fixa o eixo imaginário como conjunto, fixa o ponto i e leva $(0,i)$↺ e $[i,\infty)$↺ $\Rightarrow T_2 \circ T_1 \circ \Psi$ fixa o eixo imaginário ponto a ponto.

$\Downarrow$

fixa todos os ptos do plano: Vejà



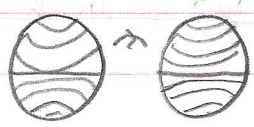
② Ψ reverte orientação

preservam orientação → reverte orientação

$T_2 \circ T_1 \circ \Psi$ preserva eixo imaginário ponto a ponto e reverte a orientação $\Rightarrow -(\overline{T_2 \circ T_1 \circ \Psi})$ preserva a orientação e o eixo imaginário

Obs.: Isometrias de $\mathbb{H}$ se estendem a $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \hat{\mathbb{R}}$

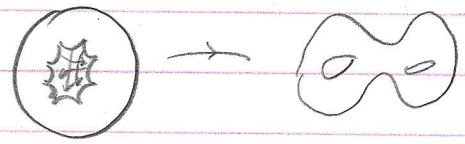
Leva geodésica em geodésica



03/10/11

Agora vamos sistematizar a construção de
- superfícies hiperbólicas (ou esféricas ou euclidianas)
- 3-variedades

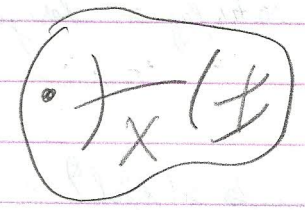
a partir de polígonos e colagem de lados.



Colagens: Quocientes Métricos

- (X, d) espaço métrico

  R uma relação reflexiva e simétrica em X (não é de equivalência)



$\rightarrow R = \{$ subconjuntos de $X\}$

$$x R y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x, y \in \text{mesmo conj. de } R \end{cases}$$

R-cadeia de x a y é uma seq. finita de pares $\{(p_i, q_i)\}$ tq

$x R p_1,\ q_1 R p_2,\ q_2 R p_3, \ldots, q_i R p_{i+1}, \ldots, q_{k-1} R p_k,\ q_k R y$

Comprimento da R-cadeia

$$L^R((p_i, q_i)) = \sum_{i=1}^{k} d_X(p_i, q_i) \qquad \text{(Dentro do mesmo conjunto } d_X = 0)$$

$$d^R(x,y) = \inf\{L^R(p_i, q_i) ;\ (p_i, q_i) \text{ é } R \text{ cadeia de } x \text{ a } y\}$$

$d(x,y) = 0 \not\Rightarrow x = y$

Lema: d^R é uma semi-métrica, isto é, ≥ 0, reflexiva e satisfaz desig. triang.

Definição $(X/_R, d^R)$ é o espaço métrico canônico associado a (X, d^R)

esse é relação de equivalência