04/10/11

04/10/2011

(X, d) espaço métrico

$\mathcal{R}$ = coleção de subconjuntos

R = relação em X simétrica e reflexiva.

$$x R y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x, y \in \text{mesmo conjunto em } \mathcal{R} \end{cases}$$

R-cadeia $x_0 R p_1, q_1 R p_2, q_2 R p_3, \ldots, q_k R y$

$$L^R((p_i, q_i)) = \sum_{i=1}^{n} d(p_i, q_i)$$

$$d^R(x, y) = \inf\{L^R((p_i, q_i))\}; \text{ onde } (p_i, q_i \text{ é } R\text{-cadeia de } x \text{ a } y\}$$

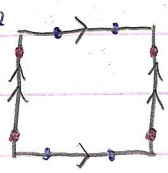
Lema: d^R é semi-métrica, isto é, ≥ 0, simétrica e satisfaz a desigualdade triangular.

Def. $(X/R, d^R)$ é o espaço métrico canônico associado a (X, d)

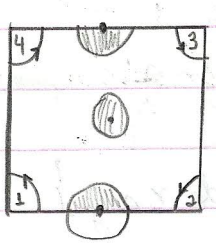
Comentário: Quociente métrico e topológico não diferentes em geral.

Revisitando Exemplos (Dim 2)

a) Toro



Definimos a distância entre os pontos do lado associados = 0



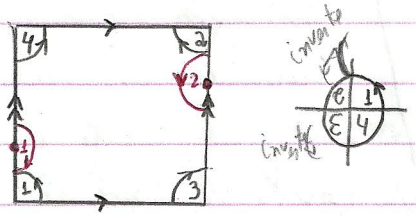
Colo um pedaço no outro por isometria

Vamos mostrar que é localmente isométrico.

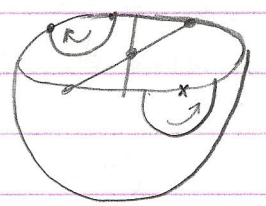
Exercício: T^2 = Quadrado com identificação, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $S^1 \times S^1$, $\bigcirc \in \mathbb{R}^3$ são homeomorfos. Construa os homeomorfismos. São isométricos? Quais?

04/10/11

b) Garrafa de Klein.



② Espaço elíptico



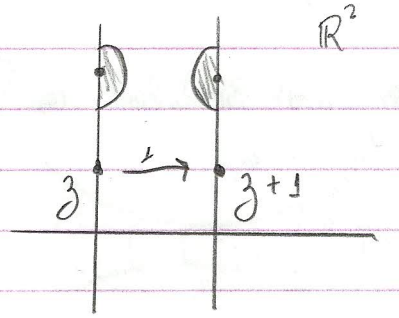
Não basta apenas fechar e colar, os pontos estão em lados trocados deve girar

Infinitos: (Número infinito de identificação

cada segmento um conjunto
distância entre esses pontos = 0
" até o ponto de acumulação = 0

Infinitos Espaciais:

a) Cilindro Euclidiano



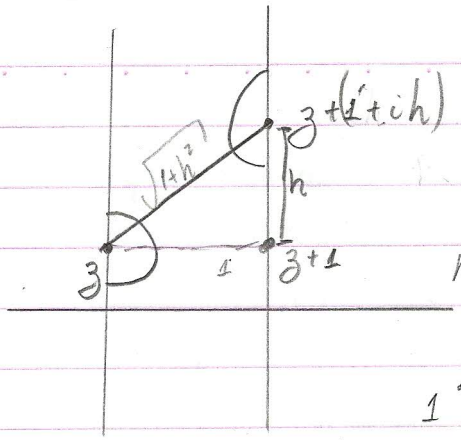
Quociente

Métrico

cilindro infinito

04 / 10 / 11

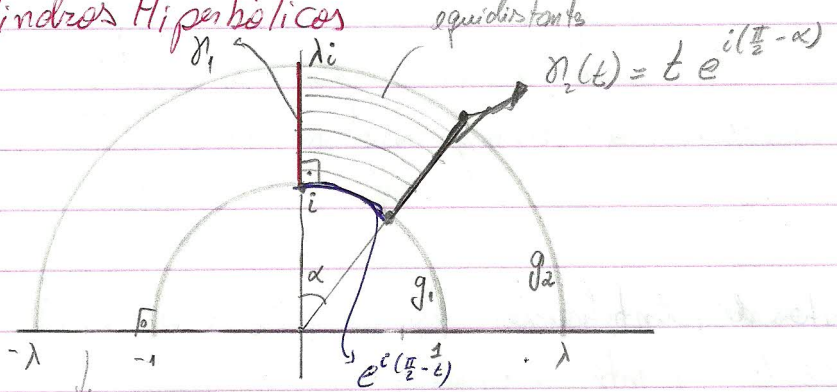
b)



Quociente métrico

Tanto esse como o anterior são localmente euclidianos, mas não são globalmente isométricos se $h \neq 0$. A geodésica do 1° tem tamanho = 1, enquanto as geodésicas deste tem tamanho = $\sqrt{1+h^2} > 1$ e não tem como levar um na outra.

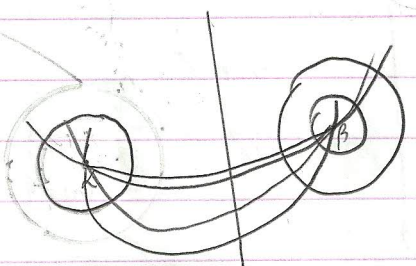
Cilindros Hiperbólicos



faixa infinita (a) podemos colar g_1 com g_2 $z \longmapsto \lambda z$

$\omega = T(z)$ é TLF $\quad \dfrac{\omega-\alpha}{\omega-\beta} = \lambda \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ (Verifique)

α e β são ponto fixos por T pois $T(\alpha)=\alpha$, $T(\beta)=\beta$



Preservam o conjunto circular/reta

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\omega-\alpha}{\omega-\beta} = \lambda\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right) \Leftrightarrow \frac{\omega'}{(\omega-\beta)^2} = \lambda\frac{1}{(z-\beta)^2} \Rightarrow$$

04/10/11

$$\Rightarrow \omega'(z) = \lambda \left(\frac{\omega(\alpha)-\beta}{(z)-\beta}\right)^2 \Rightarrow \begin{matrix} \omega'(\alpha) = \lambda \\ \omega'(\beta) = 1/\lambda \end{matrix}$$

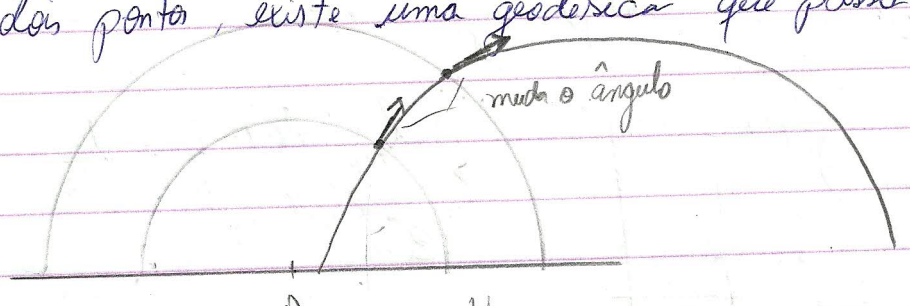
b) Colar g_1 com g_2 por $z \longmapsto T(\lambda z)$ onde T é um elemento de $PSL(2,\mathbb{R})$ cujos pontos fixos são $\pm\lambda$.

Explicando (a) e (b): Faixa entre g_1 e g_2 colada por $z \longmapsto \lambda z$ é localmente Hiperbólica — Quocientes G

G tem exatamente (a reta vermelha) uma geodésica fechada γ_1: quociente do segmento vertical de i a λi

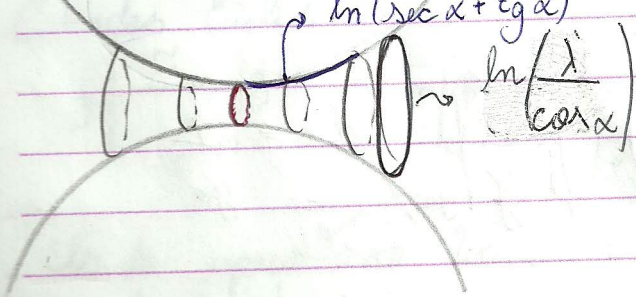
$$\ell_{hip}(\gamma_1) = \int_\gamma \frac{|dz|}{y} = \int_1^\lambda \frac{dy}{y} = \boxed{\ln \lambda}$$

Dados dois pontos, existe uma geodésica que passa por eles



arco geodésico fechado

O cilindro terá uma "cintura"



$$\ell_{hip}(\gamma_2) = \int_{\gamma_2} \frac{|dz|}{y} = \int_1^\lambda \frac{dt}{t \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha)} = \ln\left(\frac{\lambda}{\cos\alpha}\right)$$

$$\gamma_\alpha(t) = t\left(\cos(\pi/2 - \alpha) + i \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

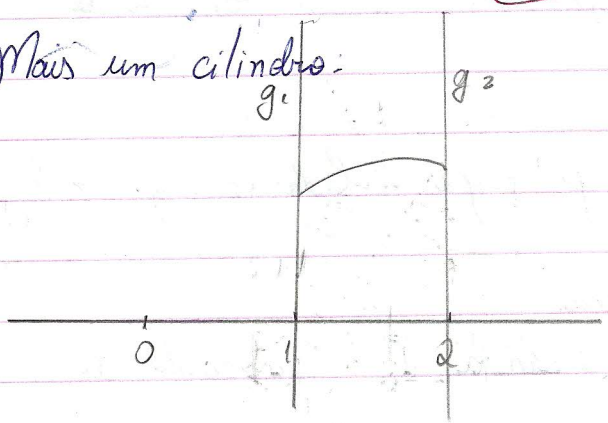
$$|\gamma'_\alpha(t)| = |e^{i(\pi/2 - \alpha)}| = 1$$

$$\ell_{hip}(\gamma_2) \xrightarrow[\alpha \to \frac{\pi}{2}]{} \infty$$

04/10/11

$$d_{hip}(\gamma_\alpha, \gamma_0) = \int_0^\alpha \frac{|e^{i(\frac{\pi}{2}-t)}|}{\operatorname{Sen}(\frac{\pi}{2}-t)}\,dt = \int_0^\alpha \frac{dt}{\cos t} = \ln(\sec\alpha + tg|\alpha|)$$

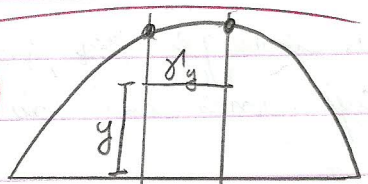
Mais um cilindro:



a) $g_1 \sim g_2 \quad z \longmapsto z+1$

b) $g_1 \sim g_2 \quad z \longmapsto 2z$

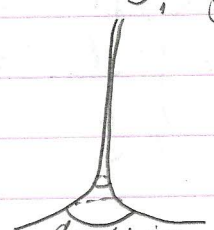
a)



$\gamma_y = \{y = y\} \cap \text{cilindro} = \{t + iy,\ 1 \le t \le 2\}$

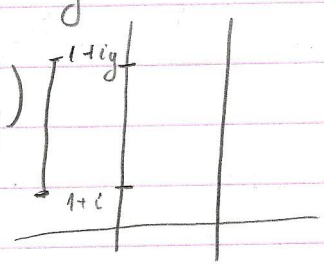
Não possui geodésica fechada

$$l_{hip}(\gamma_y) = \int_1^2 \frac{dt}{y} = \frac{1}{y} \begin{cases} y \to \infty & 0 \\ y \to 0 & \infty \end{cases}$$

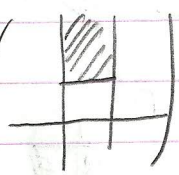


$$d_{hip}(1+i, 1+iy) = \int_1^y \frac{dy}{y} = \ln(y) \Rightarrow y = e^{d_{hip}(1,iy)}$$

$$\ln y = d_{hip}(i, iy)$$

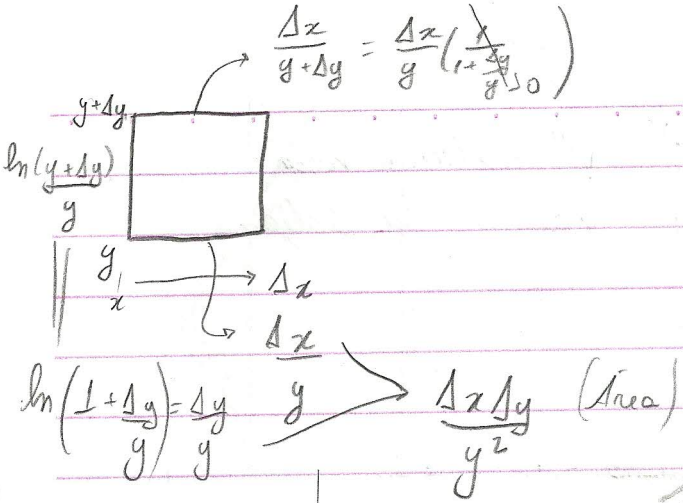


$$\Rightarrow \quad l_{hip}(\gamma_i) = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^{d_{hip}(i,iy)}} = e^{-d_{hip}(i,iy)}$$

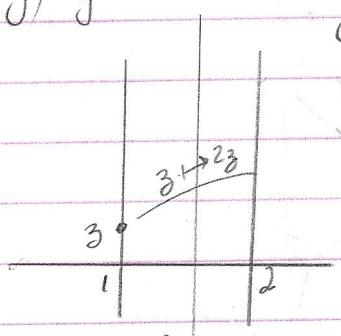
Área $\left(\right.$  $\left.\right)$

$$\text{Área} = \int_{\#} \frac{dx\,dy}{y^2} = \int_1^2 dx \int_y^\infty dy \left(\frac{1}{y^2}\right) = \int_1^2 \left(\frac{-1}{y}\Big|_{y_0}^{\infty}\right) dx = \frac{1}{y_0}$$

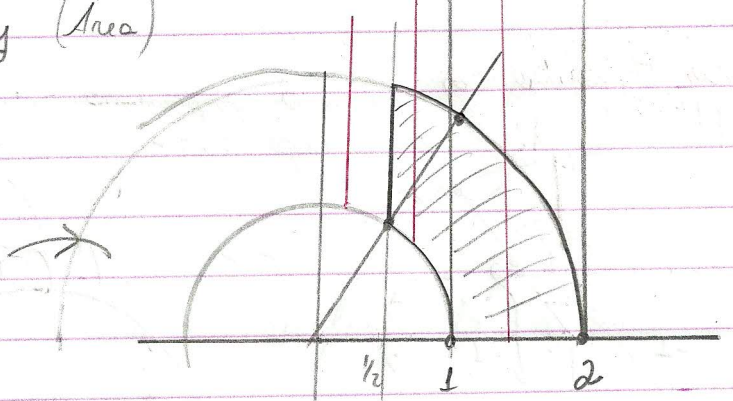
4/10/11



(b)



Espaço métricos geodesicamente completos



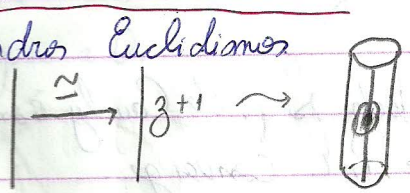
Não produz espaço métrico completo. A geodésica vai para o infinito, mas chega-se por um caminho finito no fim

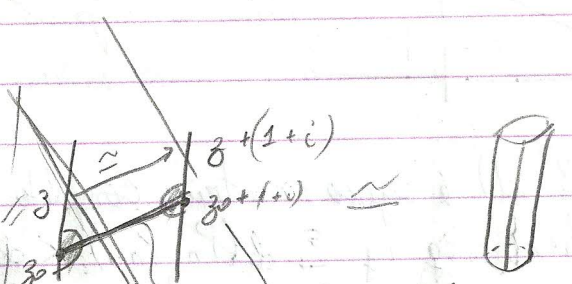
10/10/11

Objetivo: Construir explicitamente uma estrutura hiperbólica no complemento do nó 8, passando por
- Teorema de Poincaré sobre tecelagens hiperbólicas em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{H}^3$
- Grupo fuchsiano e Kleinismo

Cilindros em dimensão 2

Cilindros Euclidianos





Os dois espaços quocientes são localmente euclidianos (os cilindros) mas não são globalmente isométricos pois as geodésicas diferem.