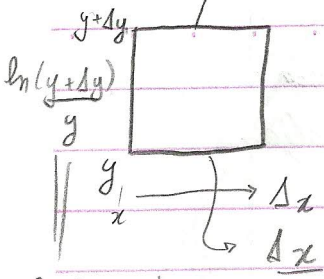
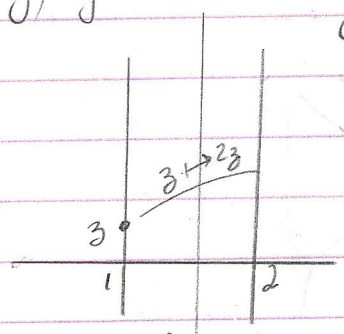
4/10/11

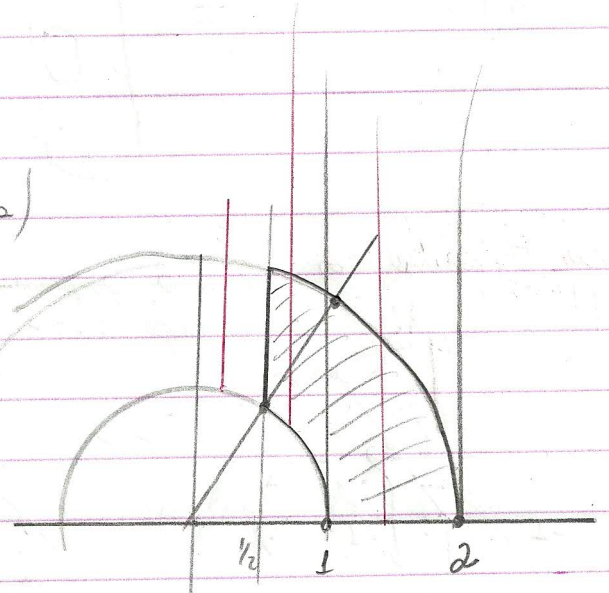
$$\frac{\Delta x}{y+\Delta y} = \frac{\Delta x}{y}\left(\frac{1}{1+\frac{\Delta y}{y}}\right)$$



$$\ln\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{\Delta y}{y} \qquad \frac{\Delta x}{y} \longrightarrow \frac{\Delta x \Delta y}{y^2} \text{ (Área)}$$

(b)





Espaço métricos geodesicamente completos

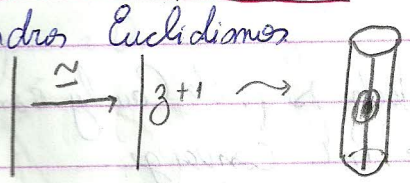
Não produz espaço métrico completo. A geodésica vai para o infinito, mas chega-se por um caminho finito no fim.

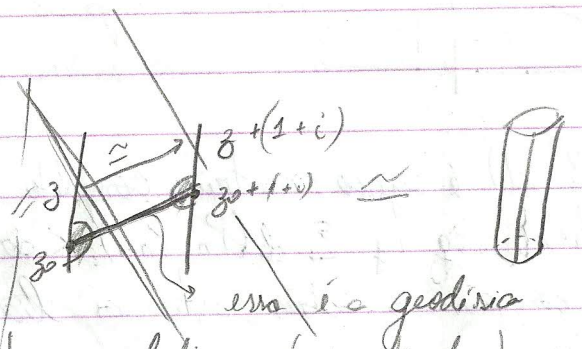
10/10/11

Objetivo: Construir explicitamente uma estrutura hiperbólica no complemento do nó 8, passando por
- Teorema de Poincaré sobre tecelagens hiperbólicas em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{H}^3$
- Grupo fuchsiano e Kleinismo

Cilindros em dimensão 2

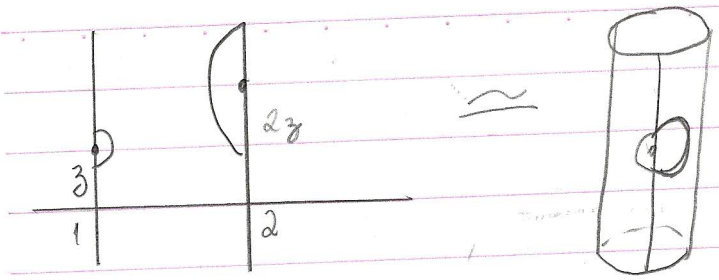
Cilindros Euclidianos





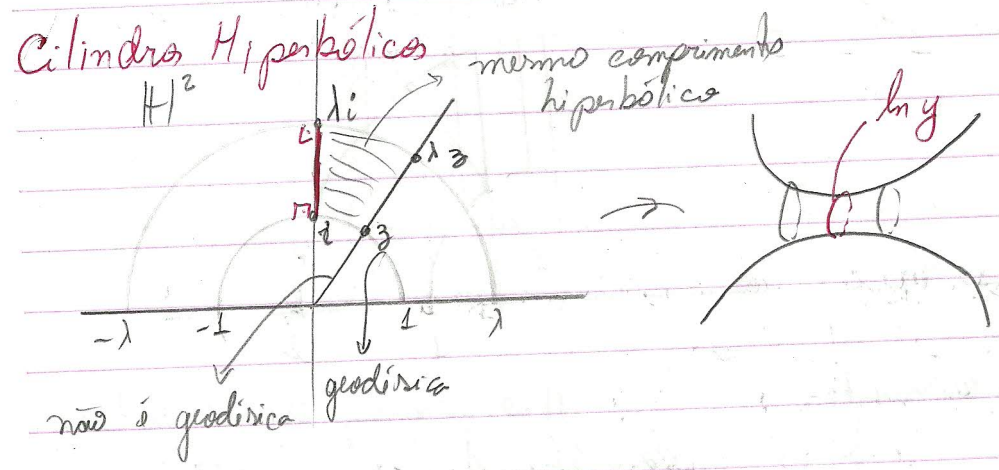
Os dois espaços quocientes são localmente euclidianos (os cilindros) mas não são globalmente isométricos pois as geodésicas diferem.

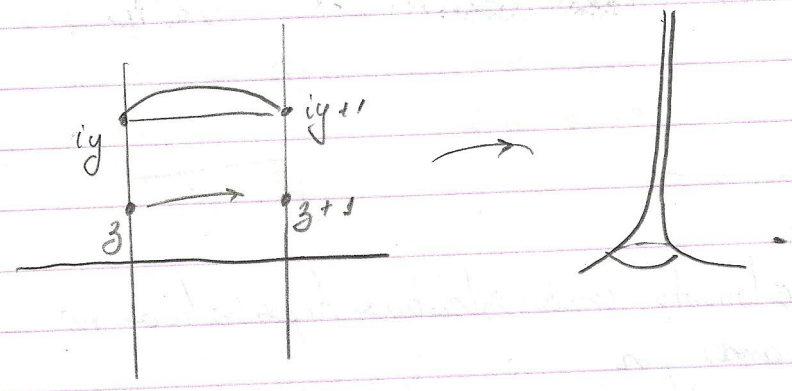
10 / 10 / 11

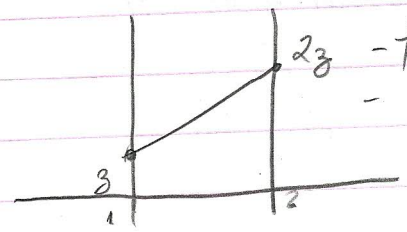


A métrica não vai ser euclidiana.

Cilindros Hiperbólicos



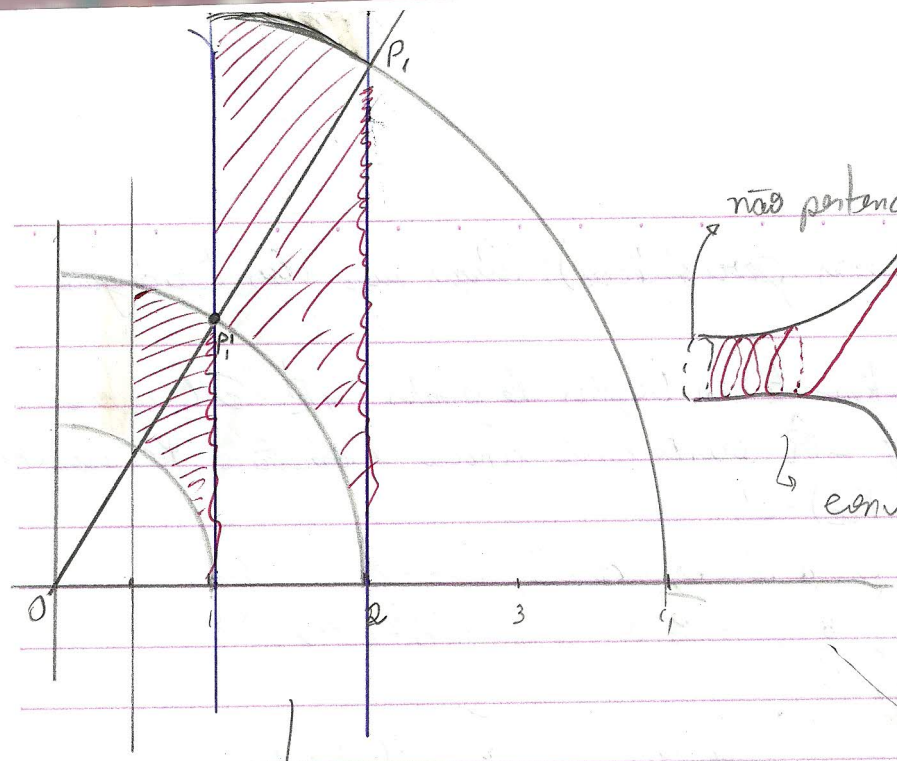


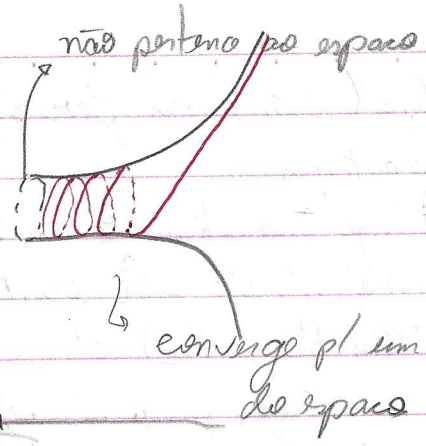


- também produz um cilindro topológico
- não é espaço métrico completo.

Def. (X, d) é espaço métrico completo se toda seq. de Cauchy converge
$\Leftrightarrow$ se $\{P_n\}$ seq tq $\sum d(P_n, P_{n+1}) < \infty \Rightarrow \{P_n\}$ converge.
Os espaços com os quais estamos lidando são localmente completo

10/10/11





↳ Essa faixa vai se transformando na curva que nunca vai chegar a 0 (tende para 0).

No quociente a $d(\overline{P_i}, \overline{P_{i+1}}) \leq d(P_i', P_{i+1})$

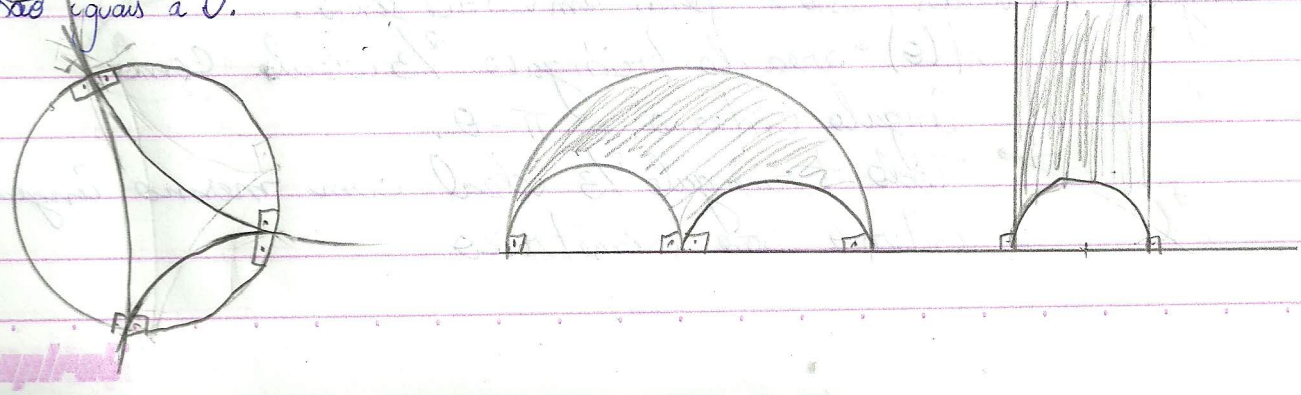
$\sum d(P_i', P_{i+1}) \leq l_{h_p}$ (arco geodésico P_1' $< \infty$)

Mais fatos sobre Geometria Hiperbólica

Teorema de Gauss-Bonet (Hiperbólica): A área de um triângulo hiperbólico com ângulos internos α, β, γ é $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

Teorema de Gauss-Bonet (Esférico): A área de um triângulo esférico com ângulos internos α, β, γ é $\pi + (\alpha + \beta + \gamma)$

Triângulo ideais: São triângulos cujos vértices estão no infinito (Os ângulo internos são iguais a 0.



10/10/21

Lema Simetria (isometrias periódicas): Quaisquer dois triângulos ideais são isométricos

Lema $Isom(\mathbb{H})$ age transitivamente em triplas de pontos em $\hat{\mathbb{R}} = \partial\mathbb{H}$, isto é dados $\{a,b,c\}$ e $\{a',b',c'\} \in \hat{\mathbb{R}}$ existe uma única isometria $\Psi \in Isom(\mathbb{H})$ tq $\Psi(a)=a'$, $\Psi(b)=b'$ e $\Psi(c)=c'$.

Prova Basta provar para $a'=0$, $b'=1$, $c'=\infty$

$$Isom^+(\mathbb{H}) \simeq \left\{ z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R},\ \alpha\delta-\beta\gamma>0 \right\}$$

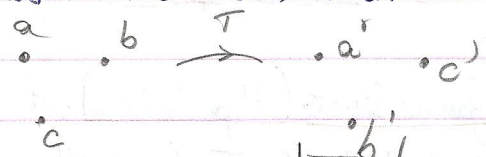
$$T(z) = \frac{z-a}{z-c} \cdot \frac{b-c}{b-a} \qquad \begin{array}{l} a \to 0 \\ b \to 1 \\ c \to \infty \end{array}$$

Se $\det(T)>0$, $\det(T)<0 \Rightarrow$ Tomar $\Psi = \overline{T}$

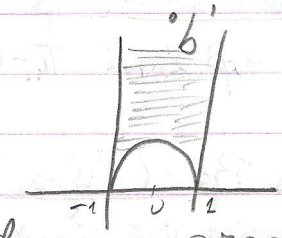
Demonstre a unicidade de T, isto é, se $\Psi \in Isom(\mathbb{H})$ e Ψ fixa 3 pontos em $\hat{\mathbb{R}} \Rightarrow \Psi =$ identidade

Lema $Möb(\hat{\mathbb{C}})$ é transitivo em triplas ordenadas e unicamente.

Prova $T(z) = \dfrac{z-a}{z-b} = \dfrac{c-b}{c-a}$

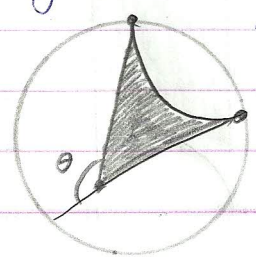


Corolário Todo triângulo ideal é isométrico a



$$\text{Área}: \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{-1}{y}\right)_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x \Big|_{-1}^{1} = \pi$$

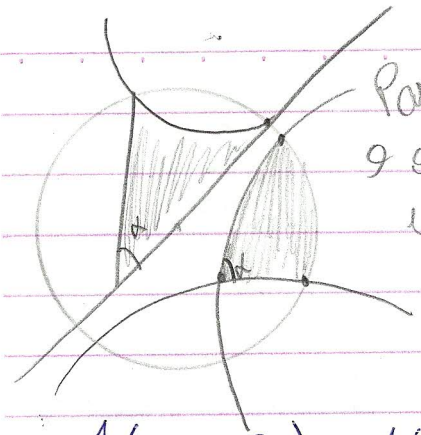
Triângulos 2/3 ideais, isto é apenas um vértice finito.



$A(\theta)$ = área do triângulo 2/3 ideais com ângulo interno $= \pi - \theta$.

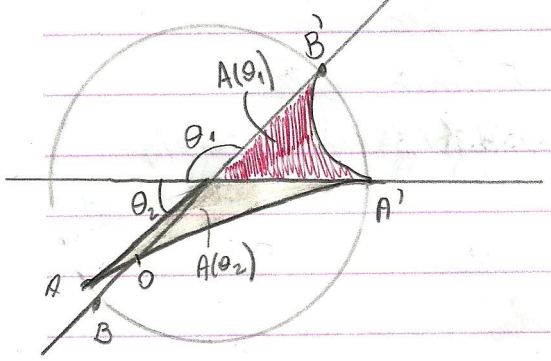
Todo triângulo 2/3 ideal com mesmo ângulo interno são isométrico

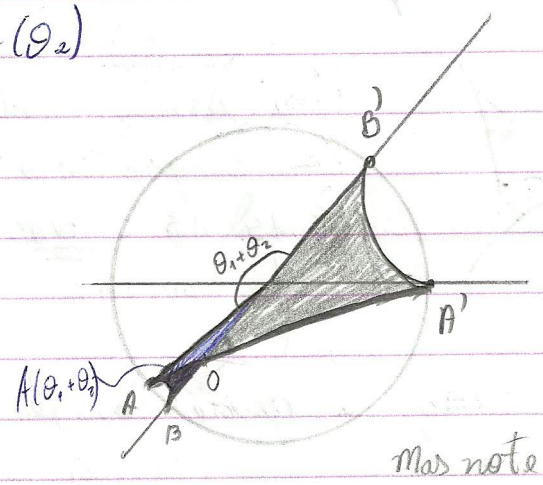
10/10/11



Passo de um para o outro através de uma isometria

$$A(\theta_1+\theta_2) = A(\theta_1) + A(\theta_2)$$





Mas note que $\triangle_{A\,O\,B}$ tem mesma área a que $\triangle_{B'\,O\,A'}$

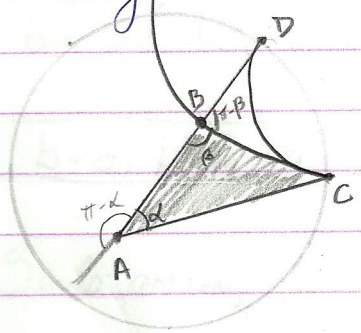
$\pi - \theta_1 + \theta_2$

Então $A(\theta_1+\theta_2) = A(\theta_1) + A(\theta_2)$

A é $\mathbb{Q}$-linear e contínua $\Rightarrow$ A é $\mathbb{R}$-linear e $A(\pi) = \pi \Rightarrow A(\theta) = \theta$

↳ Área do triângulo Ideal

Triângulo 1/3 ideal → 2 vértices finito



$$\text{Area}(ABC) = \text{Area}\,ACD - \text{Area}\,(BCD)$$

$$\pi - \alpha - (\cancel{\pi} - \cancel{\pi} + \beta)$$

$$\pi - \alpha - \beta = \pi - (\alpha + \beta)$$