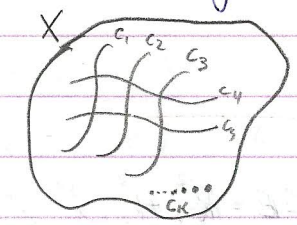
25/10/11

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi_2^{m_k}\varphi_1^{n_k}\varphi_2^{m_{k-1}} \cdots \varphi_2^{m_1}\varphi_1^{n_1}(X)}_{\neq Id} \cap X = \emptyset$$

01/11/11

- (X, d) espaço métrico
- R relação simétrica e reflexiva em X ($\Leftrightarrow$ R = coleção de subconjuntos (QUAISQUER) de X cuja união é X e $xRy \Leftrightarrow x, y \in$ mesmo conjunto de R)

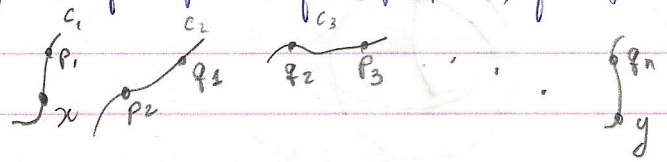


$$xRy \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in C_i \\ x = y \end{cases}$$

(Lembre que todo espaço métrico é Hausdorff)

Definimos R-cadeias de x a y é a sequência $\{(p_i, q_i)\}$

$$xRp_1,\ q_1Rp_2,\ q_2Rp_3,\ \ldots,\ q_iRp_{i+1},\ \ldots,\ q_nRy$$



$$L^R((p_i, q_i)) = \Sigma\, d(p_i, q_i)$$
$$d^R(x, y) = \inf\{L^R(p_i, q_i) : (p_i, q_i) \text{ é } R\text{-cadeia de } x \text{ a } y\}$$

<u>Lema</u>: d^R é uma semi-métrica, isto é, satisfaz todas as propriedades de uma métrica exceto possivelmente

$$d^R(x, y) = 0 \underset{\text{necessariamente}}{\not\Rightarrow} x = y$$

01 / 11 / 11

• A todo espaço semi-métrico está canonicamente associado um espaço métrico. (M, ρ) é semi-métrico:

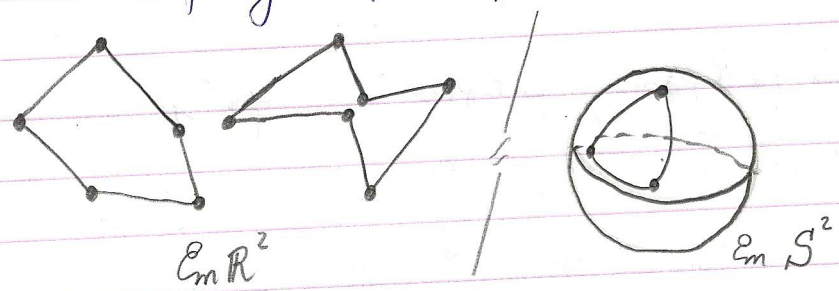
$$([M], d) = \{[x], d([x],[y]) = \rho(x,y)\}$$
$$[x] = \{x' : \rho(x, x') = 0\}$$

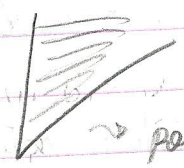
Def.: (X^R, d^R) é o espaço métrico associado a (X, d^R)

$$(X^R, d^R) = \{x^R \; d(x^R, y^R) = d^R(x,y)\}$$
$$(x^R) = \{x' : d^R(x, x') = 0\}$$

Situação especial na qual estamos interessados: $X \subseteq \mathbb{E} = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, S^2$ é um polígono e queremos colar lados de X.

X é um polígono, por exemplo:





→ polígonos com lados no infinito

Os lados são agrupados em pares $\{E_{2i-1}, E_{2i}\}$

01 / 11 / 11

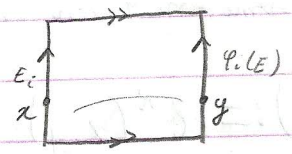
$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 : E_1 \longrightarrow E_2 \\ \varphi_3 : E_3 \longrightarrow E_4 \\ \vdots \\ \varphi_{2j-1} : E_{2j-1} \longrightarrow E_{2j} \end{array}\right\} \text{são isometrias.}$$

<u>Notação</u>: $\varphi_{2j} = (\varphi_{2j-1})^{-1}$

$$\varphi_{2j-1} : E_{2j-1} \longrightarrow E_{2j}$$
$$(\varphi_{2j-1})^{-1} : E_{2j} \longrightarrow E_{2j-1}$$
$$\overset{\shortparallel}{\varphi_{2j}}$$

<u>R definida em X</u>

$$xRy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \varphi_i(y) \text{ para algum } i \end{cases}$$



Note que $x = \varphi_i(y) \Leftrightarrow y = \varphi_{i+1}(x)$

$\varphi_i^{-1}(x) = y$ mas $\varphi_i^{-1} = \varphi_{i+1}$

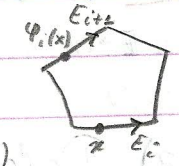
Podemos tornar R uma equivalencia por transitividade

(i) se $x \in \mathring{X}$ então xRx apenas

↳ interior de X

fronteira de X ↳

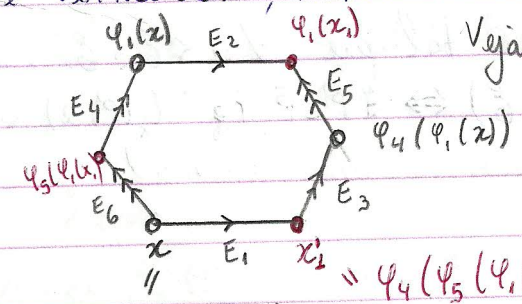
(ii) se $x \in \partial X$ mas não é o vértice então $\begin{cases} xRx \\ xR\varphi_i(x) \end{cases}$ e só, onde $x \in E_i$



(iii) x é vértice de X, isto é $x \in E_i \cap E_j$, $i \neq j$

Veja que $\varphi_1(x) \in (E_2 \cap E_4)$

$\varphi_4(\varphi_1(x)) \in (E_5 \cap E_3)$



$x_1' = \varphi_4(\varphi_5(\varphi_1(x_1)))$

$x = \varphi_5(\varphi_4(\varphi_1(x)))$

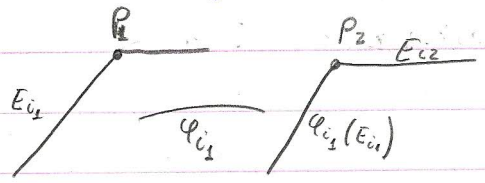
$x = x_1 R x_2 R x_3 R \ldots R x_n R x_1$

01 / 11 / 11

Em geral, se P é vértice escolha $E_{i_1} \ni P_1$

$P_2 = \varphi_{i_1}(P_1)$ e E_{i_2} é o outro lado ($\neq \varphi_{i_1}(E_{i_1})$) que contém $\varphi_{i_1}(P_1)$

Verifique que vai voltar no P_1



$$\bar{X} = \{[x] : \text{onde } \bar{x} = [x] = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathring{X} \\ x, \varphi_i(x) & \text{se } x \in E_i \text{ e não é vértice} \\ x_1, x_2, \dots, x_n & \text{como acima se } x \text{ é vértice} \end{cases}$$

$\bar{d}$ é a semi-métrica induzida em $\bar{X}$ (que, já vamos provar, é uma métrica).

$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) := d^R(x,y) = \inf$ do comprimento das R-cadeias de x a y

<u>Lema (simples)</u>: $\bar{d}$ é uma semi-métrica (Verifique)

<u>Lema (1)</u>: $\bar{d}$ é uma métrica, isto é, $\bar{d}(\bar{P}, \bar{Q}) = 0 \Rightarrow \bar{P} = \bar{Q}$

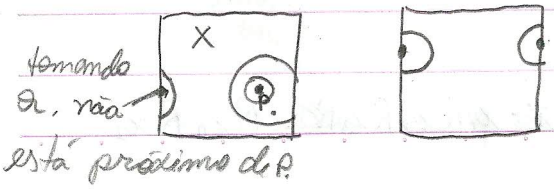
$\Downarrow$

<u>Teorema</u>: Se os ângulos "<u>estão certos</u>" $\Rightarrow (\bar{X}, \bar{d})$ é localmente isométrico a $\mathbb{E} \to (\mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, S^2)$

somam 2π

<u>Lema (2)</u>: Dado $\bar{P} \in \bar{X}$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, um ponto $Q \in X$ é tal que $\bar{Q} \in B_{\bar{d}}(\bar{P}, \varepsilon) \Leftrightarrow \exists\, P' \in \bar{P}$ tq $d_X(P', Q) < \varepsilon$

(O polígono $i\,X$, quando associamos os lados, temos $\bar{X}$)

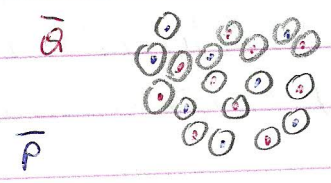


01/11/11

Lema (2) $\Rightarrow$ Lema (1)

Se $\bar{P} \neq \bar{Q}$ vamos mostrar que a $\bar{d}(\bar{P},\bar{Q}) > 0$.

Como $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ são conj. finitos, existe $\varepsilon > 0$ tq as ε_1-bolas em X centradas em todos os pontos de $\bar{P}$ e aquelas centradas em ptos de $\bar{Q}$ são todas disjuntas



Tome $\varepsilon < \varepsilon_1$ e $\varepsilon < \varepsilon_0(P) \Rightarrow$ $\bar{d}(\bar{P},\bar{Q}) < \varepsilon$ implicaria, pelo lema (2) que existe $d(Q', P') < \varepsilon$. ↯ Contradição

Lema 1 - Dem.

Sabendo que $\pi : X \to \bar{X}$ é a projeção $\Rightarrow \bar{d}(\bar{x},\bar{y}) < d(x,y)$

($\Leftarrow$) Se $d(P', Q) < \varepsilon \Rightarrow \bar{d}(\bar{P},\bar{Q}) < \varepsilon$

Suponha que $\boxed{\bar{d}(\bar{Q},\bar{P}) < \varepsilon_0}$. Mostrar que existe P' próximo de Q com $P' \in \bar{P}$.

$\bar{d}(\bar{Q},\bar{P}) < \varepsilon \Leftrightarrow$ existe uma R-cadeia

$P = P_1, Q_1 R P_2, Q_2 R P_3, \ldots, Q_{n-1} R P_n, \quad Q_n = Q$

(Não confunda P_i, Q_i com as classes de P e Q, estes são $P', P'', \ldots$)

$\sum d(P_i, Q_i) < \varepsilon$

Vamos provar por indução, tendo escolhido "ε-pequeno", $\forall i \leq j \leq n$

(*) existe $P' \in \bar{P}$ tq $d(P', Q_j) \leq \sum_{i=1}^{j} d(P_i, Q_i)$

Note que $j = 1$ é trivial, $P' = P$.

Caso 1: $P \in \mathring{X} \Leftrightarrow \bar{P} = \{P\}$

Escolhemos $\varepsilon_0(P)$ tq $B_X(P, \varepsilon_0) \subseteq \mathring{X}$

Se $\exists P' \in \bar{P}$ tq $d(P', Q_j) \leq \sum_{i=1}^{j} d(P_i, Q_i) \Rightarrow P' = P \Rightarrow$

01 / 11 / 11

$\Rightarrow d(P, Q_j) \leq \sum d(P_j, Q_j) < \varepsilon \Rightarrow d(P, Q_{j+1}) \leq d(P, Q_j) + \underset{P_j}{\underset{\parallel}{d(Q_j, Q_{j+1})}}$

$$\leq \sum_{i=1}^{j} d(P_i, Q_i) + d(P_{j+1}, Q_{j+1}) = \sum_{i=1}^{j+1} d(P_i, Q_i)$$

<u>Caso 2</u>: $P \in E_i$ mas não é o vértice

$\overline{P} = \{P, \varphi_i(P)\}$. Escolhemos $\varepsilon_0 > 0$ tq $B_X(P, \varepsilon_0) \cup B_X(\varphi_i(P), \varepsilon_0)$ não intercepta o bordo de X exceto em E_i, $\varphi_i(E_i)$ e não contenha o vértice.

Pela Hip. de Indução

Existe $P' \in \overline{P}$ tq $d(P', Q_j) \leq \sum_{i=1}^{j} d(P_i, Q_i) < \varepsilon$

$\Rightarrow Q_j$ está em X ou em E_i ou $\varphi_i(E_i)$

Se $P_{j+1} = Q_j \Rightarrow$ Prova igual a anterior.

Se $P_{j+1} = \varphi_i^{\pm 1}(Q_j)$, defina $\underline{P'' = \varphi_i^{\pm 1}(P')}$

$d(P'', Q_{j+1}) \leq \underline{d(P'', P_{j+1})} + d(P_{j+1}, Q_{j+1})$

Pq $\varphi_i^{\pm 1}$ ser isometria, $= \underline{d(P', Q_j)} + d(P_{j+1}, Q_{j+1})$

$$\leq \sum_{i=1}^{j+1} d(P_i, Q_i)$$

O Caso 3, onde, P é vértice é parecido com o caso 2, basta ir definindo P', P'', P''', tanto quantos forem necessários.