Física I para Oceanografia
FEP111 (4300111)

2º Semestre de 2011

Instituto de Física- Universidade de São Paulo

Aula – 10 Rolamento e momento angular

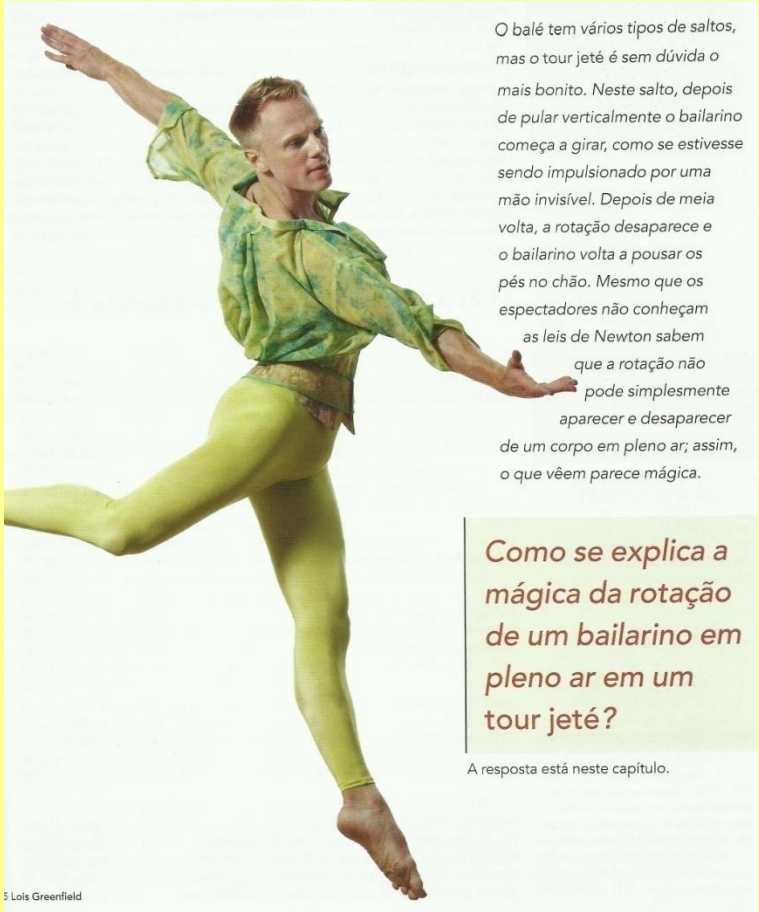
Professor: Valdir Guimarães

E-mail: valdir.guimaraes@usp.br
Fone: 3091.7104

Rolamento e momento angular

Rolamento descreve o movimento de carros, bicicletas e outros ...

Momento angular é um conceito útil para se entender a física das rotações.

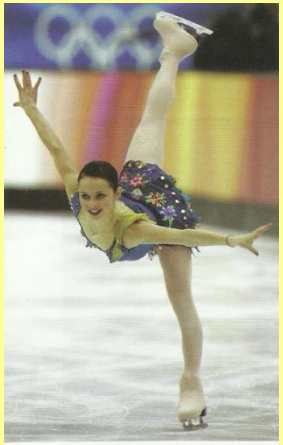


O balé tem vários tipos de saltos, mas o tour jeté é sem dúvida o mais bonito. Neste salto, depois de pular verticalmente o bailarino começa a girar, como se estivesse sendo impulsionado por uma mão invisível. Depois de meia volta, a rotação desaparece e o bailarino volta a pousar os pés no chão. Mesmo que os espectadores não conheçam as leis de Newton sabem que a rotação não pode simplesmente aparecer e desaparecer de um corpo em pleno ar; assim, o que vêem parece mágica.

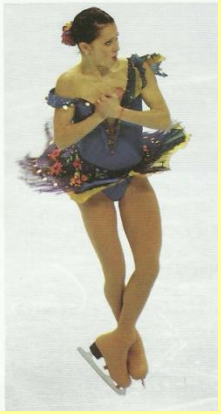
Como se explica a mágica da rotação de um bailarino em pleno ar em um tour jeté?

A resposta está neste capítulo.

5 Lois Greenfield

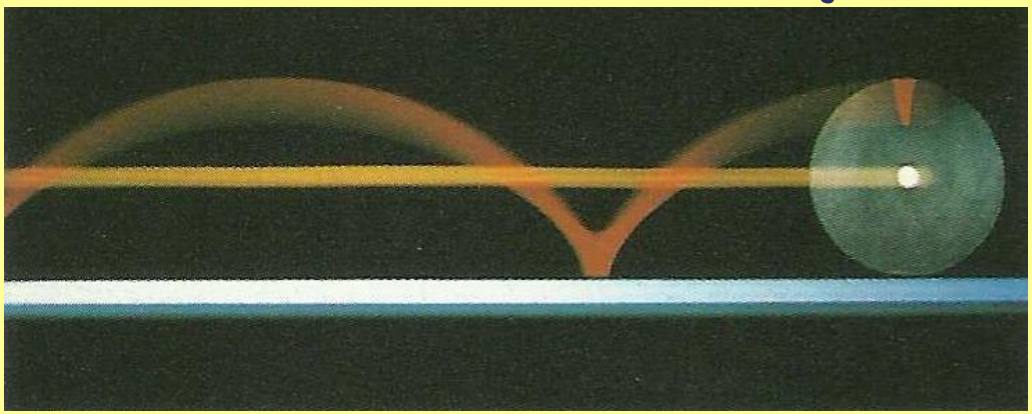


(a)

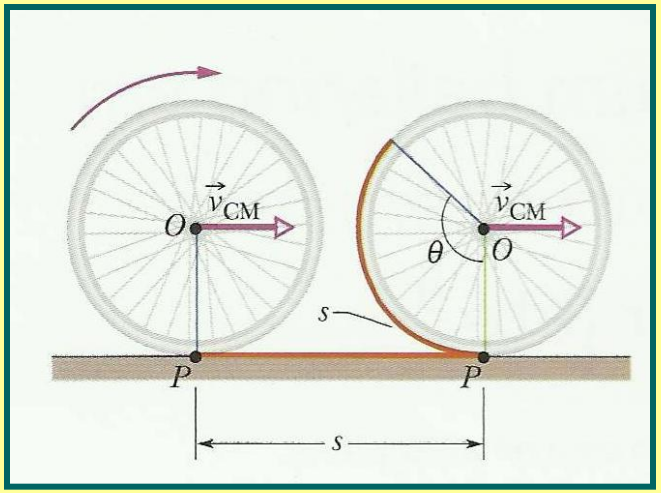


Rolamento sem deslizamento

Rolamento é a mistura do movimento de translação do centro de massa mais o movimento de rotação.



No Rolamento sem deslizamento cada ponto toca apenas uma vez no chão e a translação acompanha a rotação.



$$dS = d\theta\, r \qquad S = 2\pi\, r$$

Condição para que não haja deslizamento

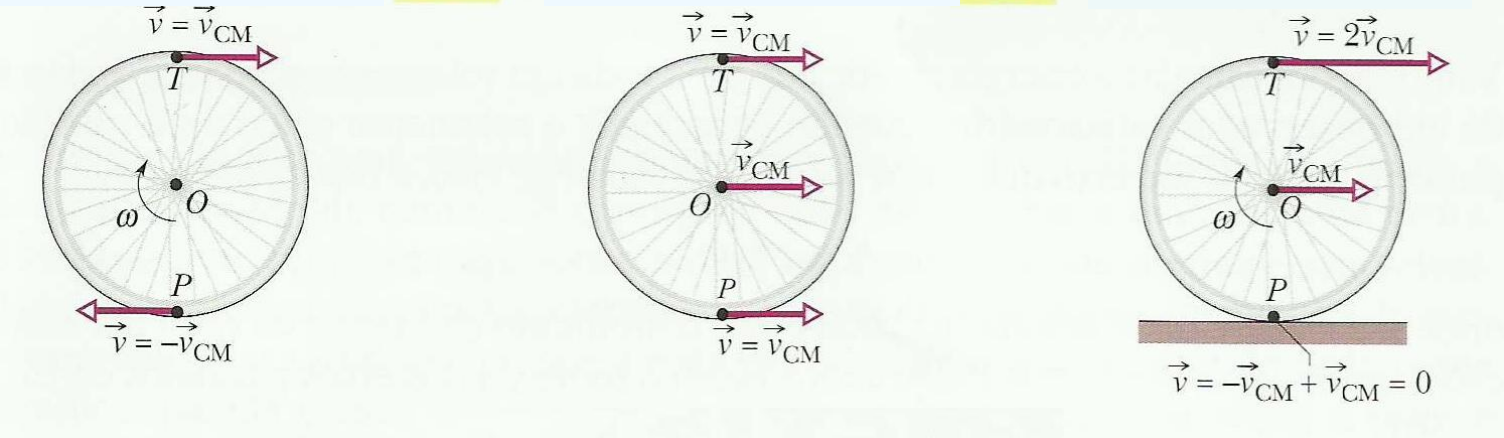
$$v_{CM} = \omega\, r$$

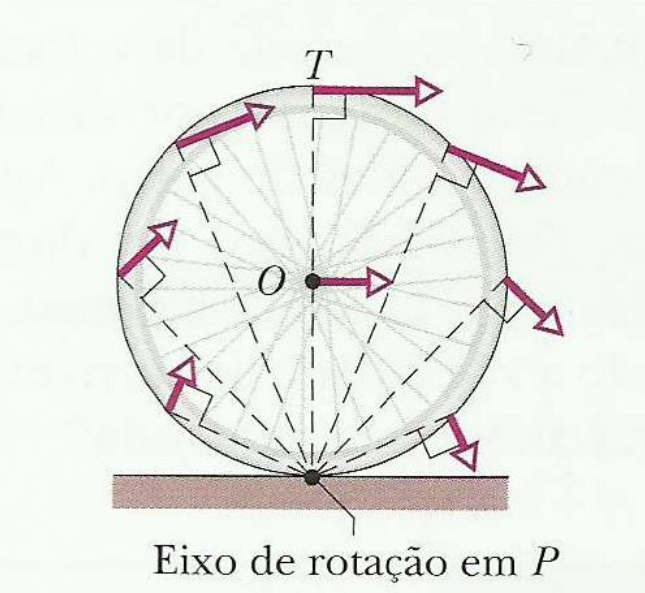
Velocidade de translação

Velocidade de rotação

Velocidades no movimento de rolamento

Rotação pura + **translação pura** = **rolamento**

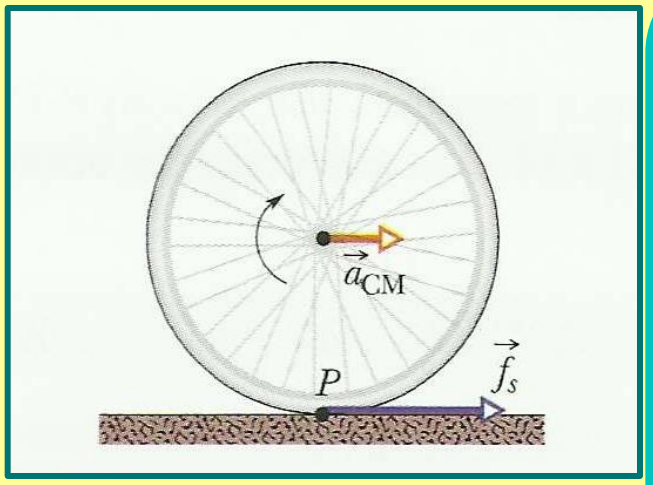


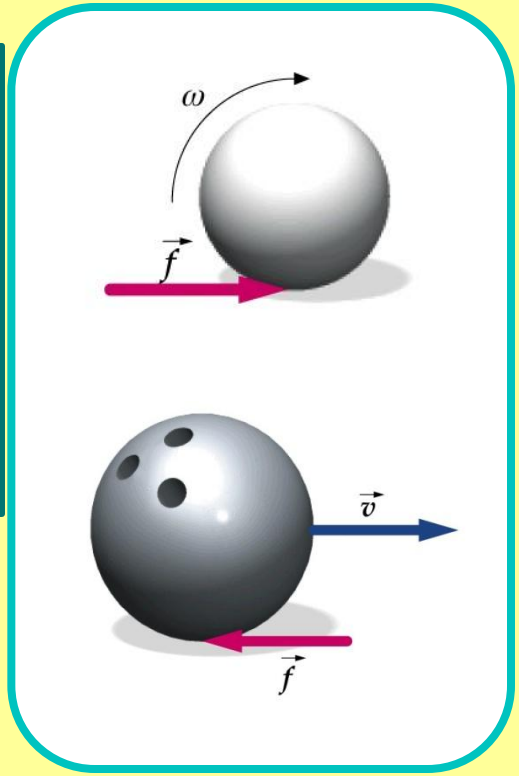


Dinâmica do rolamento

Sem atrito = deslizamento

Com atrito = rolamento





Portanto o atrito é a força responsável pelo movimento de rolamento.

Equação para rotação.

$$\tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_{atrito} r$$

Equação para translação.

$$F_{ext} = m a_{cm}$$

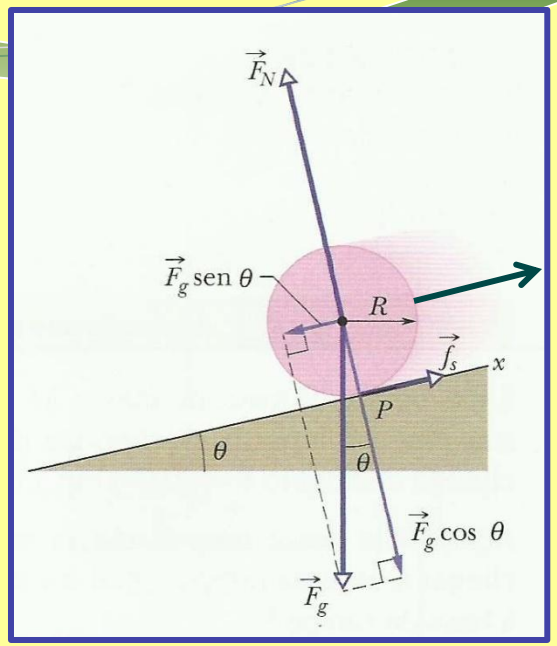
Com

$$a_{cm} = r\alpha$$

Quando temos atrito estático (sem deslizamento no ponto de contato) se considera que não há perda de energia no sistema, ou seja, que o sistema é conservativo. Isto é aproximadamente correto.

Rolamento sem deslizamento

Exemplo: Uma bola de boliche, com 11 cm de raio e 7,2 kg, rola sem deslizar a 2,0 m/s . Ela continua a rolar sem deslizar, ao subir uma rampa até a altura h, quando atinge o repouso. Determine h.



- Atrito estático
- Não há perda de energia
- Sistema conservativo.

Não existem forças externas e nem forças internas dissipativas.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + W_{nc} \qquad 0 = \Delta E_{mec} + 0$$

Energia Mecânica se conserva.

$$U_f + K_f = U_i + K_i$$

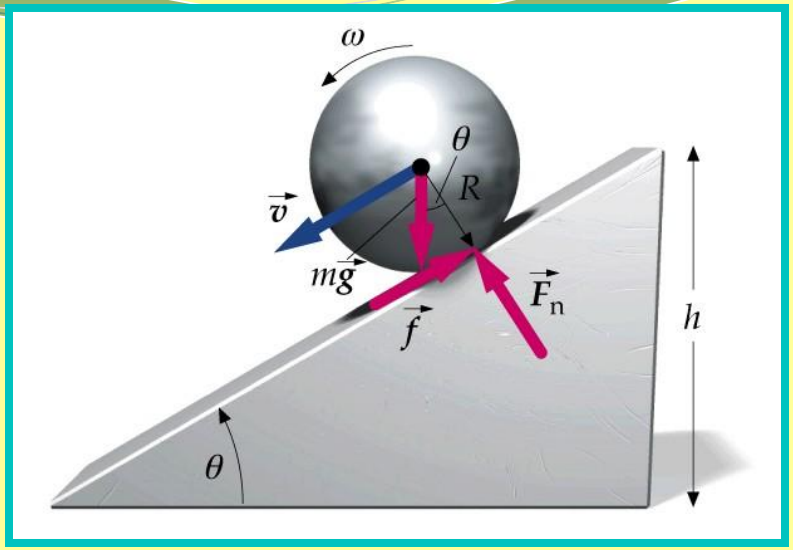
$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v_{cm_i}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_i^2$$

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

$$h = \frac{7 v_{cm_i}^2}{10 g} = 29 cm$$

Rolamento sem deslizamento – plano inclinado

Uma bola maciça, de raio R e massa m, desce rolando um plano inclinado com ângulo θ, sem deslizar. Determine a força de atrito e a aceleração do centro de massa.



Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação).

Rotação: $\tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_{ext}R$

Translação: $F_{ext} = ma_{cm}$

Com $\begin{cases} v_{cm} = R\omega \\ a_{cm} = R\alpha \end{cases}$

$$\tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_{at}R$$

$$F_{at} = \frac{I_{cm}}{R^2}a_{cm}$$

$$F_{res} = mg\sin\theta - F_{at} = ma_{cm}$$

$$mg\sin\theta - \frac{I_{cm}a_{cm}}{R^2} = ma_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}}$$

Rolando de um plano inclinado, quem chegaria primeiro?

esfera

cilindro

anel

$$esfera \rightarrow I_{cm} = \tfrac{2}{5} MR^2$$

$$cilindro \rightarrow I_{cm} = \tfrac{1}{2} MR^2$$

$$anel \rightarrow I_{cm} = MR^2$$

$$genericamente \rightarrow I_{cm} = Mk^2 \quad \Rightarrow \quad a_{cm} = \frac{g \sin\theta}{1 + \dfrac{I_{cm}}{mR^2}} = \frac{g \sin\theta}{1 + \dfrac{k^2}{R^2}}$$

$$\frac{1}{1 + \dfrac{k^2}{R^2}} =$$

0.5 para anel

0.66 para cilindro

0.71 para esfera

Portanto esfera chega primeiro ! ! !

Qual seria o maior ângulo para que não houvesse deslizamento ?

$$\tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_{at}R$$

$$a_{cm} = r\alpha$$

$$F_{at} = \frac{I_{cm}}{R^2} a_{cm}$$

Usando que:

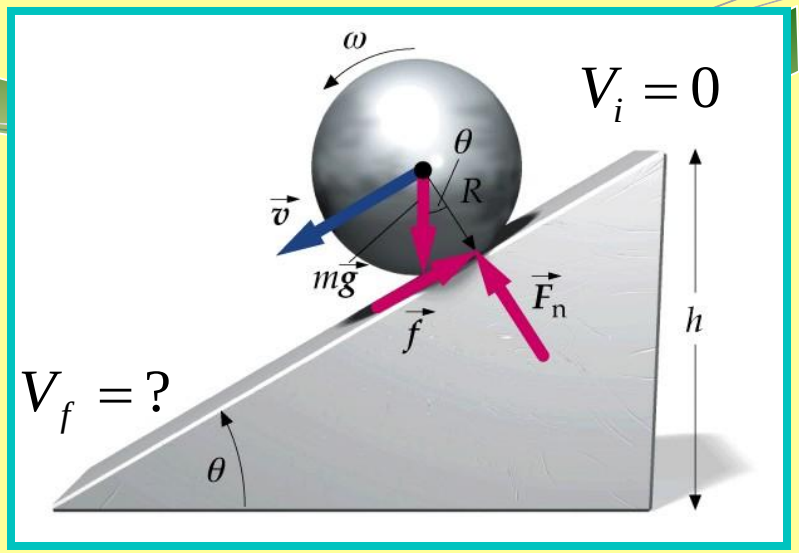
$$\begin{cases} I_{cm} = Mk^2 \\ a_{cm} = \dfrac{g\sin\theta}{1+\dfrac{k^2}{R^2}} \end{cases}$$

$$F_{at} = \frac{I_{cm}}{R^2} a_{cm} = \frac{Mk^2}{R^2}\frac{gsen\theta}{(1+\frac{k^2}{R^2})} = Mgsen\theta\frac{k^2}{(R^2+k^2)}$$

Por outro lado: $F_{at} = \mu_e N = \mu_e Mg\cos\theta$

$$Mgsen\theta\frac{k^2}{(R^2+k^2)} = \mu_e Mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad tg\,\theta = \frac{(R^2+k^2)}{k^2}\mu_e$$

Qual a velocidade e energia cinética no final da rampa ?



$$h = \Delta S sen\theta$$

$$V_f^{\,2} - V_i^{\,2} = 2a\Delta S$$

$$V_f^{\,2} = 2\frac{gsen\theta}{(1+\frac{k^2}{R^2})}\frac{h}{sen\theta} = \frac{2gh}{(1+\frac{k^2}{R^2})}$$

Energia cinética no final da rampa.

$$T = \tfrac{1}{2}MV_f^{\,2} + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Usando que:

$$\begin{cases} I_{cm} = Mk^2 \\ V = \omega R \end{cases}$$

$$T = \tfrac{1}{2}MV_f^{\,2}(1+\tfrac{k^2}{R^2})$$

Substituindo o valor da velocidade.

$$T = \tfrac{1}{2}M\frac{2gh}{(1+\frac{k^2}{R^2})}(1+\tfrac{k^2}{R^2}) = Mgh$$

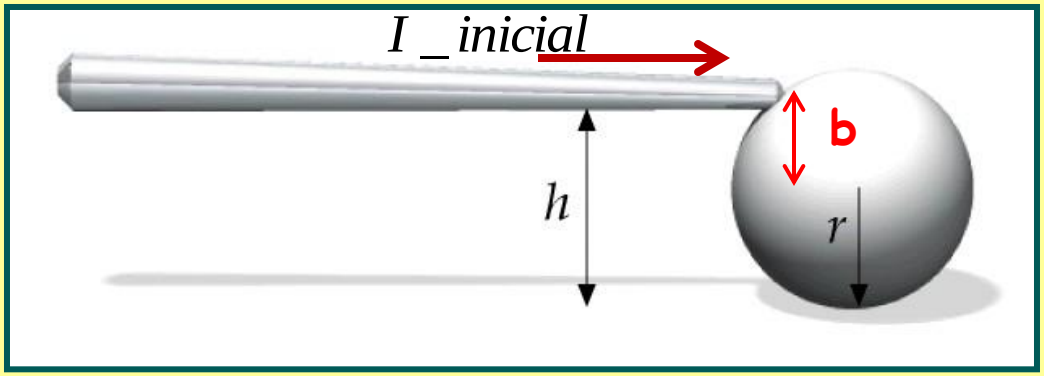
Energia cinética final = Energia potencial

Mas e a energia dissipada pelo atrito ?

Força de atrito não realiza trabalho porque no ponto de contato não há deslocamento. Força de atrito apenas converte parte a energia de translação em rotação.

Bola de Sinuca

Um taco atinge uma bola de bilhar em um ponto a uma distância b acima do centro da bola. Determine o valor de d para que a bola role, sem deslizar.



b = parametro de impacto

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Impulso inicial do taco:

$$I_{inicial} = F\Delta t = \Delta P = MV_f - MV_i$$

$$F\Delta t = MV_{cm}$$

$$\tau\Delta t = I_{cm}\omega$$

Taco dá uma velocidade inicial de translação e rotação.

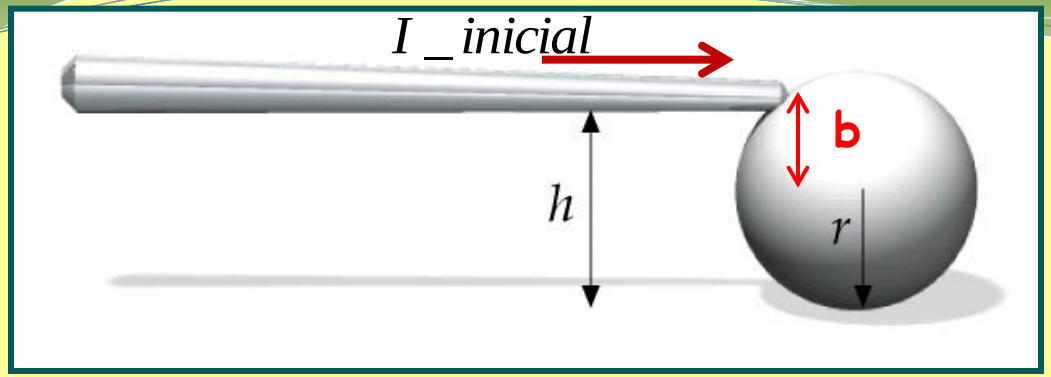
Para rolamento sem deslizamento

Rotação: $\tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_{ext}R$

Translação: $F_{ext} = ma_{cm}$

Com $\begin{cases} v_{cm} = R\omega \\ a_{cm} = R\alpha \end{cases}$

Rolamento - Momento angular



b = parametro de impacto

$$\tau \Delta t = I_{cm}\omega$$

Usando que:

$$\tau = -Fb$$

$$I_{cm} = \tfrac{2}{5}MR^2$$

$$F\Delta t = MV_{cm}$$

Sentido horário torque negativo

$$-Fb\Delta t = \tfrac{2}{5}MR^2\omega$$

$$-bF\Delta t = \tfrac{2}{5}MR^2\omega$$

$$-bMV_{cm} = \tfrac{2}{5}MR^2\omega \Rightarrow \omega = -\tfrac{5}{2}\frac{bV_{cm}}{R^2}$$

Velocidade angular no sentido horário

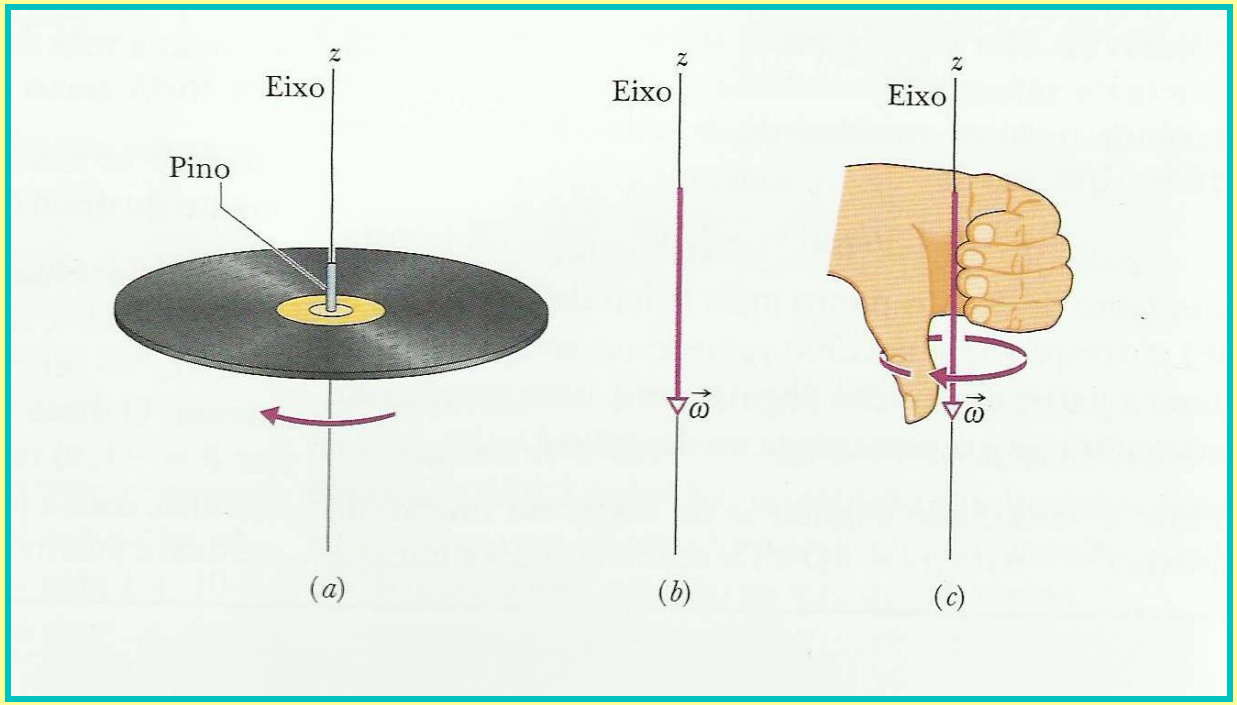
Para que a bola role sem deslizar

$$V_{cm} = R\omega$$

$$\omega = \tfrac{5}{2}\frac{bR\omega}{R^2} \Rightarrow \boxed{b = \tfrac{2}{5}R}$$

A natureza vetorial da rotação

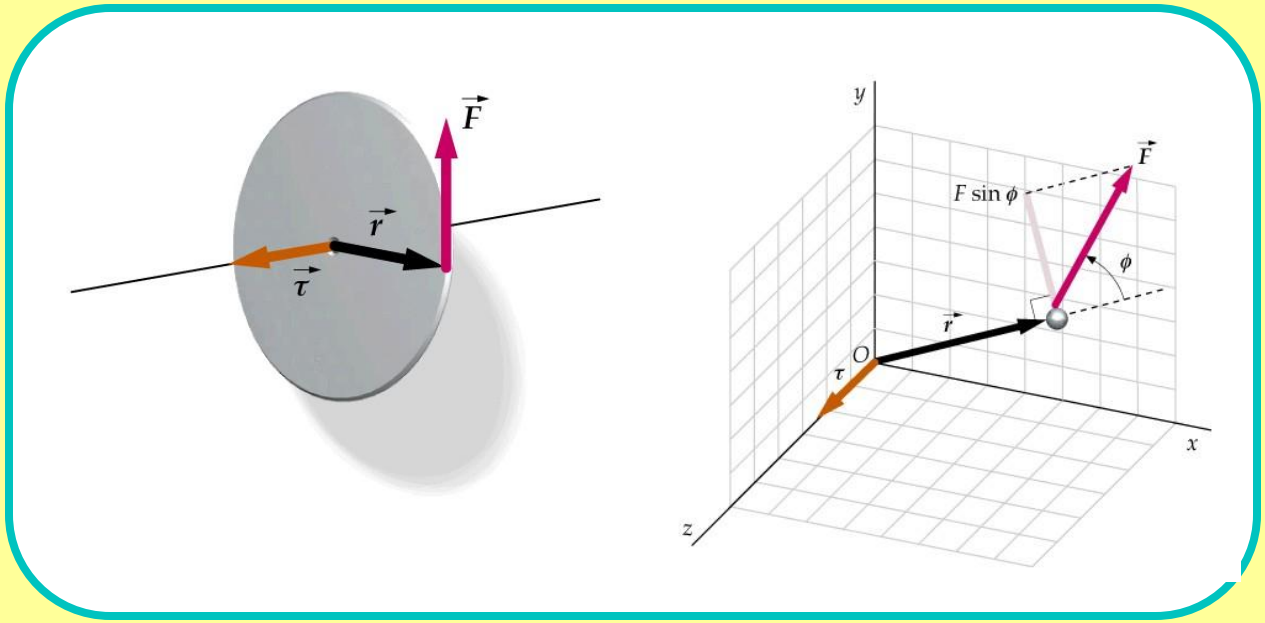
Agora, vamos considerar os casos em que o eixo de rotação pode alterar a sua direção. Isto explicita a natureza vetorial da rotação. Definimos a direção do vetor velocidade angular como perpendicular ao plano de rotação e o sentido dado pela regra da mão direita.



A natureza vetorial do Torque

A definição mais completa do torque é dada em termos do produto vetorial

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Torque é um vetor perpendicular ao plano formado pelos vetores r e F

$$\tau = r\,F sen\phi$$

Momento Angular

O momento angular desempenha o mesmo papel na rotação que o momento linear desempenha na translação.

Na translação temos:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

definição de Newton para a sua segunda lei.

Por analogia à quantidade de movimento linear podemos também escrever

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$$

Definimos a Quantidade de Movimento Angular (ou Momento Angular) em relação à origem, como sendo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

segunda lei de Newton na rotação.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

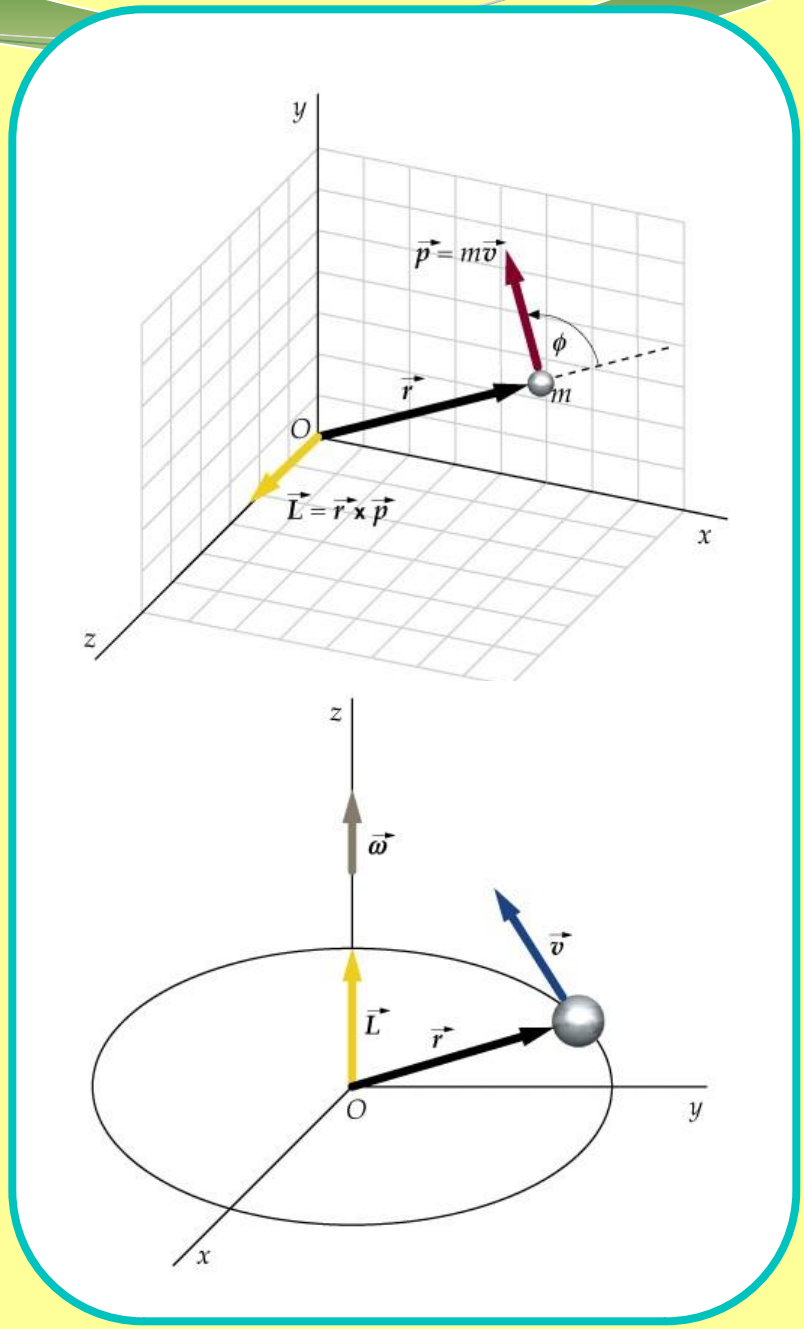
Momento Angular

A figura ao lado, mostra uma partícula de massa m, na posição r, se movendo com uma velocidade v. Ela possui uma quantidade de movimento linear

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Definimos o Momento Angular em relação à origem, como sendo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



Momento Angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

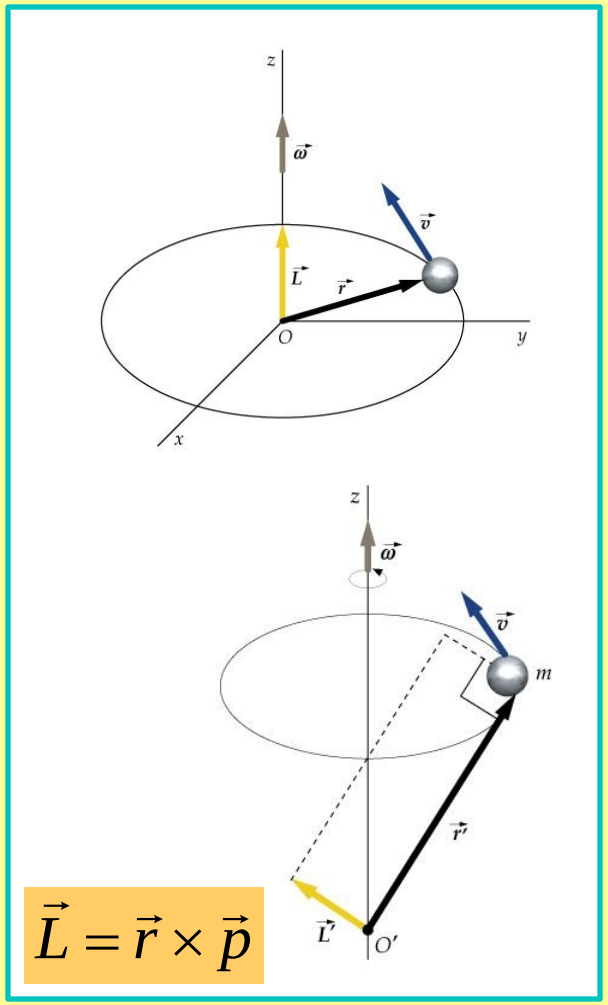
Por analogia à quantidade de movimento linear

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

podemos também escrever $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Porém, se mudarmos a origem do sistema de coordenadas, em relação ao plano da órbita, obtemos um novo valor de L que não é paralelo a ω.

Isto indica que a última definição não é universal.

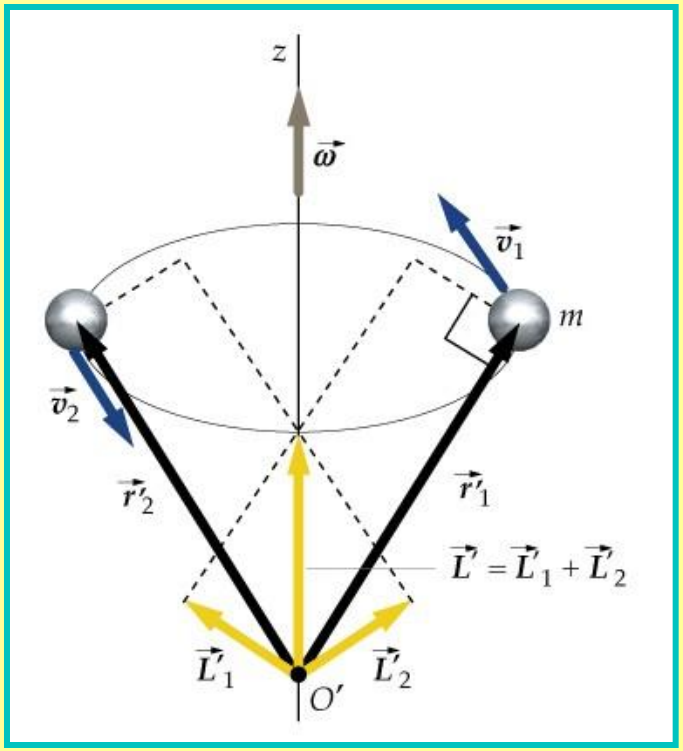


Momento Angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

No entanto, se tivéssemos duas massas simétricas em relação ao eixo z, L seria paralelo a ω.

Isto mostra que a última definição é válida apenas quando temos simetria em relação ao eixo de rotação.



$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Mais analogias

A segunda lei de Newton para a translação pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{sis}}{dt}$$

A segunda lei de Newton para a rotação pode ser escrita em termos do torque e momento angular como:

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{sis}}{dt}$$

Para corpos pequenos e partículas é mais prático usarmos:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad L = r\,mv$$

Para corpos extensos girando usamos:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad L = I\omega$$

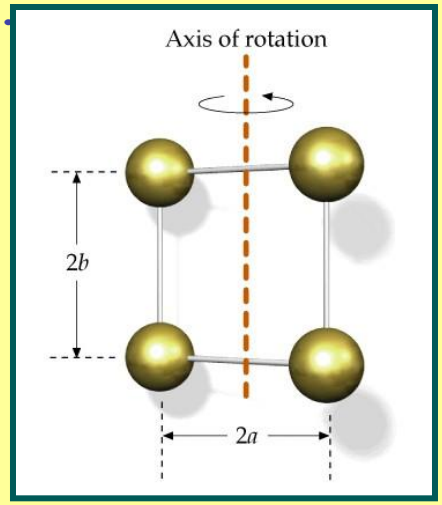
momento de inércia (I) de uma partícula

$$I = m_i r_i^2$$

Energia Cinética Rotacional

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Um corpo consiste de 4 partículas pontuais, com massas m, ligadas por hastes sem massa, como na figura ao lado. O sistema gira com velocidade angular ω em torno do centro do corpo. (a) Determine o momento de inércia do corpo. (b) Determine a energia cinética do corpo.



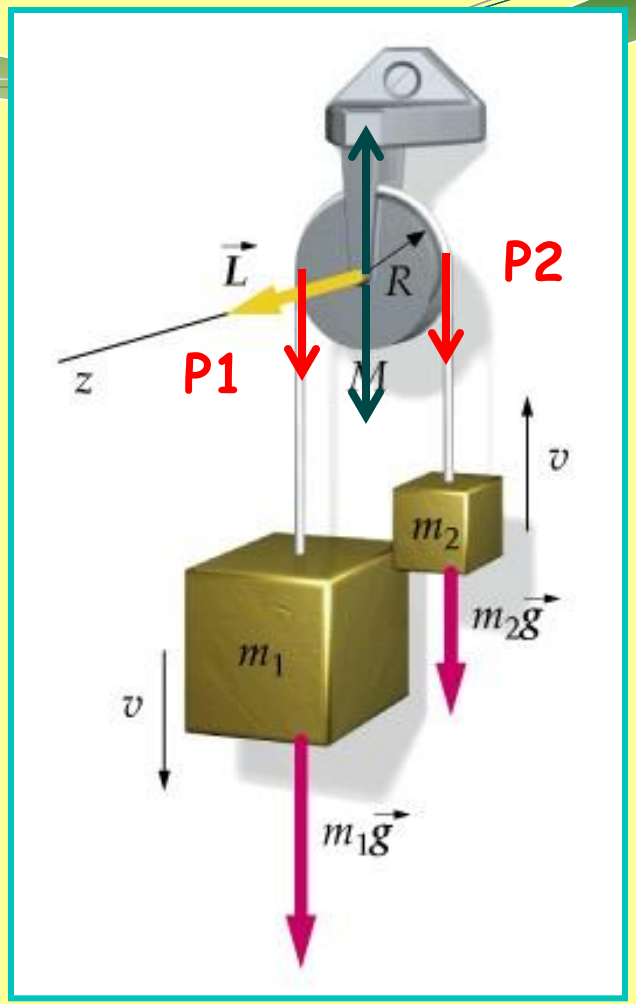
$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2 \right) \Rightarrow I = 4ma^2$$

Energia Cinética Rotacional

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow K = 2ma^2\omega^2$$

Rolamento - Momento angular

Uma polia sem atrito nos mancais, tem dois blocos, de massas m1 > m2, ligadas por um fio de massa desprezível. A polia é disco de massa M e raio R. Determine a aceleração dos blocos.



Vamos fixar o sistema de coordenadas no eixo da polia, com o eixo z paralelo ao eixo da polia.

$$\vec{L}_{total} = \vec{L}_p + \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

Como os vetores torque, velocidade angular e momento angular são paralelos ao eixo z, podemos tratar este problema, como unidimensional e trabalhar escalarmente.

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1$$

$$L_1 = r_1 p_1 sen\varphi = Rm_1 v$$

$$L_z = L_p + L_1 + L_2$$

$$L_z = I\omega + Rm_1 v + Rm_2 v$$

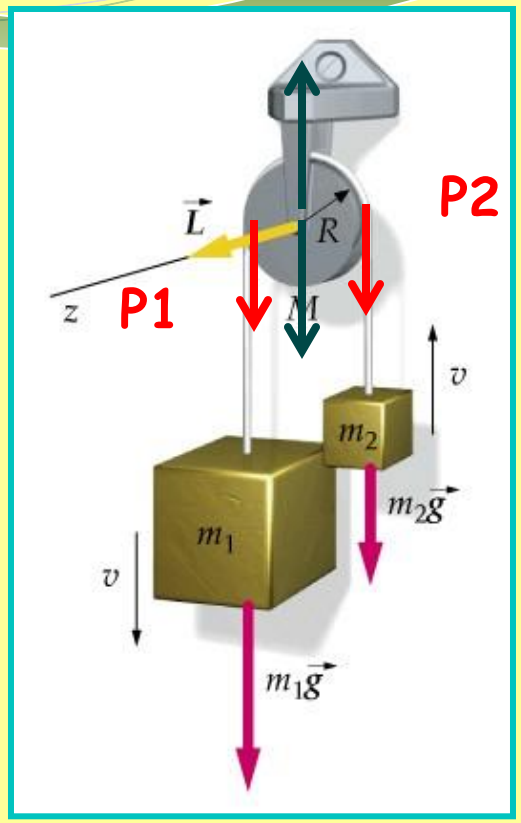
Rolamento - Momento angular

$$\tau_{ext} = \tau_n + \tau_g + \tau_{P1} + \tau_{P2}$$

$$\tau_{ext} = m_1 gR - m_2 gR$$

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad L_z = I\omega + Rm_1 v + Rm_2 v$$

$$\tau_{ext} = \frac{dL}{dt} = I\alpha + (m_1 + m_2)aR$$



Usando que:

$$\boxed{a = R\alpha \qquad I = \tfrac{1}{2} MR^2}$$

$$m_1 gR - m_2 gR = \tfrac{1}{2} MR^2 \frac{a}{R} + (m_1 + m_2)aR$$

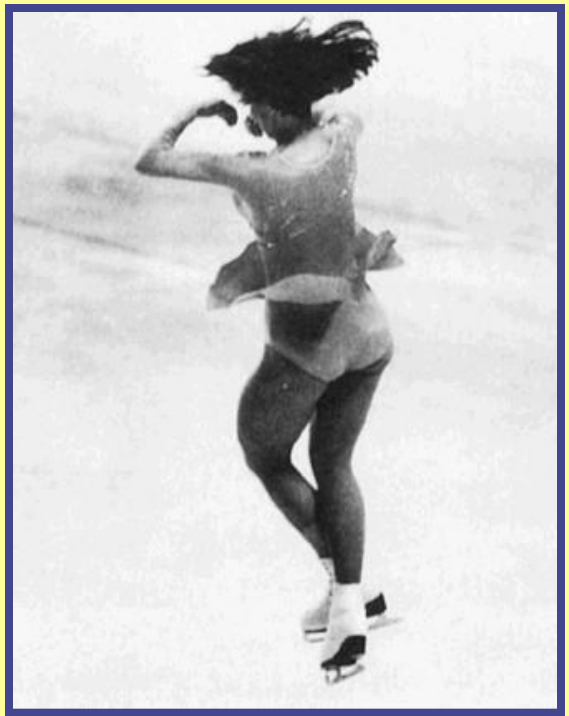
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g$$

Conservação do Momento Angular

Quando o torque externo resultante sobre um sistema é nulo, temos:

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{sis} = cte$$

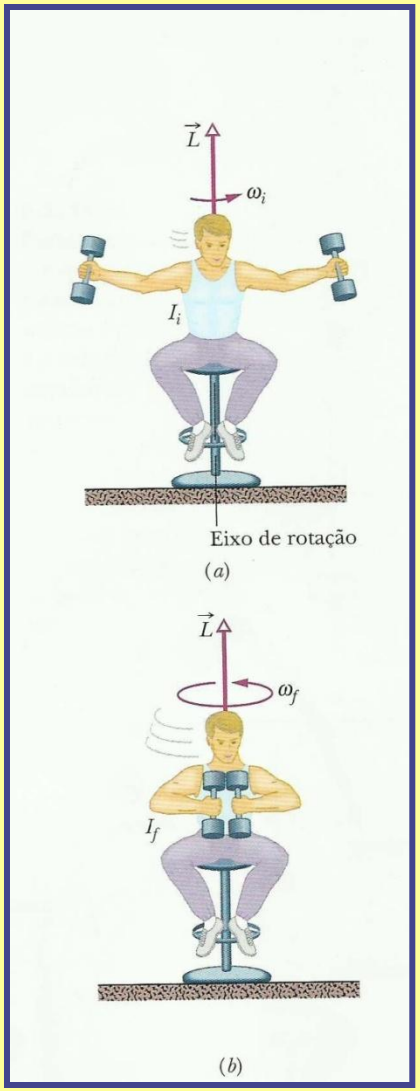
Assim para sistemas isolados e sem torque externo temos a Conservação do Momento Angular do sistema.



$$L_i = L_f$$

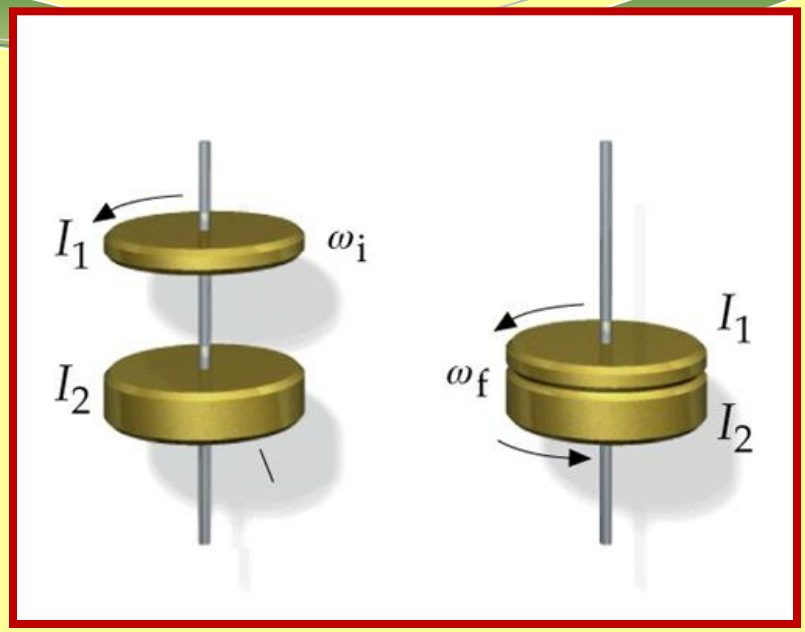
$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

O peso não gera torque em relação ao eixo que passa pelo centro de massa.



Discos sobrepostos

O disco 1 gira livremente com velocidade angular ω_i. Seu momento de inércia é I_1. Ele cai sobre o disco 2, com momento de inércia I_2, que está em repouso. Devido ao atrito cinético, os dois discos tendem a ter a mesma velocidade. Determine ω_f



Temos a Conservação do Momento Angular do sistema.

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_i = L_f = cte$$

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

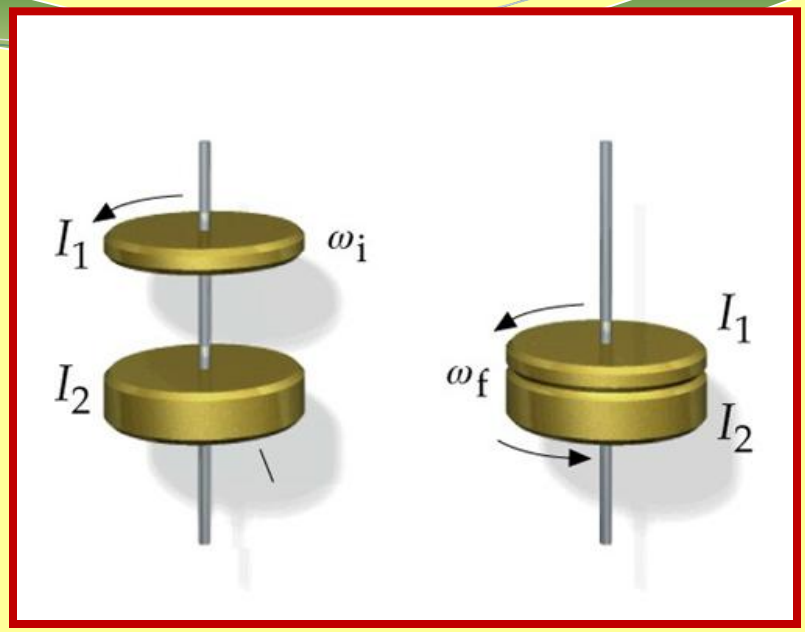
$$I_1 \omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$

Energia

Podemos escrever a Energia Cinética de Rotação como:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}$$



Vamos verificar a conservação da energia cinética

$$K_i = \tfrac{1}{2} I_1 \omega_i^{\,2}$$

$$K_f = \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2{}_f \quad \text{se} \quad \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$

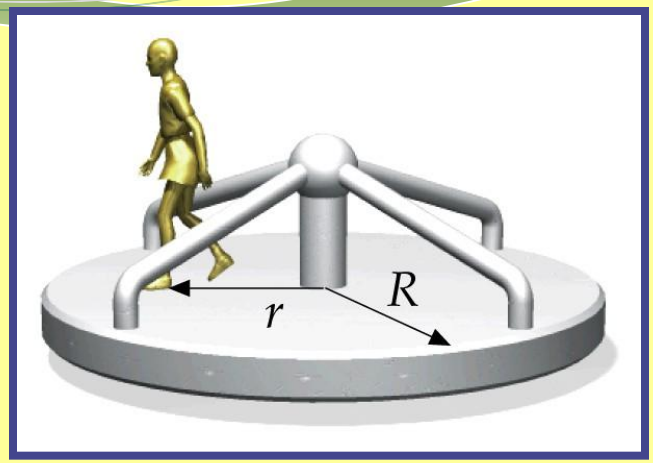
$$K_f = \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)\left(\frac{I_1}{I_1 + I_2}\right)^2 \omega^2{}_i = \tfrac{1}{2}\left(\frac{I_1^{\,2}}{I_1 + I_2}\right)\omega^2{}_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K_f}{K_i} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

Portanto, a Energia Cinética não se conservou e nem a energia mecânica.

Rolamento - Momento angular

Um parque possui um pequeno carrossel de 3,0 m de diâmetro e 130 kg.m² de momento de inércia. Cinco colegas se colocam próximo à borda, com o carrossel girando a 20 rpm. Quatro dos colegas se movam rapidamente para o centro do carrossel (r= 30 cm). Se a aceleração centrípeta necessária para atirar o quinto colega para fora do carrossel é de 4g, determine se este foi arremessado. (a massa de cada colega é 60 kg)



Como o torque externo em relação ao eixo do carrossel é nulo, há conservação da quantidade de movimento angular

$$I_i = 5mR^2 + I_{carr}$$

$$I_i = 805 kg.m^2$$

$$I_f = mR^2 + 4mr^2 + I_{carr}$$

$$I_f = 287 kg.m^2$$

$$L_f = L_i \Rightarrow I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

$$\omega_i = 20{,}0 rpm = 2.09 rad/s$$

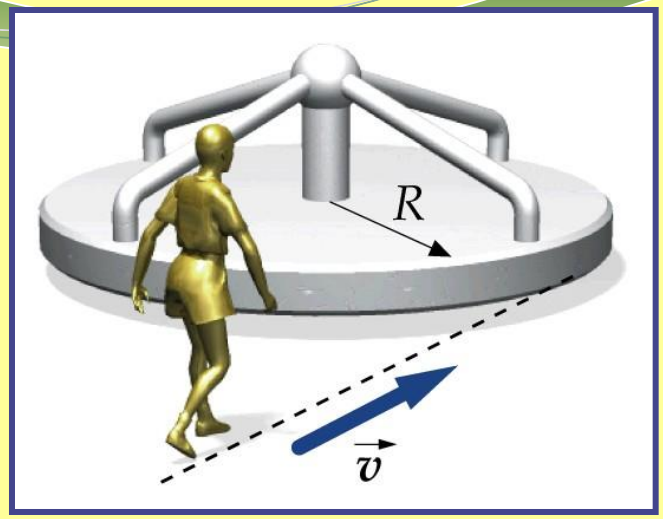
$$\omega_f = 56{,}2 rpm = 5{,}88 rad/s$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 51{,}9 m/s^2 > 5g$$

Arremessado !

Rolamento - Momento angular

Uma criança de 25 kg, corre a 2,5 m/s, tangente à borda de um carrossel de raio 2,0 m. O carrossel inicialmente em repouso, tem momento de inércia de 500 kg.m². A criança pula sobre o carrossel. Determine a velocidade angular final do conjunto.



Como o torque externo em relação ao eixo do carrossel é nulo, há conservação da quantidade de movimento angular

$$L_f = L_i \Rightarrow L_i = \left|\vec{r}_c \times m\vec{v}_i\right| = Rmv_i$$

$$L_f = I_f \omega_f$$

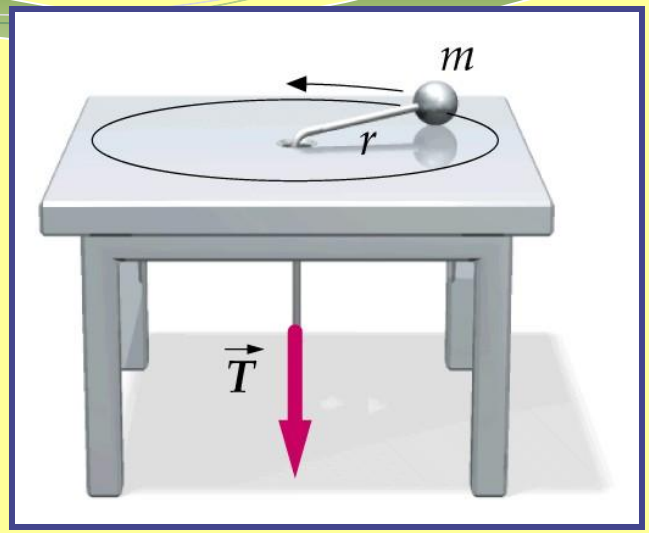
$$I_f \omega_f = Rmv_i$$

$$I_f = mR^2 + I_{carr}$$

$$\omega_f = \frac{Rmv_i}{mR^2 + I_{carr}} = 0{,}21 rad/s$$

Rolamento - Momento angular

Uma partícula de massa m se move sem atrito com velocidade v_0 em um círculo de raio r_0. A partícula está presa a um fio que passa por um furo na mesa. O fio é puxado até que o raio do movimento passe a ser r_f.



(a) Determine a velocidade final.

(b) Determine a tensão no fio.

(c) Determine o trabalho realizado pela tensão sobre a partícula.

Como a tensão é radial, não realiza torque sobre a partícula, então há conservação da quantidade de movimento angular da partícula.

a) $L_f = L_i \Rightarrow \left|\vec{r}_f \times m\vec{v}_f\right| = \left|\vec{r}_0 \times m\vec{v}_0\right|$

$$r_f m v_f = r_0 m v_0 \Rightarrow v_f = \frac{r_0 v_0}{r_f}$$

b)

$$T = m\frac{v^2}{r} \qquad L = mrv \Rightarrow T = \frac{L^2}{mr^3}$$

c) $$T = \frac{L^2}{mr^3}$$

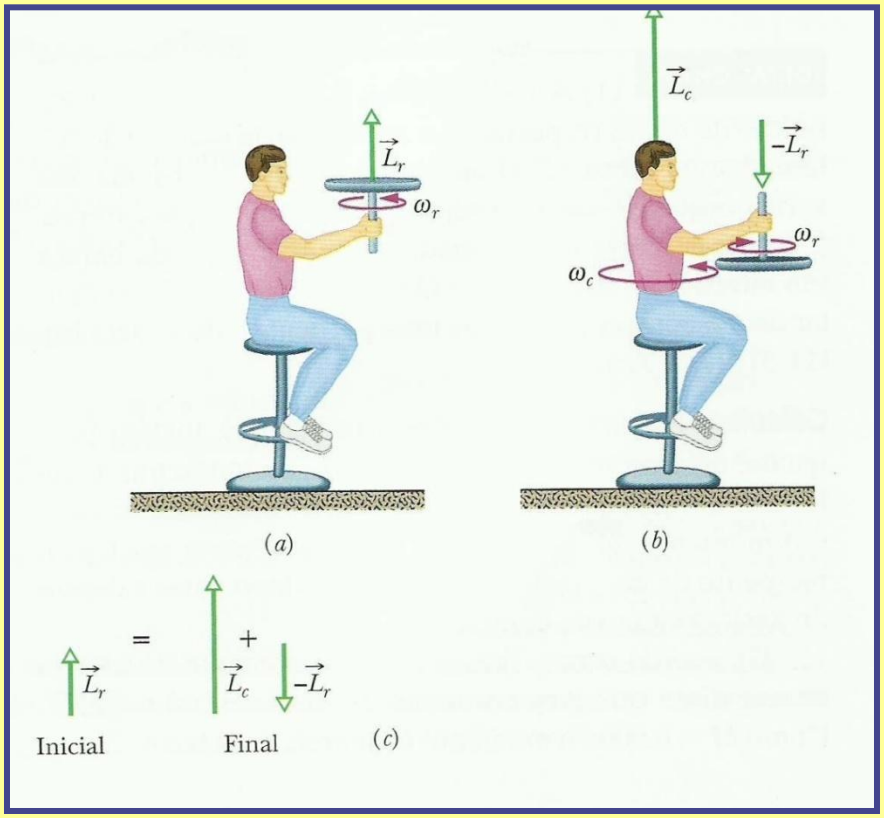
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int -T dr$$

$$W = -\int_{r_0}^{r_f} T dr = -\int_{r_0}^{r_f} \frac{L^2}{mr^3} dr$$

$$W = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r_f^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)$$

Para pensar !

Uma pessoa está sobre uma cadeira giratória, com a roda de bicicleta com seu eixo na vertical. Se ela gira a roda, o que acontece com a cadeira?

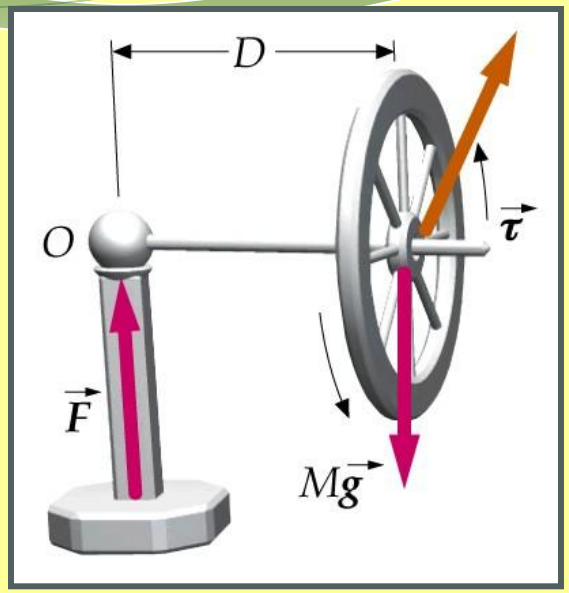


A mesma condição anterior, porém com o eixo da roda na horizontal.

Como fazer para colocar o eixo na vertical?

O que acontece com a cadeira?

Roda de bicicleta → Giroscópio



A "roda de bicicleta" vista na aula consiste em um corpo em rotação chamado de giroscópio, com o seu eixo livre para alterar a sua direção.

A quantidade de movimento angular da roda é:

$$\vec{L} = I_{cm}\vec{\omega} \qquad L = I_{cm}\omega$$

Aplicando-se a segunda lei de Newton para a rotação, temos:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Mas também $\vec{\tau}_{res} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g}$

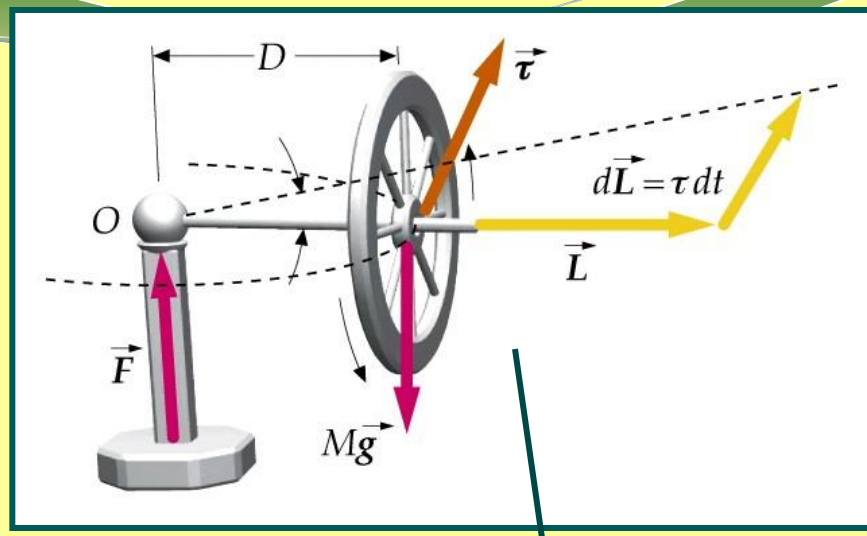
módulo ↓

$$\tau = DMg$$

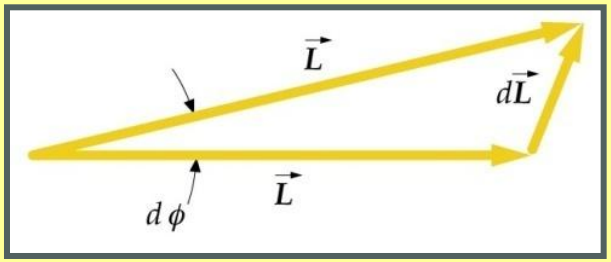
Rolamento - Momento angular

O torque pode mudar tanto a velocidade de rotação, aumentando a intensidade de L, como também pode mudar apenas a direção do vetor momento angular L.

Da mesma forma que a força centrípeda altera apenas a direção do vetor velocidade.



Movimento de precessão



A velocidade de precessão da roda em torno do eixo vertical é dada por:

$$\Omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$$

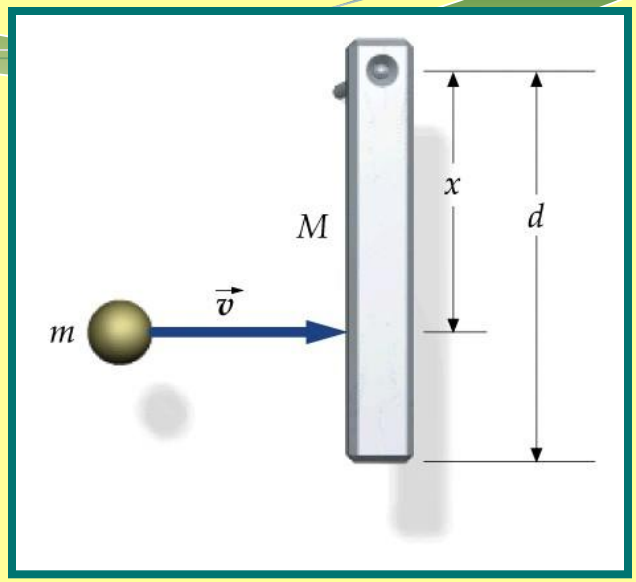
$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$dL = L d\phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$$

$$\Omega_p = \frac{\tau_{res}}{L} = \frac{MgD}{I_{cm}\omega}$$

Uma barra fina de massa M e comprimento d está pendurada em um pivô. Um pedaço de massa de modelar de massa m e velocidade v, atinge a barra a uma distância x do pivô e se prende a ela. Determine a razão entre as energias cinéticas antes e depois da colisão.



A colisão é inelástica, não há conservação da energia mecânica do sistema.

$$K_i = \frac{1}{2} m v^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{L_f^2}{2 I_f}$$

$$I_f = m x^2 + \frac{1}{3} M d^2$$

$$L_f = \left| \vec{r} \times m\vec{v} \right| = m v x$$

Rolamento - Momento angular

Durante a colisão há uma grande força no pivô, portanto não há conservação da quantidade de movimento linear.

A força no pivô é radial, não existe torque e temos conservação da quantidade de movimento angular.

$$L_f = L_i$$

$$L_f = L_i = \left|\vec{r} \times m\vec{v}\right| = mvx$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{L_f^2}{2I_f}$$

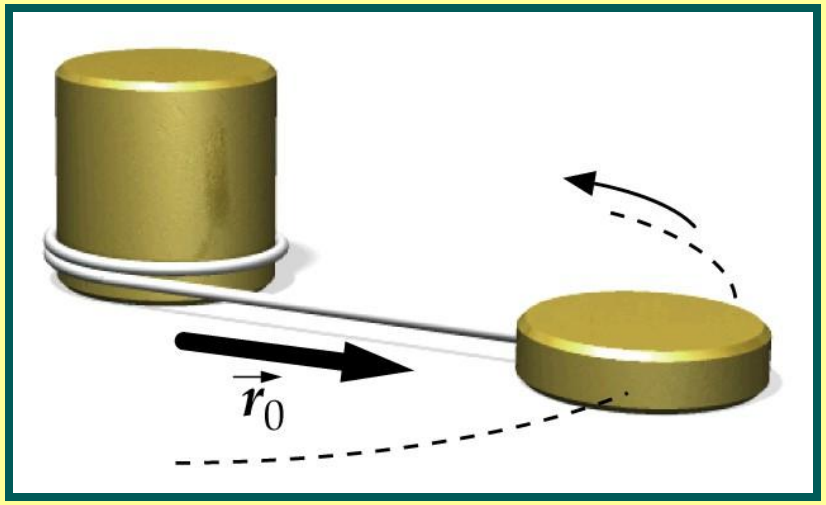
$$K_f = \frac{3}{2}\frac{(mvx)^2}{(3mx^2 + Md^2)}$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{3}{2}\frac{(mvx)^2}{(3mx^2 + Md^2)}}{\frac{1}{2}mv^2}$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{1}{1 + \frac{Md^2}{3mx^2}}$$

Rolamento - Momento angular

Considere a situação ao lado. Ela é semelhante à do problema anterior? A quantidade de movimento se conserva? Como varia ω em função do raio?



Como a tensão não é radial, existe um torque sobre a partícula, então não há conservação da quantidade de movimento angular da partícula.