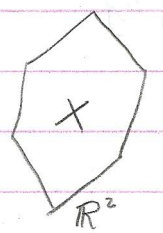
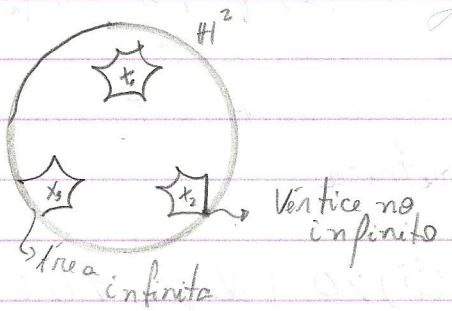
07/11/2011

07/11/2011

$\mathbb{E} = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, S^2$

$X$ é um polígono em $\mathbb{E}$, isto é, um conjunto cujo bordo é uma união finita de segmentos geodésicos



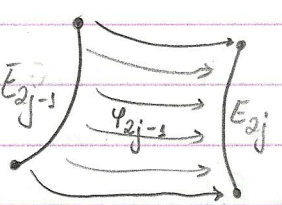

Identificação de lados

Lados de $X$: $\{E_1, E_2, \dots, E_{2n}\}$

$\varphi_{2i-1} : E_{2i-1} \longrightarrow E_{2i}$ $\quad i = 1, \dots, n$ é uma isometria (injetiva e sobrejetiva)

$E_1 \underset{\varphi_2}{\overset{\varphi_1}{\rightleftarrows}} E_2 \qquad \varphi_{2i-1}^{-1} = \varphi_{2i}$

$E_3 \underset{\varphi_4}{\overset{\varphi_3}{\rightleftarrows}} E_4$




$$xRy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \varphi_i(y) \text{ para algum } i \\ \Updownarrow \\ y = \varphi_{i+1}(x) \end{cases}$$

Estendemos $R$ a uma relação de equivalência por transitividade: classes são denotadas por $\overline{x}$

(i) $x \in \mathring{X} \Leftrightarrow \overline{x} = \{x\}$

(ii) $x \in E_i$, mas $x$ não é vértice $\Leftrightarrow \overline{x} = \{x, \varphi_i(x)\}$

(iii) $x \in \partial X$ e é um vértice então $\overline{x} = \{x_1, \dots, x_k\}$ onde $x_1 R x_2 R x_3 \dots R x_k$

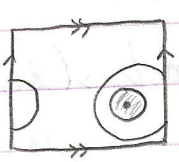
07/11/11

**Teorema** Numa colagem como acima, se a soma dos ângulos internos de $X$ em todos os pontos de classe $\bar{P}$ de vértice $P \in X$ é $2\pi$, então $(\bar{X}, \bar{d})$ é localmente isométrica a $\mathbb{E}$, onde $\begin{cases} \bar{X} = \{\text{classe de equivalência } \bar{x}\} \\ \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = d^R(x,y) = \text{ínfimo dos comprimentos das } R\text{-cadeias de} \\ x \text{ a } y \; ; \; x R p_1, q_1 R p_2, \dots, q_{k-1} R p_k, q_k R y \end{cases}$

$$l^R((p_i, q_i)) = \sum_{i=1}^{k} d(p_i, q_i)$$

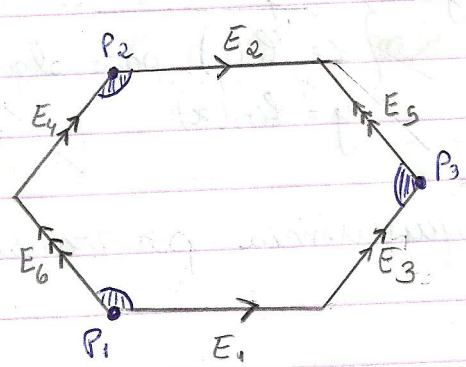
**Lema:** $\bar{d}$ é uma semi-métrica

**Lema:** Dado $\bar{P} \in \bar{X}$, $\exists \varepsilon_0(\bar{P}) > 0$ tal que $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $a \in X$ é tal que $\bar{a} \in B_{(\bar{X},\bar{d})}(\bar{P}, \varepsilon) \Leftrightarrow \exists P' \in \bar{P}$ tal que $a \in B_{(X,d)}(P', \varepsilon)$
Em outras palavras: $\forall P$, existe $\varepsilon_0$ tal que se $\varepsilon < \varepsilon_0$ então
$B_{(\bar{X},\bar{d})}(\bar{P}, \varepsilon) = \pi\left(\bigcup_{P' \in \bar{P}} B_{(X,d)}(P', \varepsilon)\right)$



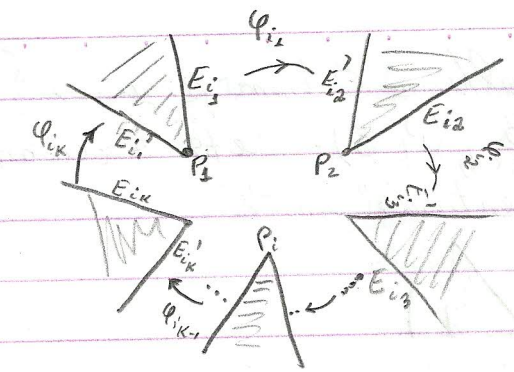
**Lema:** $\bar{d}$ é uma métrica

**Demonstração:**



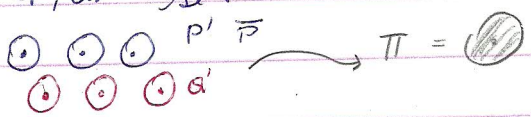

$\bar{P}_1 = \{P_1, P_2, P_3\}$
Classe de um vértice: $P = P_i$ vértice de $X$ → Escolhemos um dos dois lados que tem $P_i$ como extremo e chamamos de $E_{ij}$.
$\varphi_{i_1}(E_{i_1}) = E_{i_2}'$

7 / 11 / 11




Dem. do Lema

$\bar{d}(\bar{P}, \bar{Q}) > 0$ se $\bar{P} \neq \bar{Q}$



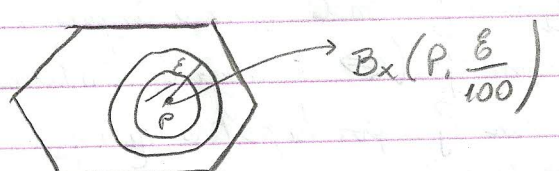

Pelo Lema

$\pi^{-1}(B_{\bar{d}}(\bar{P}, \varepsilon)) = \bigcup_{P' \in \bar{P}} B_d(P', \varepsilon)$

Teorema: $(\bar{X}, \bar{d})$ é localmente isométrico a $\mathbb{E}$

Dem.

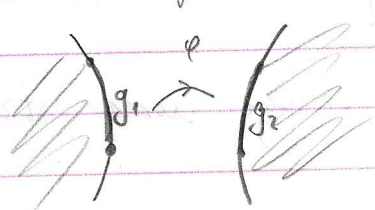
Caso 1: $P \in \mathring{X} \Rightarrow \bar{P} = \{P\}$




melhor momento:

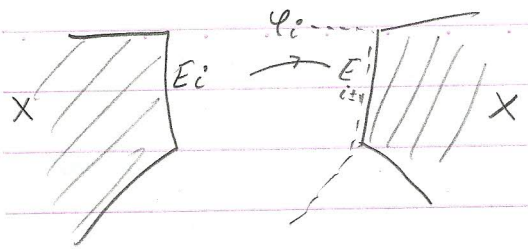
$\bar{P}$ = classe de um vértice. $\bar{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_K\}$

Fato: Dados 2 segmentos geodésicos orientados $g_1, g_2 \subseteq \mathbb{E}$ isométricos existem exatamente 2 isometrias que levam $g_1$ em $g_2$ e uma delas é especificada escolhendo um lado de $g_1$ e um lado de $g_2$ para corresponderem por $\ell$.

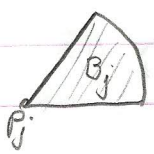



Denotamos por $\ell_i$ a isometria de $\mathbb{E}$ que leva $E_i$ em $E_{i+1}$ e tem o lado de $E_i$ aonde está X no outro lado de $E_{i+1}$.

7 / 11 / 11



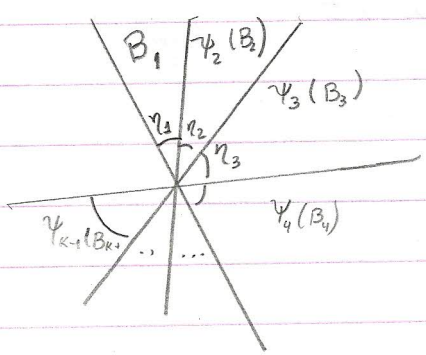

Escolhemos $\varepsilon$ bem pequeno
$B_j = B_{(x,d)}(P_j, \varepsilon)$ = setor circular em $\mathbb{E}$ "centrado" em $P_j$




$\psi_1 = Id$
$\psi_2 = \varphi_{i_1}^{-1}$
$\psi_3 = \varphi_{i_1}^{-1} \circ \varphi_{i_2}^{-1}$
$\vdots$
$\psi_{j+1} = \varphi_{i_1}^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{i_j}^{-1}$

} Isometrias de $\mathbb{E}$

$P_1 = \psi_1(P_1) = \psi_2(P_2) = \varphi_i^{-1}(P_2) = \psi_3(P_3) = \varphi_{i_1}(\varphi_{i_2}(P_3))$




Note que $\bigcup_{i=1}^{j} \psi_i(B_i)$ é um setor circular centrado em $P_1$ com ângulo $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_j$ onde $\eta_j$ é o ângulo interno de $X$ em $P_j$ ($\Leftrightarrow$ o ângulo interno de $B_j$ em $P_j$ por hipótese $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_K = 2\pi$)
$\Rightarrow \psi_K(E_K)$ é um raio emanando de $P$ fazendo ângulo $\sum_{j=1}^{*} \eta_j$ com $E_{ij}$ $\Rightarrow \psi_K(E_{iK}) = E_{i_1}'$ já que por hipótese $\sum \eta_i = 2\pi$.

Observação 1) Note que mesmo sem hipótese sobre $\sum \eta_i$, a descrição da vizinhança de $\bar{P}$ mostra que ela é um disco topológico

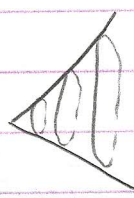
Observação 2) Isto está a meio passo de induzir uma estrutura conforme nessa vizinhança de $\bar{P}$

• $\bar{P}$ tem uma estrutura de Ponto cônico

7 / 11 / 11

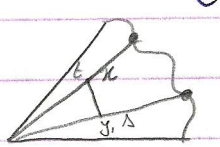
Definição Geral: $(X, d)$ espaço métrico

$$Cone(X) = \frac{X \times [0, \infty)}{(x,0) \sim (y,0) \quad \forall x,y \in X}$$

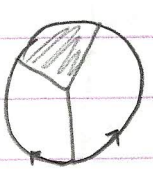


$[x,t]$ é um pto em $X[0,\infty)$

$$d_{cone}([x,t],[y,s]) = \begin{cases} \sqrt{t^2+s^2-2st\cos(d_X(x,y))} & \text{se } d(x,y) \leq \pi \\ s+t & \text{se } d(x,y) > \pi \end{cases}$$



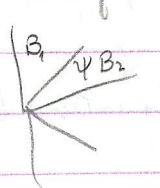

$X = [a,b]$.



Podemos ir por qualquer um dos lados

Ex.: Mostre que uma vizinhança de classe de um vértice $\bar{P}$ em $\bar{X}$ é isométrico ao cone
Cone (círculo de comprimento $(\eta_1 + \eta_2 + \dots \eta_N)$
Encontre a fórmula para a métrica do cone hiperbólico. (Lei do Cosseno hiperbólico)

Suponha que $\sum \eta_j = \frac{2\pi}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ e o resto é como antes




$$\psi_j = \varphi_{i_2}^{-1} \circ \varphi_{i_3}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{i_j}^{-1}$$

$$\psi_{K+1} = \psi_K \circ \varphi_{i_{K+1}}^{-1}$$

$$\psi_{K+1} = \psi_{i_2} \circ \varphi_{2K+1}^{-1} = Id$$