8 / 11 / 1

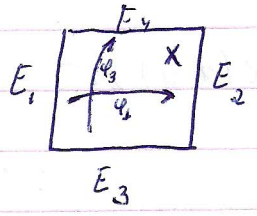
08/11/2011

$X \subseteq \mathbb{E}$ polígono

$\varphi_{2i-1} : E_{2i-1} \longrightarrow E_{2i}$ isometria

$\varphi_{2i} = \varphi_{2i-1}^{-1}$

Estendendo cada φ_j à isometria de $\mathbb{E}$ que leva E_j em $E_{j\pm1}$ e leva o lado de E_j contendo X ao lado de $E_{j\pm1}$ oposto a X.



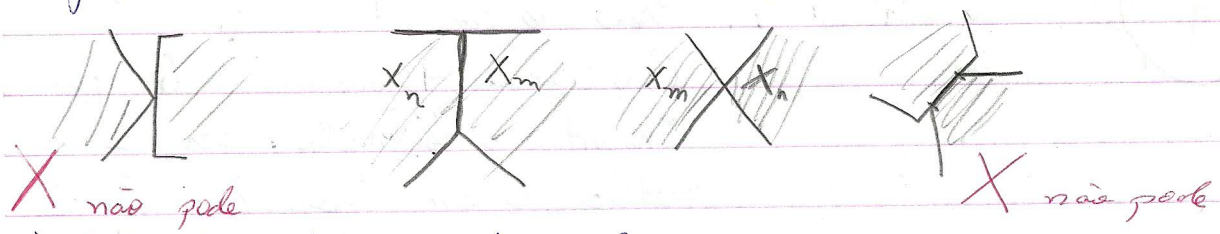
φ_1 leva X em $X+(1,0)$

$\varphi_3(X) = X+(0,1)$

φ_i são isometrias de $\mathbb{E}$

Γ = subgrupo de $Isom(\mathbb{E})$ gerado por $\{\varphi_i\}_{i=1}^{2n}$

Γ = grupo de ladrilhamento associado à colagem $(X, \{\varphi_i\})$



Ladrilhamento de $\mathbb{E}$ é uma decomposição

$\mathbb{E} = \bigcup X_n$ onde cada X_n é um polígono isométrico a um polígono X dado, satisfazendo:

- $m \neq n$ $\quad X_m \cap X_n = \begin{cases} \text{Um lado inteiro de } X_m = \text{Um lado inteiro de } X_n \\ \text{Um vértice de } X_m = \text{Um vértice de } X_n \end{cases}$

- Finitude local

8 / 11 / 11

Teorema do Ladrilhamento

Dada uma colagem $(X, \{\varphi_i\})$ podemos considerar a coleção

$$P(X) = \{\varphi(X),\ \varphi \in \Gamma\}$$

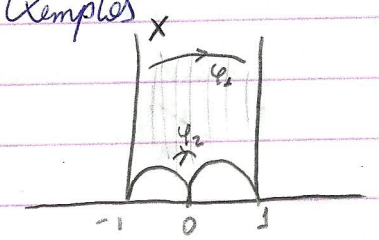
↳ coleção de polígonos isométricos a X.

Pergunta: Isto é um ladrilhamento de $\mathbb{E}$?

Resp.: Nem sempre.

Teorema Se o espaço Quociente $(\bar{X}, \bar{d})$ é um espaço métrico completo e a soma dos ângulos internos nas classes $\bar{p}$ dos vértices têm soma igual a submultiplos de 2π então $P(X)$ é um Ladrilhamento de $\mathbb{E}$

Exemplos

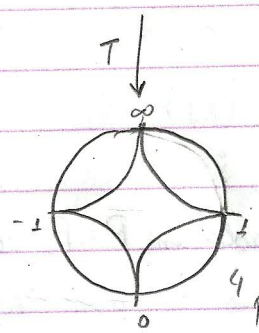


$\varphi_1(z) = z + 2$

$\varphi_2(z) = \dfrac{z}{2z+1}$

$\varphi_1 : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

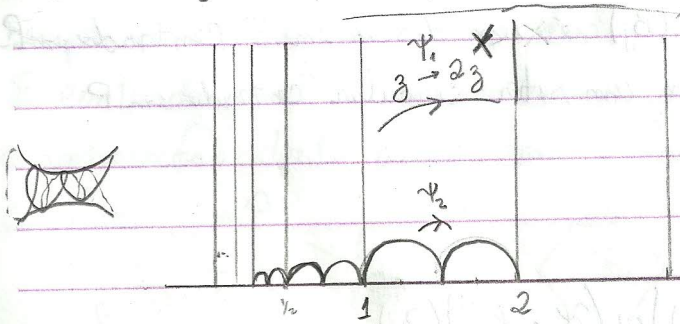
$\varphi_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$



4 ptos simétricos

$T(z) = \dfrac{z - i}{z + i} e^{i\theta}$

Aqui o quociente é completo. É possível ladrilhar o plano todo.

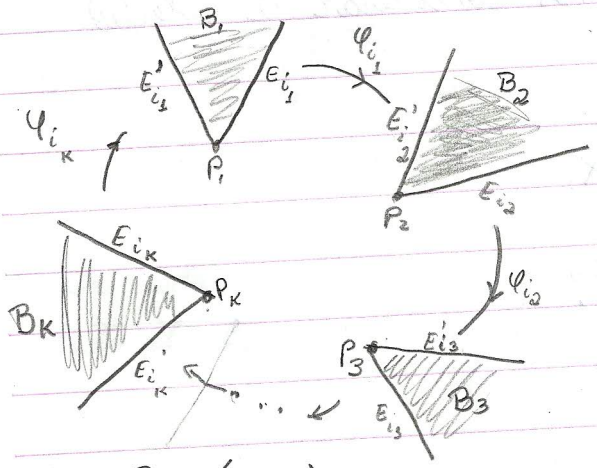


Vai ladrilhando o plano, usando X, ψ_1, ψ_2, pode-se perceber que neste caso, não conseguimos ladrilhar os pontos < 0.

O quociente não é completo.

8 / 11 / 11

$\bar{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_K\}$



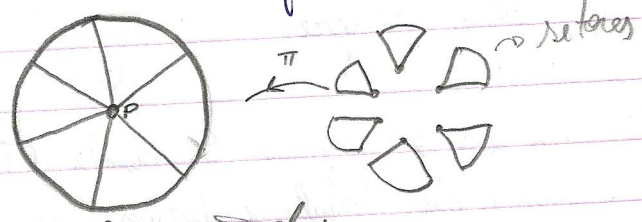
Por Conveniencia,

$P_{K+1} = P_1$ → sub indices mod K

$P_{K+2} = P_2$ $\quad \varphi_{i_{K+1}} = \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{K+j}} = \varphi_{i_j}$

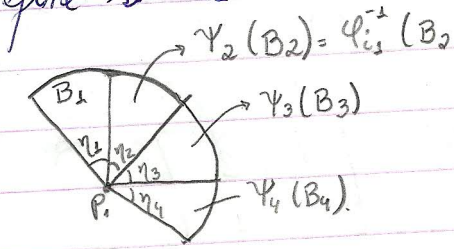
$B_j = B_{(X,d)}(P_j, \varepsilon)$

Usaremos que



↳ união das Vizinhanças

Define-se $\Psi_1 = Id$.



$\Psi_2 = \Psi_1 \circ \varphi_{i_1}^{-1}$

$\Psi_3 = \Psi_2 \circ \varphi_{i_2}^{-1} = \Psi_1 \circ \varphi_{i_1}^{-1} \circ \varphi_{i_2}^{-1}$

$\vdots$

$\Psi_j = \Psi_{j-1} \circ \varphi_{i_{j-1}}^{-1} = \Psi_1 \circ \varphi_{i_1}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{i_{j-1}}$

União dos setores $\Psi_j(B_j)$ é um setor circular centrado em $P = P_1$ de ângulo $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_j$

- Se $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_j = 2\pi$ então $\bigcup_{j=1}^{K} \Psi_j(B_j)$ é um disco em $\mathbb{E}$ centrado em P
- Se $\sum_{j=1}^{K} \eta_j = \frac{2\pi}{N}$ então $\bigcup_{j=1}^{K} \Psi_j(B_j)$ é um setor circular centrado em P

de ângulo $2\pi/N$

$$\left(\bigcup_{j=1}^{K} \Psi_j(B_j)\right) \cup \Psi_{K+1}(B_{K+1}) = \left(\bigcup_{j=1}^{K} \Psi_j(B_j)\right) \cup \left(\Psi_K \circ \varphi_{i_K}^{-1}\right)(B_1) = \text{setor circular}$$

centrado em P de ângulo $\frac{2\pi}{N} + \eta_1$ ...

$\bigcup_{j=1}^{2K} \Psi_j(B_j)$ = setor circular centrado em P de ângulo $2\left(\frac{2\pi}{N}\right)$.

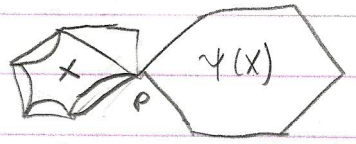
Sendo assim,

$\bigcup_{j=1}^{NK} \Psi_j(B_j)$ = disco em $\mathbb{E}$ centrado em P.

E o que é Ψ_{NK+1}?

$\Psi_{NK+1} = \Psi_{NK} \circ \varphi_{i_{NK}}^{-1}$ leva B_1 num setor circular centrado em P cujos lados são raios emanando de P com ângulo 2π e $2\pi + \eta_1$ com raio E'_{i_1} $\Rightarrow \Psi_{NK+1} = Id \Rightarrow \Psi_{NK+2} = \Psi_2$, ...

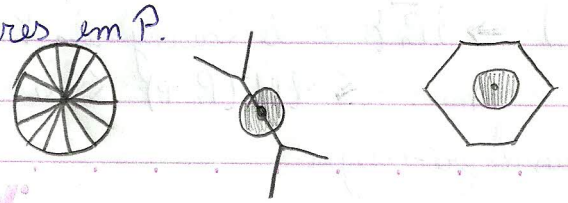
Def.: $P \in X$. Dizemos que $\Psi(X)$ é <u>adjacente</u> a X em P se existe uma sequência de colagens $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_\ell}$ tal que $\varphi_{i_{j-1}} \circ \dots \circ \varphi_{i_2} \circ \varphi_{i_1}(P) \in E_{i_j}$ e $\Psi = \varphi_{i_1}^{-1} \circ \varphi_{i_2}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{i_\ell}^{-1}$



Em geral: $\varphi(X)$ e $\Psi(X)$ são adjacentes em P se X e $\varphi^{-1} \circ \Psi(X)$ ... $\varphi^{-1}(P)$

<u>Convenção</u> $P \in \mathring{X}$, X é adjacente a X em P

<u>Lema:</u> Para cada $P \in X$ o número de ladrilhos adjacentes a X em P é sempre finito e a união destes ladrilhos contém um disco em $\mathbb{E}$ centrado em P e tomando o raio deste disco pequeno o bastante, a intersecção deste disco com o ladrilho (adjacentes em P) são setores circulares em P.

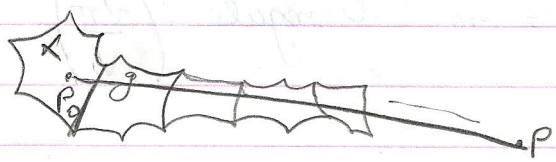


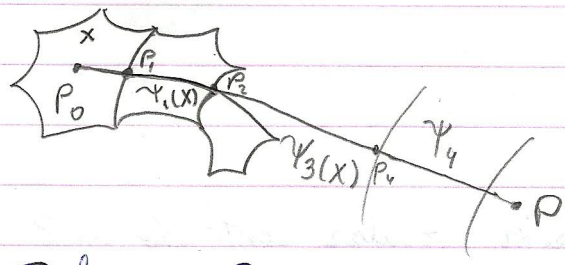
8 / 11 / 11

Prova do Teorema

Suponha $\mathbb{E} = \mathbb{H}^2$ para fixar idéias.

$\mathbb{H}^2$





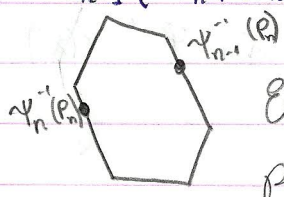
Definimos P_1 = primeiro ponto onde g sai de X e $\psi_1(X)$ = ladrilhos contendo pontos "logo depois" de P_1, $(P_2, \psi_2(X)), \dots, (P_n, \psi_n(X)), \dots$

Se $P \notin \bigcup \psi_n(X) \Rightarrow$ a seq. acima é infinita

Suponhamos que definimos uma seq. infinita P_n (Pontos) e $\psi_n(X)$ (ladrilhos).

Note que $P_n \in \begin{cases} \psi_{n-1}(X) \\ \psi_n(X) \end{cases} \Rightarrow \psi_{n-1}^{-1}(P_n), \psi_n^{-1}(P_n) \in X$.

$$\psi_n^{-1} \circ \overbrace{\psi_{n-1}}^{Id}(\psi_{n-1}^{-1}(P_n)) = \psi_n^{-1}(P_n)$$



Esses dois pontos são colados e portanto, sua projeção em $\bar{X}$ é um mesmo ponto $\overline{P_n}$.

A sequência P_n em g é de Cauchy (monótona e converge)

$$\bar{d}_{\bar{X}}(\overline{P_n}, \overline{P_{n+1}}) \leq d_X(\psi_n^{-1}(P_n), \psi_n^{-1}(P_{n+1})) \underset{\psi_n^{-1} \text{ é isométrica}}{=} d_{\mathbb{H}^2}(P_n, P_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\sum \bar{d}_{\bar{X}}(\overline{P_n}, \overline{P_{n+1}}) \leq \sum d_{\mathbb{H}^2}(P_n, P_{n+1}) \Rightarrow \{\overline{P_n}\} \text{ é de Cauchy em } X$$

distância do quociente

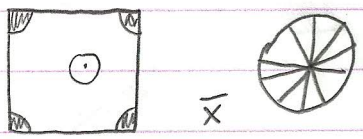
é $\leq$ soma das dist. de quaisquer 2 pré-imagens

$\leq d_{\mathbb{H}^2}(P_0, P) < \infty$

Agora, usando a hipótese de completude de $(\bar{X}, \bar{d})$:

$$\bar{P}_n \to \bar{P}_\infty \in \bar{X}$$

$\bar{P}_\infty = \{P_\infty^1, P_\infty^2, \dots, P_\infty^k\}$, tomando $\varepsilon > 0$ pequeno o bastante de forma que a descrição local de uma vizinhança $B_{\bar{X}}(\bar{P}_\infty, \varepsilon)$ seja uma "pizza fatiada" (métrica) pelo lema técnico provado há algumas aulas.



Escolha n_0 tq $\sum_{n \geq n_0} d(P_n, P_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{100}$ e $\sum_{n \geq n_0} d(\bar{P}_n, \bar{P}_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{100}$

$$\Downarrow$$

$$d(\bar{P}_n, \bar{P}_\infty) < \frac{\varepsilon}{100}$$

Pelo lema técnico, escolhendo ε pequeno tq as bolinhas $B(P_\infty^j, \varepsilon)$ sejam todas disjuntas. Ainda pelo lema técnico, podemos escolher $P_\infty^{j_n} \in \bar{P}_\infty$ tq $\psi_n^{-1}(P_n) \in B(P_\infty^{j_n}, \varepsilon)$

$\psi_n^{-1}(P_{n+1})$ é colado com $\psi_{n+1}^{-1}(P_{n+1})$ pela colagem $\psi_{n+1}^{-1} \circ \psi_n$. Mas
$d(\psi_n^{-1}(P_n), \psi_n^{-1}(P_{n+1})) = d(P_n, P_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{100} \Rightarrow \psi_n^{-1}(P_{n+1}) \in B(P_\infty^{j_n}, \varepsilon)$

Transforme tudo por $\psi_{n+1}^{-1} \circ \psi_n$:

$$\psi_n^{-1}(P_{n+1}) \longmapsto \psi_{n+1}^{-1}(P_{n+1}) \in B(P_\infty^{j_{n+1}}, \varepsilon)$$
$$P_\infty^{j_n} \longmapsto \psi_{n+1}^{-1} \circ \psi_n(P_\infty^{j_n})$$

$\Rightarrow \psi_{n+1}^{-1} \circ \psi_n(P_\infty^{j_n}) = P_\infty^{j_{n+1}}$

$\boxed{\psi_n(P_\infty^{j_n}) = \psi_{n+1}(P_\infty^{j_{n+1}})}$

$$\Rightarrow \psi_n(P_\infty^{j_n}) = \psi_{n_0}(P_\infty^{j_{n_0}}) \overset{\text{Definimos}}{=} P_\infty \quad \forall n \geq n_0$$

Portanto, todos os ladrilhos $\psi_n(X)$ são adjacentes a $\psi_{n_0}(X)$ em P_∞
$\Rightarrow$ ladrilhos $\psi_n(X)$ são em número finito $\Rightarrow$ há um nº finito de P_n's
E não seria possível ter um nº infinito de ptos com um nº finito de ladrilhos