21/01/2011

21/11/2011

Teorema da Tecelagem

X polígono em $\mathbb{E}(=\mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, S^2)$

$\{\varphi_i\}$ são isometrias de colagem (de lados de X)

Então:

i) Se a soma dos ângulos internos em cada classe de eq. (induzidas pelas colagens) é um submúltiplo de 2π

ii) $(\overline{X}, \overline{d})$ (o espaço quociente) é completo

Segue que $P(X) = \{\varphi(X),\ \varphi \in \Gamma = \text{grupo gerado por } \varphi_i\}$ é uma tecelagem de $\mathbb{E}$

Critérios para (ii)

↳ Teorema do Polígono de Poincaré

Γ é um grupo de isometrias de $\mathbb{E}$

Def: Uma ação do grupo (abstrato) Γ age em um espaço E por isometria é uma aplicação

$$\Phi : \Gamma \longrightarrow Isom(E)$$
$$a \longmapsto \varphi_a$$

tq $ab \longmapsto \varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b$

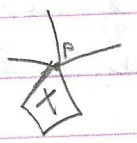
Se Γ age em E, o estabilizador de um ponto $p \in E$ é $\{a \in \Gamma : \varphi_a(p) = p\}$ É note que um estabilizador é um subgrupo.

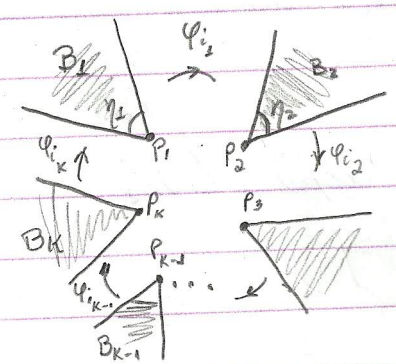
Prova do Teorema da Tecelagem

1º argumento principal: finitude do número de ladrilhos adjacentes a X

21/11/11

Dado um p qualquer, consigo um nº finito de ladrilhos adjacentes nesse pto.





Definimos $\Psi_1 = Id$

$\Psi_2 = \Psi_1 \circ \varphi_{i_1}^{-1}$

$\Psi_3 = \Psi_2 \circ \varphi_{i_2}^{-1}$

$\vdots$

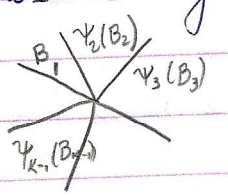
$\Psi_j = \Psi_{j-1} \circ \varphi_{i_{j-1}} = \varphi_{i_1}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{i_{j-1}}^{-1}$

Assim, temos $\Psi_K = \varphi_{i_1}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{i_{K-1}}^{-1}$. Note ainda que $\Psi_2(P_2) = P_1$, $\Psi_3(P_3) = P_1$, $\Psi_K(P_K) = P_1$

Veja $\Psi_2(P_2) = \Psi_1 \circ \varphi_{i_1}^{-1}(P_2) = \Psi_1(P_1) = P_1$ ($\Psi_1 = id$)

$\Psi_3(P_3) = \Psi_1 \circ \varphi_{i_1}^{-1} \circ \varphi_{i_2}(P_3) = \Psi_1 \circ \varphi_{i_1}^{-1}(P_2) = \Psi_1(P_1) = P_1$

Temos a seguinte figura



De $\Sigma \eta_i = 2\pi$, $\Psi_{K+1} = \Psi_K \circ \varphi_{i_K}^{-1}$, $\Psi_{K+1}(P_1) = P_1$ $\Rightarrow \Psi_{K+1} = Id$.

Obs.: Ψ_{K+1} está em $Estab(P_1)$ (Ψ_{K+1} fixa P_1)

Lema De $\Sigma \eta_i = 2\pi \Rightarrow Estab(P_j)$ é trivial $\forall P_j$ na classe de P_i.

Portanto se a soma dos ângulos internos na classe de equivalência é sempre $2\pi \Rightarrow$ estabilizador de todo ponto é trivial

Definição: Se Γ age em E e $Estab(P) = id$ $\forall P \in E$ à ação é dita LIVRE. A ação é DESCONTÍNUA se $\forall P$, $\exists U \ni P$ aberto tal que

$$\#\{\varphi \in \Gamma, \varphi(U) \cap U \neq \emptyset\} < \infty$$

↳ na maioria, os conjuntos $\varphi(U)$ e U são disjuntos.

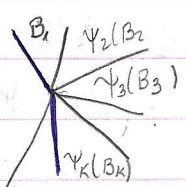
21/11/11

Teorema: Se a ação de Γ em E por isometria/por transformação que preservam uma estrutura de E é livre e descontínua então E/Γ é localmente isométrica a E/isomorfa a E segundo essa estrutura

(ou ainda, se a ação for por difeomorfismo for livre e descontínua então E/Γ seria localmente difeomorfa a E).

Note que se a soma dos ângulos é $2\pi \Rightarrow$ a ação é livre

Agora, suponha que $\sum \eta_i = \frac{2\pi}{N}$



$\psi_{K+1} = \psi_K \circ \varphi_{i_K}^{-1}$

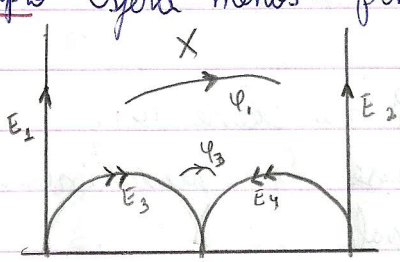
$\psi_{K+1}(P_1) = P_1$

ψ_{K+1} está em $Estab(P_1)$

$\psi_{2K+1}, \psi_{3K+1}, \dots, \psi_{(N-1)K+1}, \psi_{NK+1} = Id$ N grande

Lema Se $\sum \eta_i = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow Estab(P_j)$ é finito e cíclico → é descontínua, mas não é livre

Exemplo Esfera menos 3 pontos



$\varphi_1(z) = z+2$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\varphi_3(z) = \frac{z}{2z+1}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\Big\rangle \in PSL(2,\mathbb{Z})$

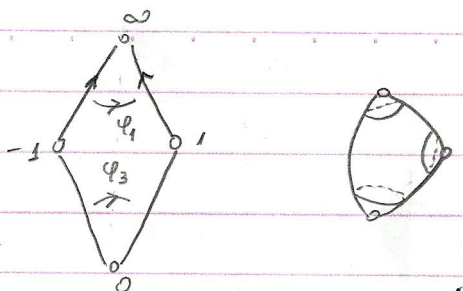
$\varphi_2 = \varphi_1^{-1}$ $\quad \varphi_4 = \varphi_3^{-1}$

$T(z) = -\frac{1}{z} \Rightarrow \varphi_3 = T^{-1} \circ \varphi_1^{-1} \circ T$

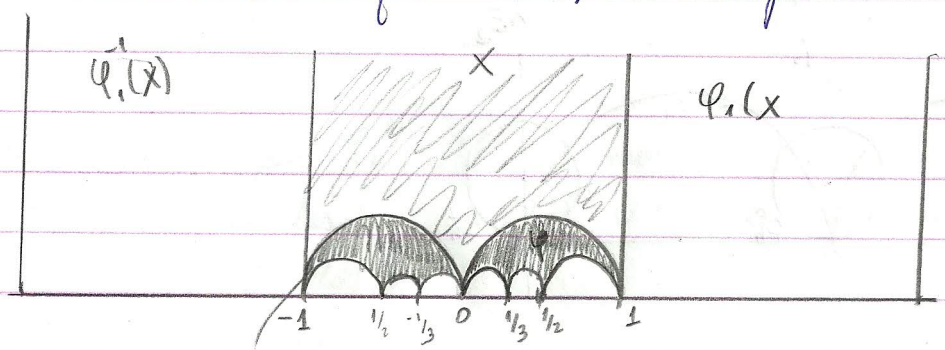
$\left(\varphi_3(z) = T^{-1} \circ \varphi_1^{-1} \circ T(z) = T^{-1} \circ \varphi_1^{-1}(-1/z) = T^{-1}(-1/z - 2) = \frac{z}{2z+1} \right)$

$T^2 = Id$

21 / 11 / 11



Queremos mostrar que $(\bar{X}, \bar{d})$ é completo



Teselagem de Farey

Usa-se a série de Farey

$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}$

$pq' - p'q = \pm 1 \rightsquigarrow$

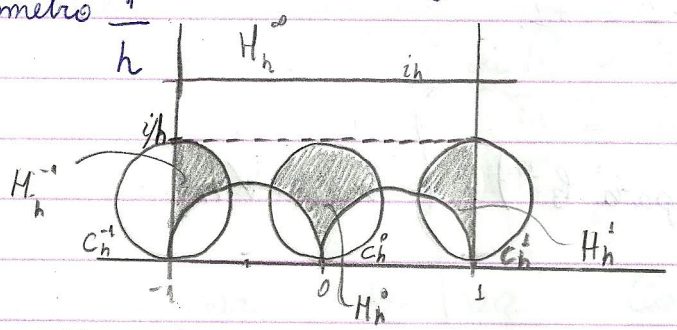
$\rightsquigarrow \frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ são vizinhos de Farey.

Essa teselagem cobre o plano todo? Vamos mostrar que sim.

Vamos mostrar que $(\bar{X}, \bar{d})$ é completo

horocíclos
$C_h^\infty = \{z, \operatorname{Im} z = h\}$

C_h^0 = círculo euclidiano tangente a $0 \subseteq \mathbb{R}$ e centrado em $\frac{i}{2h}$ com diâmetro $\frac{1}{h}$



$\varphi_1^{\pm 1}(C_h^\infty) = C_h^\infty$

$C_h^0 = T(C_h^\infty) = -1/C_h^\infty$

$\varphi_1^{\pm 1}(C_h^{\mp 1}) = C_h^{\mp 1}$

$\varphi_3(C_h^0) = T^{-1} \circ \varphi_1^{-1} \circ T(C_h^0) = C_h^0$

φ_1^{-1} e φ_3 preserva horocíclos C_h^{-1}

Condição necessárias e suficientes p/ garantir a seq. de Cauchy converge