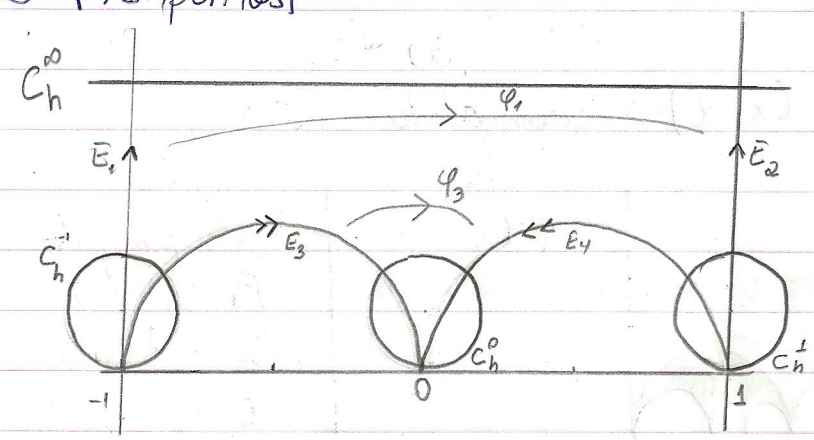
22 / 11 / 2011

22/11/2011

$S^2 \setminus \{3 \text{ pontos}\}$



$\varphi_1(z) = z+2$ $\qquad$ $\varphi_3(z) = \dfrac{z}{2z+1}$

$C_h^\infty = \{ \operatorname{Imag}(z) = h \}$

$C_h^0 = \dfrac{-1}{C_h^\infty}$ = círculo tangente a $\mathbb{R}$ em 0 e diâmetro $\dfrac{1}{h}$

$C_h^{\pm 1}$ = transladados de C_h^0 para -1 e $+1$.

horociclos

$\varphi_1(C_h^\infty) = C_h^\infty$

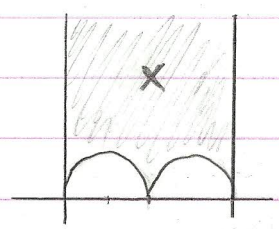
$\varphi_1^{\pm 1}(C_h^{\mp 1}) = C_h^{\pm 1}$ (Vale o mesmo para $\varphi_3^{\pm 1}$)

$\varphi_1^{+1}(C_h^{-1}) = C_h^{-1} + 2 = C_h^1$

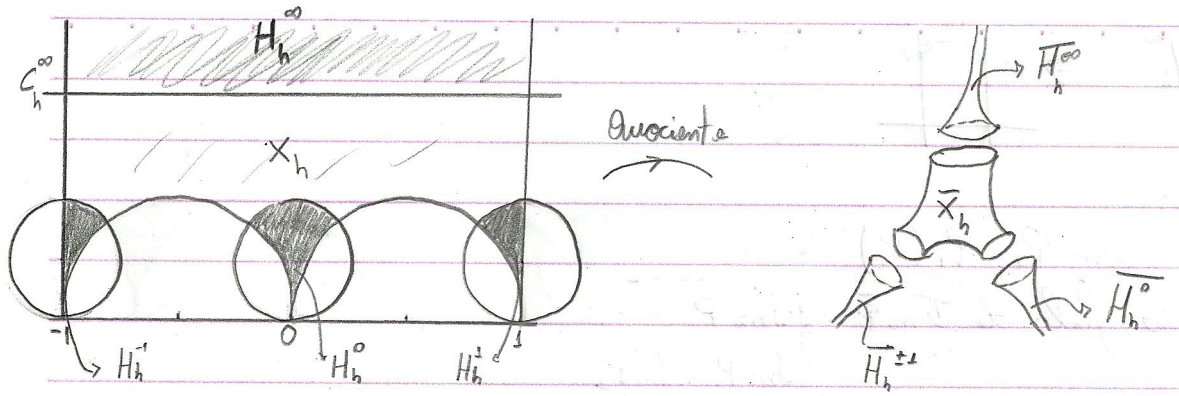
$\varphi_3(C_h^0) = C_h^0$

$\varphi_3^{\pm 1}(C_h^{\mp 1}) = C_h^{\pm 1}$

Vale $\forall h$



22/11/11



Pelas identificações $\varphi_1^{\pm 1}$, $\varphi_3^{\pm 1}$ temos

H_h^∞, H_h^0 } invariantes são colados neles mesmos

$H_h^{-1} \cup H_h^{+1}$ é invariante

$X_h = X \setminus \{H_h^\infty, H_h^0, H_h^{\pm 1}\}$

Então, faz sentido tomar os quocientes

Prova da Completude de $\overline{X} = X/_{\text{colagens por } \varphi_1^{\pm 1}, \varphi_3^{\pm 1}}$

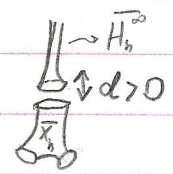
(1) Para h grande, distância entre quaisquer dois de $\overline{H_h^\infty}$, $\overline{H_h^0}$, $\overline{H_h^{\pm 1}}$ (Note que $\overline{H_h^{\pm 1}}$ é um único pedaço, pois foram colados) é positiva. $\Rightarrow$ qualquer seq. de Cauchy está quase toda contida em $\overline{X_h} \cup (\underbrace{\overline{H_h^\infty} \text{ ou } \overline{H_h^0} \text{ ou } \overline{H_h^{\pm 1}}}_{\text{apenas um deles.}})$

Ao maior o h, menor os $(H_h^\infty, H_h^0, H_h^{\pm 1})$

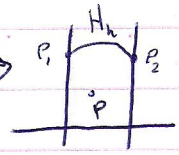
Vamos mostrar que toda seq. de Cauchy em $\overline{X}$ está contida em $\overline{X_h}$ para h grande o bastante ou equivalentemente. Se não, a seq. não é de Cauchy.

Suponha que $\{P_n\} \subseteq \overline{X_h} \cup \overline{H_h^\infty}$ mas $\{\overline{P_n}\}$ não está contida em $\overline{X_h}$ para nenhum $h > 0$

Segue que $\{\overline{P_n}\}$ está quase toda contida em $\overline{H_h^\infty}$



22/11/11

Se $\overline{P} \in H_h^\infty \Rightarrow$ 

$\overline{P} = \{P\}$

$\overline{P} = \{P_1, P_2\}$ com $P_2 = \varphi_1(P_1)$.

Faz sentido falar de $\operatorname{Im} \overline{P} = \begin{cases} \operatorname{Im} P \\ \operatorname{Im} P_1 = \operatorname{Im} P_2 \end{cases}$

Como $\{\overline{P_n}\}$ não está contido em $\overline{X_h}$ para nenhum h, $\operatorname{Im} \overline{P} \to \infty$

Dados $\overline{P_m}$ e $\overline{P_n}$ pontos da seq., tome (z_i, w_i) uma cadeia de P_m a P_n tal que

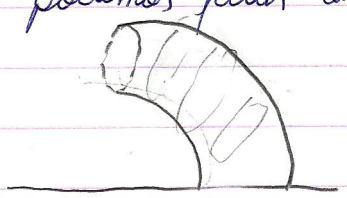
$\overline{d}(\overline{P_m}, \overline{P_n}) \geq l((z_i, w_i)) - \varepsilon$ onde $P_m = z_1, w_1 \sim z_2, w_2 \sim z_3, \dots, w_{k-1} \sim z_k$, $w_k = P_n = z_{k+1}$

$$= \sum_{i=1}^{k} d_{hip}(z_i, w_i) - \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{k} \left| \ln \frac{\operatorname{Im}(w_i)}{\operatorname{Im}(z_i)} \right| - \varepsilon = \sum_{i=1}^{k} \left| \ln \frac{\operatorname{Im}(z_{i+1})}{\operatorname{Im}(z_i)} \right| - \varepsilon \geq$$

$$\geq \left| \sum_{i=1}^{k} \ln \frac{\operatorname{Im} z_{i+1}}{\operatorname{Im} z_i} \right| - \varepsilon = \left| \ln \frac{\operatorname{Im} P_n}{\operatorname{Im} P_m} \right| - \varepsilon \to \infty$$

Para m escolhido (qualquer) tomando h grande

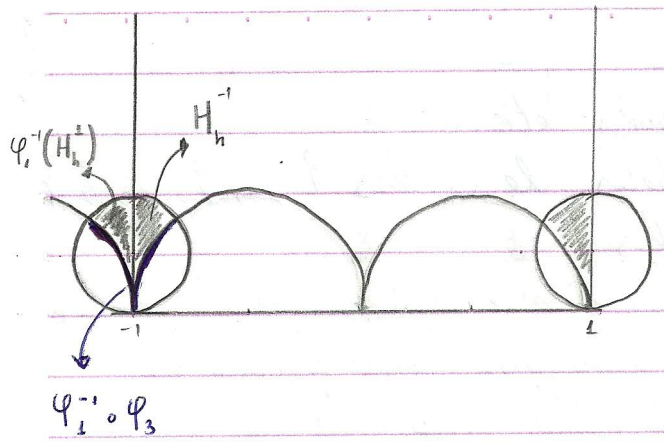
Se não podemos falar da parte imaginária, usamos o exemplo $\varphi(z) = az + (1+a)$ $a \neq 1$



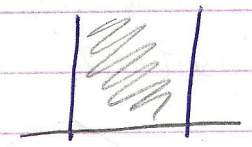
Para $\{\overline{P_n}\}$ contida em $\overline{X_h} \cup \overline{H_h^0}$ uso a isometria $T(z) = -\frac{1}{z}$

Para $\{\overline{P_n}\}$ contida em $\overline{X_h} \cup \overline{H_h^{\pm 1}}$ um pouco mais deve ser dito

22/11/11

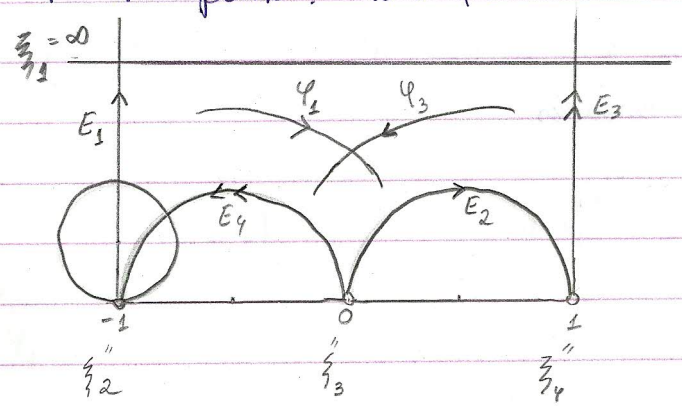


Tomemos $H = \varphi_1^{-1}(H_k^{-1}) \cup H_h^{-1}$

Conjugando por $S(z) = \frac{-1}{z+1}$ então $S(H) =$  e a identificação dos lados "azuis" é feita por $S^{-1}\circ\varphi_1^{-1}\circ\varphi_3\circ S$. Por que $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_3$ preserva horociclos segue que $S^{-1}\circ(\varphi_1^{-1}\circ\varphi_3)\circ S$ preserva horociclos centrados em ∞, isto é, preserva retas horizontais, ou seja, preserva a parte imaginária e aí usa-se o mesmo argumento de antes.

Outro Exemplo.

$T^2 \setminus \{1 \text{ ponto}\}$ = toro furado.



$S^2 \setminus \{3 \text{ pontos}\}$

$T^2 \setminus \{1 \text{ ponto}\}$

Para decidir completude temos que saber se $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_3^{-1}\circ\varphi_1\circ\varphi_3$ preserva horociclos centrados em ∞

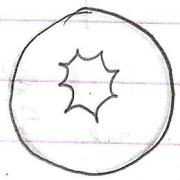
22/11/11

Teorema do Polígono de Poincaré

Tudo que vimos antes sobre ângulos, etc...

$(\bar{X}, \bar{d})$ é completo $\Leftrightarrow$ estabilizadores de ciclos $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ de vértices ideais preservam horociclos

(Veja que se não houver vértices no infinito $\Rightarrow$ é completo. Sendo assim, o problema do octógono das primeiras aulas está resolvido, como não há vértices no infinito, é completo e portanto é possível cobrir o plano todo



Lema: Uma isometria de $\mathbb{H}^2$ preserva um horociclo centrado em $\xi \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ preserva todos os horociclos com o mesmo centro ξ. $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ é $\underbrace{\text{parabólica com único ponto fixo}}$

$$\varphi : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } ad - bc = 1 \Rightarrow \underbrace{a+d}_{Tr\,\varphi} = \pm 2$$

$\xi = \infty \Rightarrow \varphi(z) = az + b$

$a = 1$ preserva os horociclos

Quando tivermos $a \neq 1$ leva um horociclo no outro

Na $S^2 \setminus \{3 \text{ pontos}\}$ temos

$$\varphi_1(z) = z + 2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a + d = 2$$

Note ainda que $\varphi_1(z) = az + (1+a)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a/\sqrt{a} & \frac{1+a}{\sqrt{a}} \\ 0 & 1/\sqrt{a} \end{bmatrix} \quad Tr = \frac{a+1}{\sqrt{a}}$$

$\det = 1$

Como quero $Tr = 2$, a única opção é $a = 1$. que resulta na matriz acima.

22/11/11

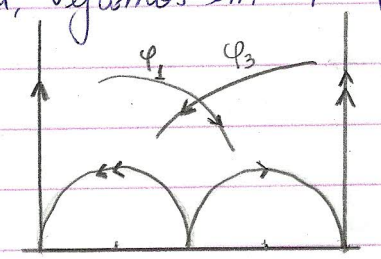
$\varphi_3(z) = \dfrac{z}{2z+1}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad a+d=2$

Também é a única matriz que poderia escolher.

$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_3(z) = \varphi_1^{-1}\left(\dfrac{z}{2z+1}\right) = \dfrac{z}{2z+1} - 2 = \dfrac{z-4z-2}{2z+1} = \dfrac{-3z-2}{2z+1}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow Tr = -2$

Agora, vejamos em $T^2 \setminus \{1 \text{ ponto}\}$



$\varphi_1(z) = \dfrac{z+1}{z+a}$ $\qquad \varphi_3(z) = \dfrac{z-1}{-z+b}$

$a, b > 1 \rightarrow$ para que $\mathbb{H}^2$ seja levado em $\mathbb{H}^2$

a, b são parâmetros.

Completude $\Leftrightarrow \varphi_1^{-1} \circ \varphi_3^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_3$ é parabólica

$$\parallel$$

$$\frac{1}{(b-1)}\frac{1}{(a-1)}\begin{pmatrix} -(b-1)^2 & \sim \\ \sim & -(a-1)^2 \end{pmatrix}$$

Veja:

$\varphi_1^{-1} = \dfrac{az-1}{1-z}$ $\qquad \varphi_3^{-1} = \dfrac{bz+1}{z+1}$

$Tr(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_3^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_3) = -\left[\dfrac{(b-1)^2+(a-1)^2}{(b-1)(a-1)}\right] = -\left[\dfrac{(b-1)}{(a-1)} + \dfrac{(a-1)}{(b-1)}\right] = -\left[\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\right] \geq 2$

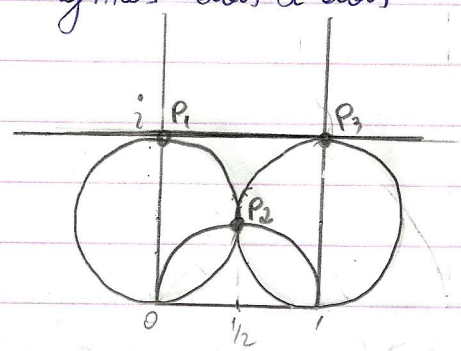
será $= 2 \Leftrightarrow \lambda = 1 \Leftrightarrow \dfrac{b-1}{a-1} = 1 \Leftrightarrow \boxed{a=b}$

22/11/11

ou seja $\mathbb{H}^2/\{\varphi_1^{\pm 1}, \varphi_3^{\pm 1}\}$ é completo $\Leftrightarrow a=b$

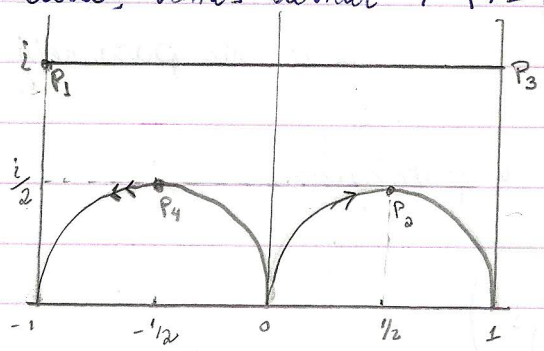
Interpretação Geométrica de a, b

Lembre que todos triângulos ideais são isométricos.
Além disso tenho uma única escolha para três horociclos tangentes dois a dois



3 lados infinitos

Sabendo disso, vamos dividir $T^2 \setminus \{1\}$ pontos em dois triângulos ideais



$$\varphi_1 = \frac{z+1}{z+a} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \quad \det = a-1$$

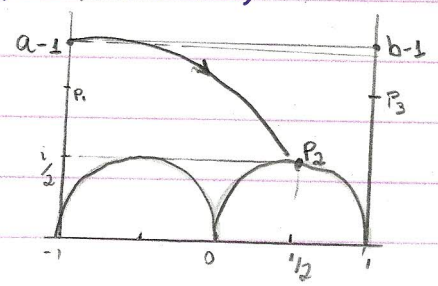
$$\varphi_2 = \varphi_1^{-1} = \frac{az-1}{1-z} \rightsquigarrow \frac{1}{a-1}\begin{bmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

22/11/11

$$\varphi_2(P_2) = \varphi_2\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right) = \frac{a(1/2+i/2)-1}{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)} = \frac{a+ai-2}{1-i}\cdot\frac{(1+i)}{(1+i)} =$$

$$\frac{\cancel{a}+ai+ai-\cancel{a}-2-2i}{2} = \frac{\cancel{2}(ai-1-i)}{\cancel{2}} = -1+(a-1)i$$

$$\varphi_2(P_2) = -1+(a-1)i$$



Note que $(a-1)$ estará "acima" de P_1 se $a>2$

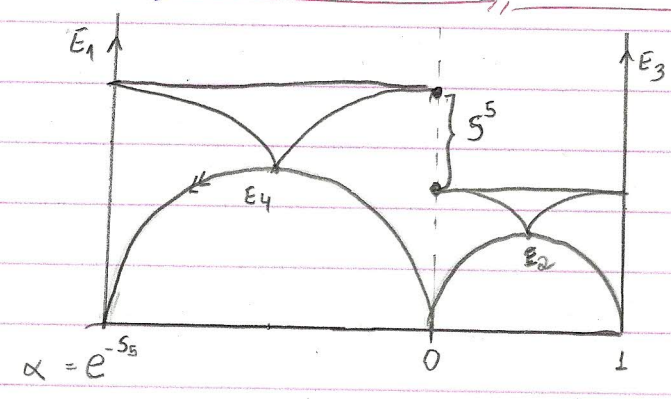
$$d_{hip}(P_1, \varphi_2(P_2)) = |\ln(a-1)|$$

Defina $S_1 = \ln\left(\frac{1}{a-1}\right)$ = distância de $\varphi_2(P_2)$ a P_1 à esquerda (embaixo).

Analogamente, seja $S_3 = \ln(b-1)$ = distância à esquerda (acima) de $\varphi_4(P_4)$ a P_3

Considere então $a = e^{-S_1}+1$ e $b = e^{S_3}+1$

Podemos dizer então que $a=b \Leftrightarrow \varphi_1^{-1}\circ\varphi_3^{-1}\circ\varphi_1\circ\varphi_3(P_3) = P_3 \Leftrightarrow S_1+S_3=0$



$$\varphi_1(z) = \frac{e^{S_5}z+1}{e^{S_5}z+(\underbrace{e^{-S_1}+1}_{a})}$$

$$\varphi_3(z) = \frac{e^{-S_5}(z-1)}{-z+(\underbrace{e^{S_3}+1}_{b})}$$

$tr(\varphi_1^{-1}\circ\varphi_3^{-1}\circ\varphi_1\circ\varphi_3) = \pm 2 \Leftrightarrow$ toro furado completo

$$\varphi_2\circ\varphi_4\circ\varphi_1\circ\varphi_3 = e^{2(S_1+S_3+S_5)}z+\beta$$

22/011/11

Então, para que seja parabólico $\Leftrightarrow S_1 + S_3 + S_5 = 0$

$T \setminus \{1 \text{ pto}\} \Rightarrow \mathbb{H}^2 / \Gamma = \langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle$