Física I para Oceanografia
FEP111 (4300111)

2º Semestre de 2011

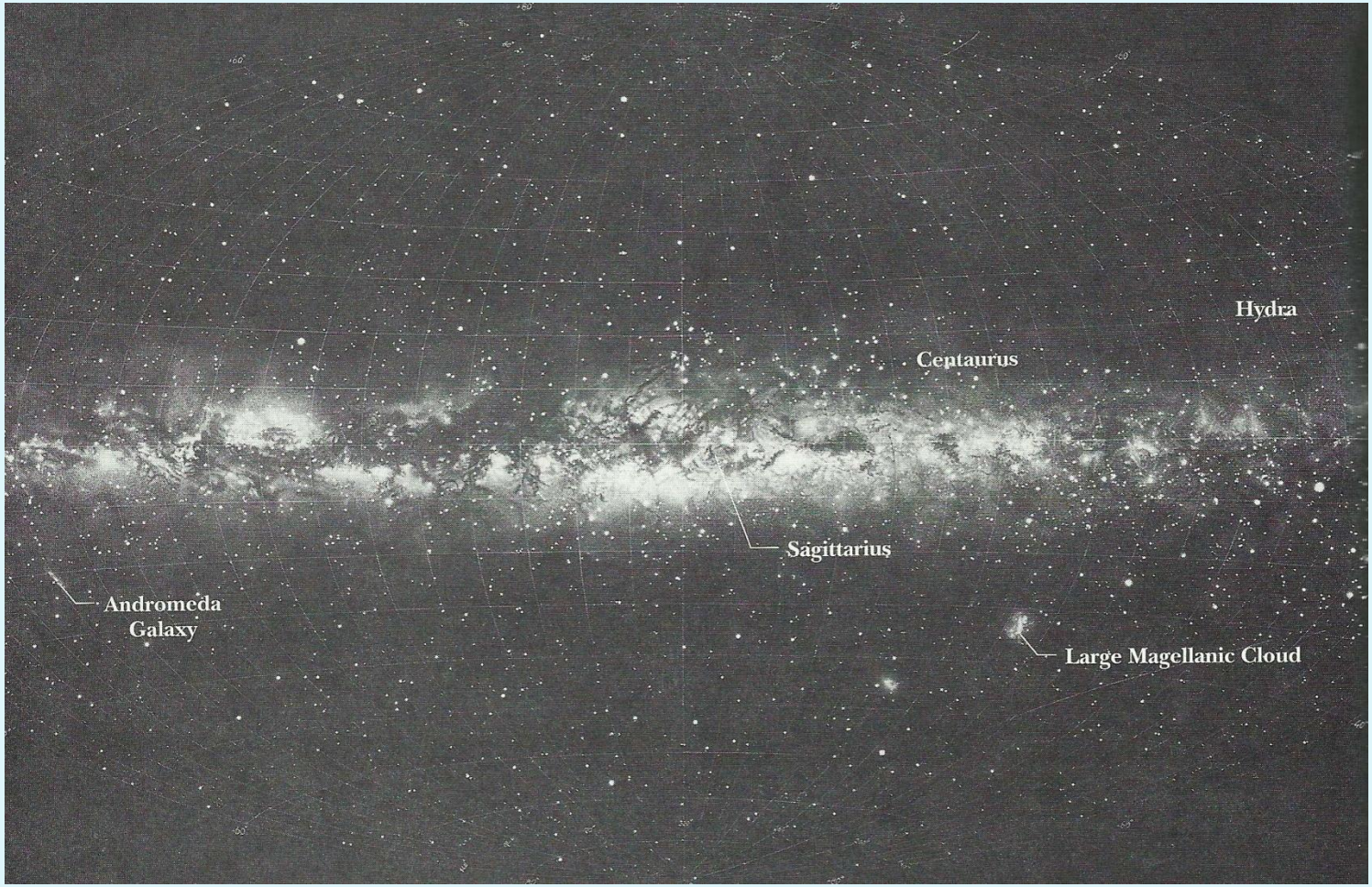
Instituto de Física- Universidade de São Paulo

Aula – 11 Gravitação

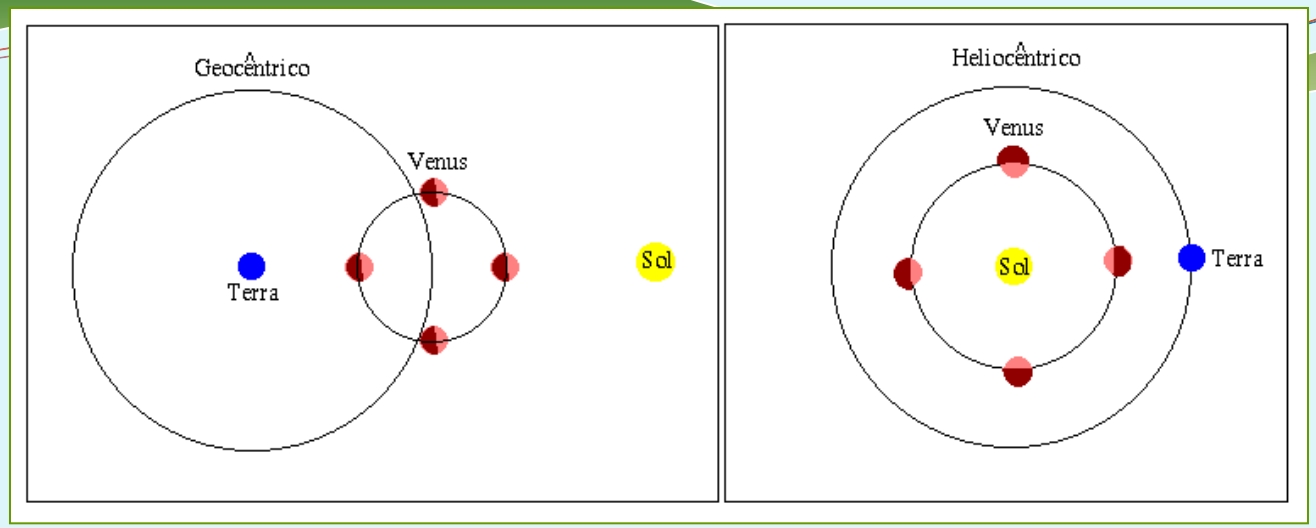
Professor: Valdir Guimarães

E-mail: valdir.guimaraes@usp.br
Fone: 3091.7104

A humanidade sempre observou o céu e o utilizou como referencia de orientação espacial. Porém, no ocidente, foi a partir do final da Idade média que surgiram astronômos que estudaram o céu de forma sistemática, a partir de observações minuciosas.



Galáxia de Andrômeda é muito galáxia em espiral muito parecida com a Via Lactea.



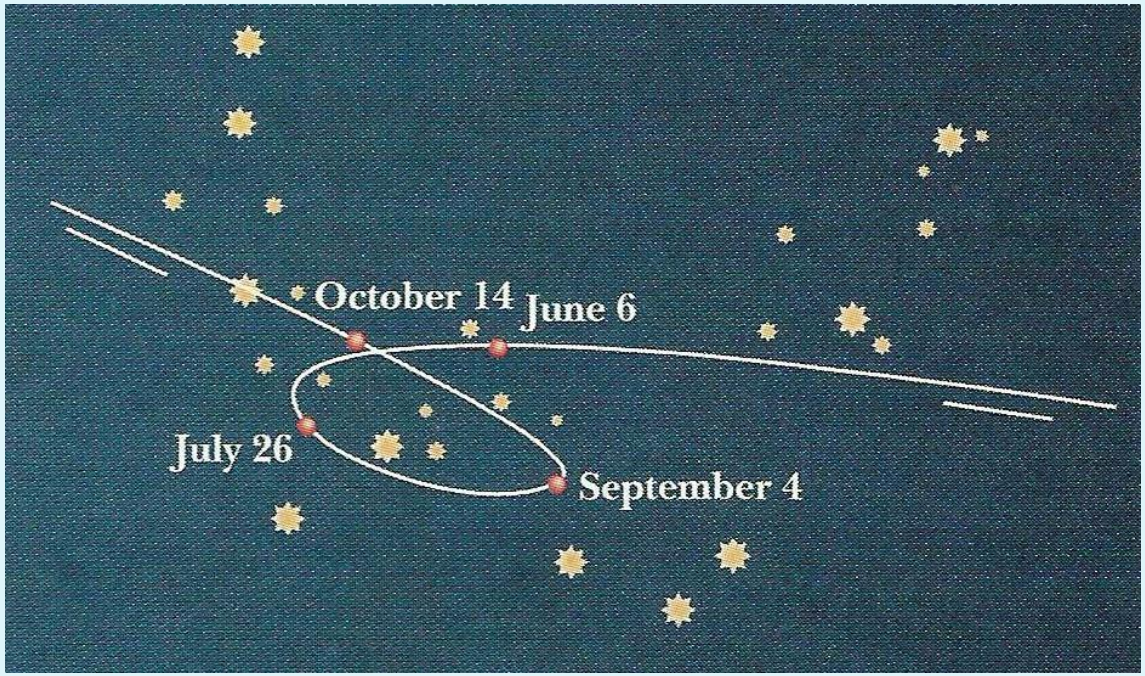
Nicolau Copérnico (heliocentrismo x geocentrismo)

Questões filosoficas e religiosas. Giordano Bruno, Galileu Galilei

As descobertas de Galileo proporcionaram grande quantidade de evidências em suporte ao sistema heliocêntrico. Por causa disso, ele foi chamado a depor ante a Inquisição Romana, sob acusação de heresia, e obrigado a se retratar. Apenas em 1980, o Papa João Paulo II [Karol Joseph Wojtyla (1920-2005)] ordenou um re-exame do processo contra Galileo, o que acabou por eliminar os últimos vestígios de resistência, por parte da igreja Católica, à revolução Copernicana. Galileo foi perdoado em 31 de outubro de 1992.

Ticho Brahe e Johannes Kepler, no século XVI, se constituem nos primeiros grandes exemplos de astronômos observacionais.

Ticho Brahe fez grande quantidade de medições astronômicas e Kepler (discipulo) sistematizou os conhecimentos acumulados.



Simulador da posição dos planetas

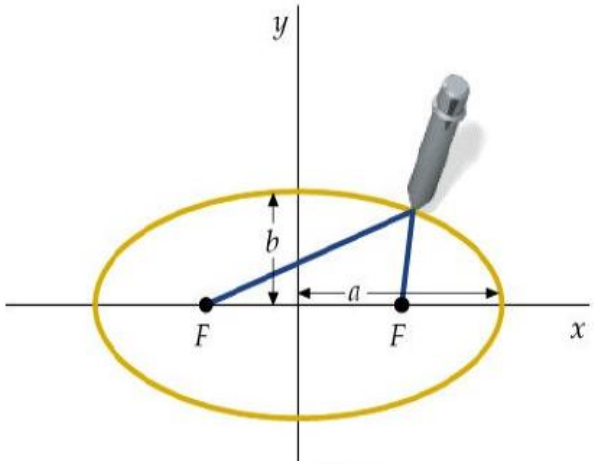
http://space.ipl.nasa.gov/

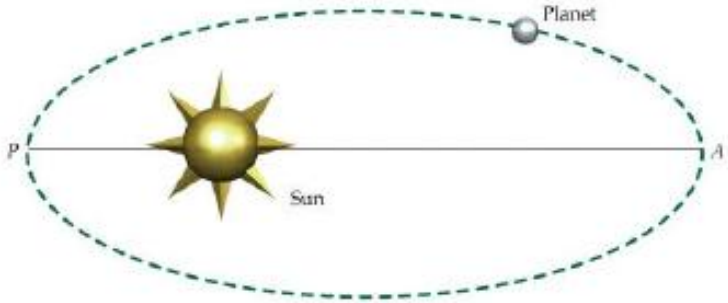
Ticho Brahe

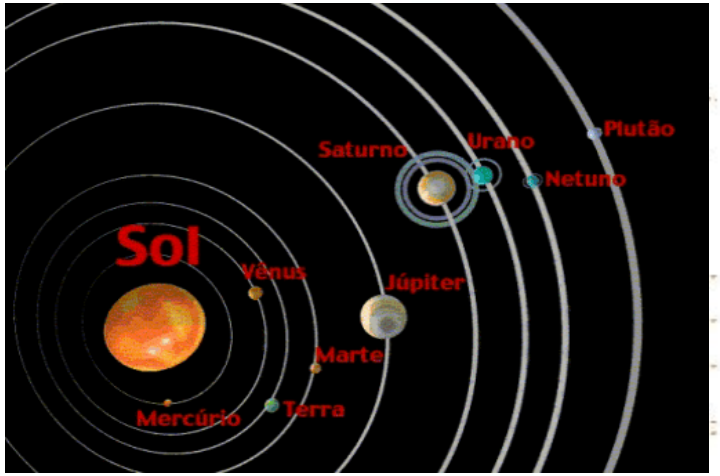
gravitação

- Primeiro a explicar corretamente o movimento dos planetas se tornando o fundador da mecânica celestial.
- Fundador da ótica moderna
- Em seu livro Dioptrice ele descreve formação de imagens por lentes.
- Explicou o processo de visão (refração da luz pelos olhos)
- Explicou a necessidade de ambos os olhos na percepção de profundidade.
- Primeiro a explicar o funcionamento de telescópios.
- Formulou a base para o cálculo integral.
- Primeiro a explicar que as marés é devido a Lua.
- Primeiro a utilizar a paralaxe estelar para explicar a distância entre as estrelas, campo esse que se chama Astrometria.
- Primeiro a sugerir que o Sol gira em torno de si mesm
- Derivou o ano de nascimento de Cristo.
- Primeiro a determinar logaritmos puramente da matemática e não das tábulas de Napier.

Johannes Kepler







Primeira Lei de Keppler

Todos os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um de seus focos.

Uma elipse é uma curva geométrica para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Os pontos fixos são chamados focos.

No sistema solar, o Sol está em um dos focos.

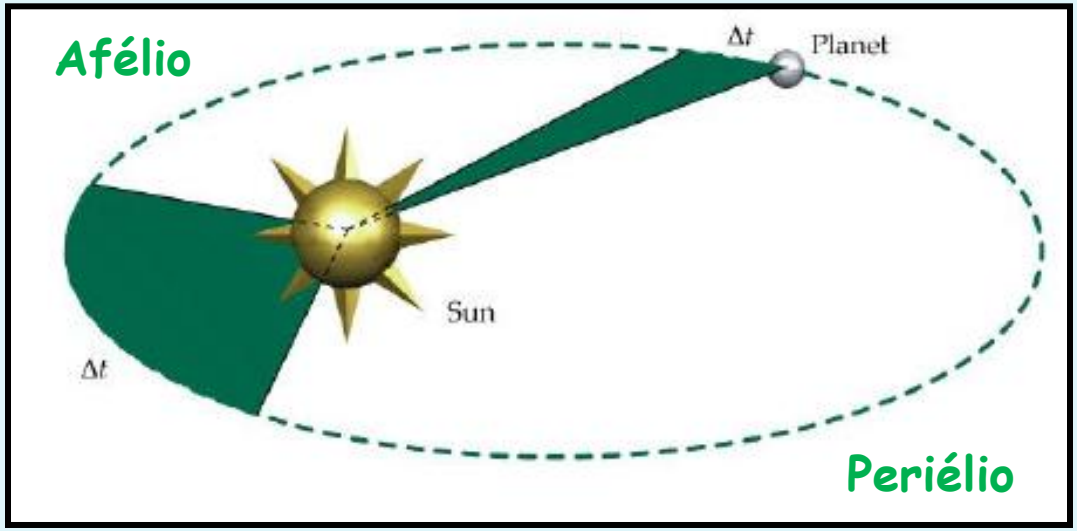
Para a Terra, a órbita é praticamente circular

Periélio: $1{,}48 \times 10^{11}$ m

Afélio: $1{,}52 \times 10^{11}$ m

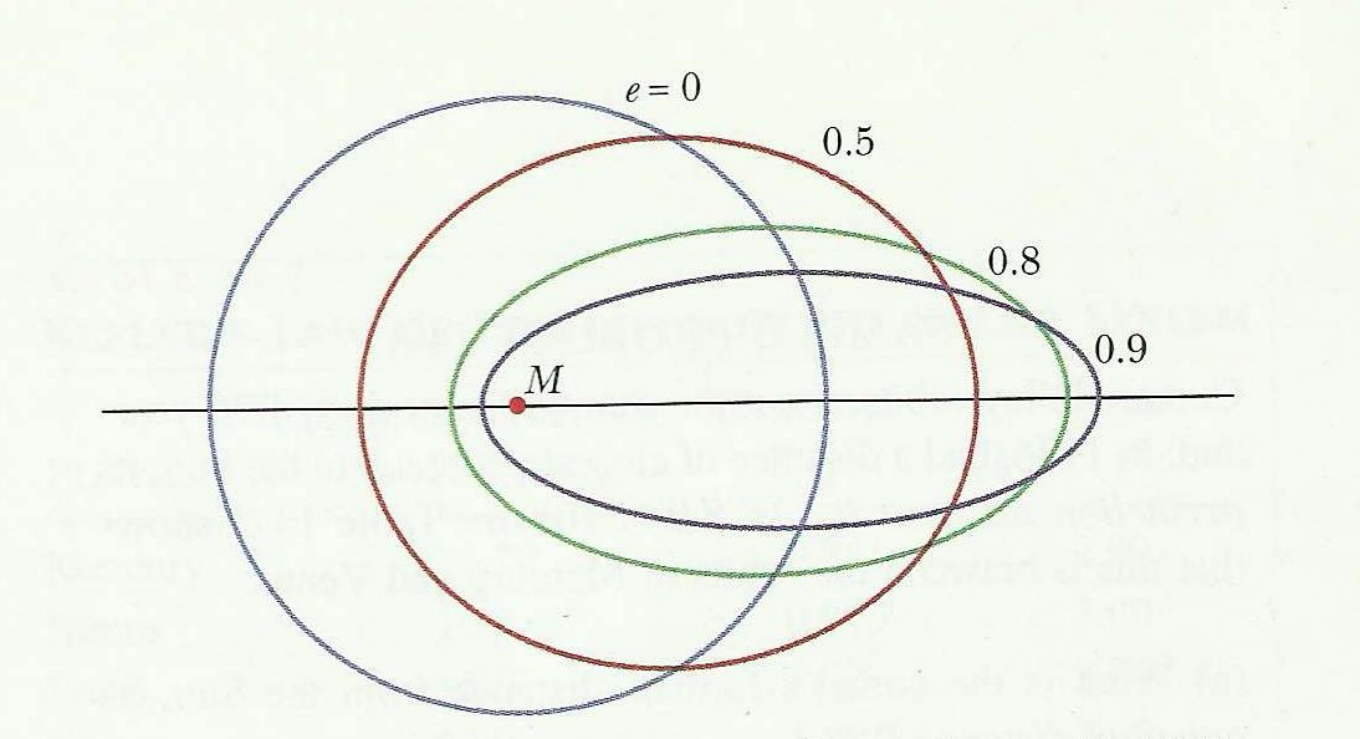
Segunda Lei de Keppler

Uma linha ligando qualquer planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.



Essa lei, como veremos adiante, é uma consequencia da conservação do momento angular para forças centrais.

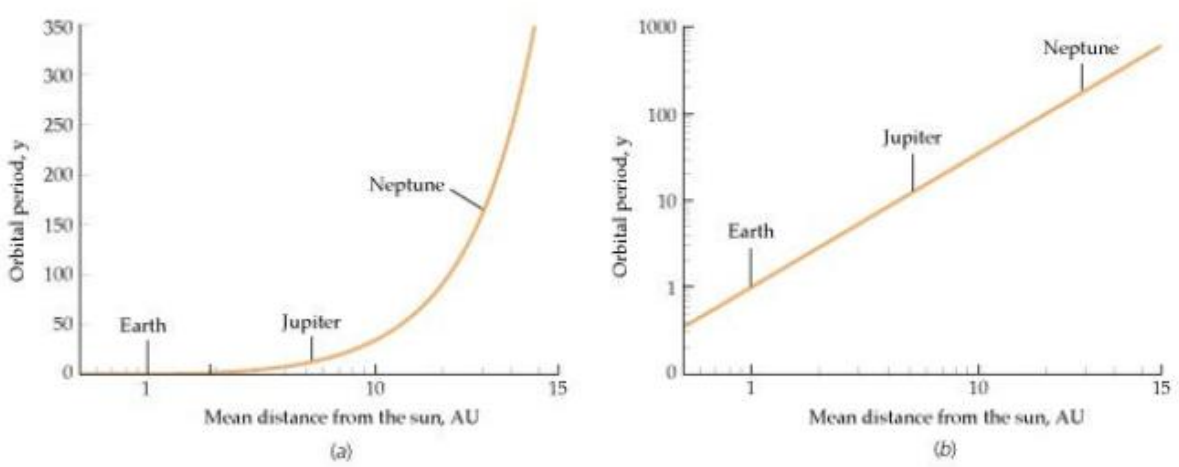
Segunda Lei de Keppler



Terceira Lei de Keppler

O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita.

$$\frac{T^2}{R^3} = const.$$

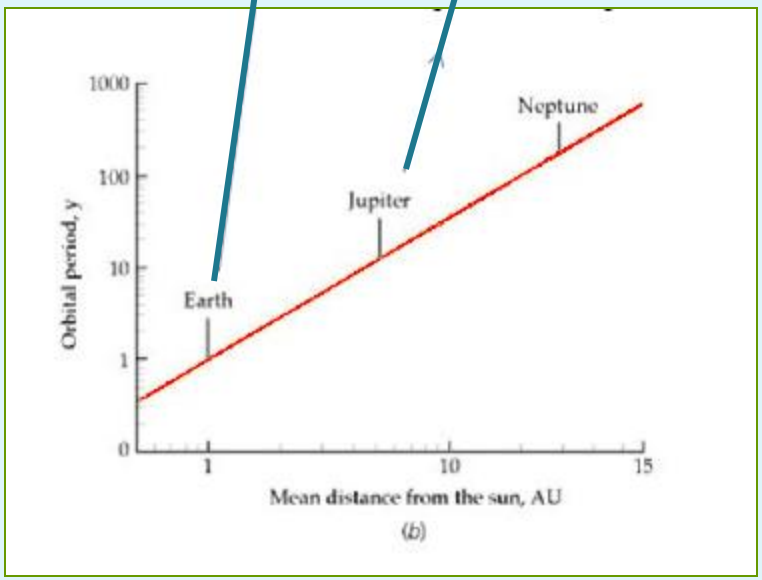


Unidade Astronômica (UA)

$$1UA = 1{,}50x10^{11}\,m$$

Sabendo-se que o raio orbital médio de Júpiter é 5.2 UA, determine o período de sua

$$\frac{T^2{}_{Terra}}{R^3{}_{Terra}} = \frac{T^2{}_{Jupiter}}{R^3{}_{Jupiter}} = const.$$



$$\frac{T^2{}_{Terra}}{R^3{}_{Terra}} = const. = \frac{1ano^2}{UA^3}$$

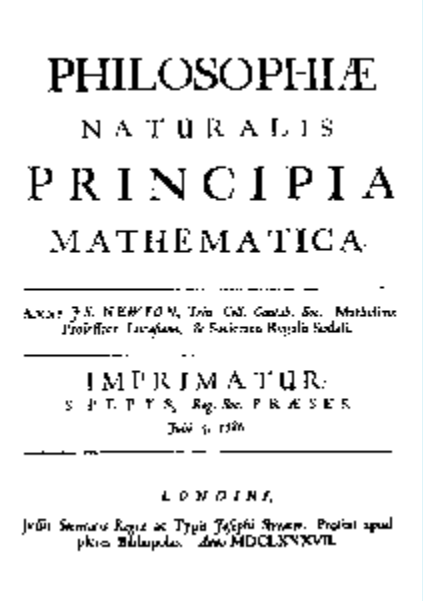
Unidade Astronômica (UA)

$$1UA = 1{,}50x10^{11}\,m$$

$$\frac{T^2{}_{Jupiter}}{R^3{}_{Jupiter}} = const.$$

$$T_{Jupiter} = 11.9anos$$

Leis de Newton para gravitação.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

IMPRIMATUR:
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Força de atração entre duas massas.

Henry Cavendish mediu G pela primeira vez em 1798 e obteve 1% de precisão.

A precisão atual é de 1 parte em 10.000.

Dentre todas as constantes universais, G é a menos precisa!

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$$

Leis de Newton para gravitação.

Comparação entre aceleração de uma partícula próxima a superfície da Terra e a aceleração da Lua em seu movimento em torno da Terra.

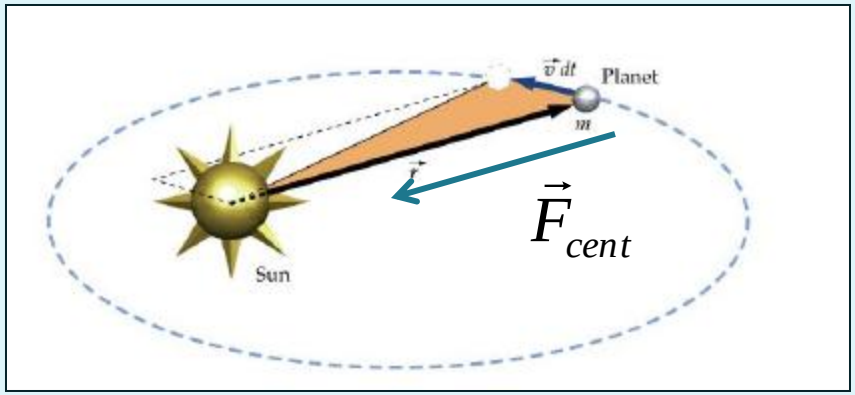
$$a_L = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 2{,}71\times10^{-3} m/s^2$$

Usando a constante gravitacional e o fato de que a distância Terra-Lua é cerca de 60 vezes o raio da Terra, temos:

$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2} = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{GM_T}{r^2} = g = 9{,}78 m/s^2$$

$$a_L = \frac{GM_T}{3600R_T^2} = \frac{g}{3600} = 2{,}78\times10^{-3} m/s^2$$

De acordo com Newton, a força de atração dos planetas pelo Sol é uma força central (força centrípeta) para que o movimento seja circular.



Força Central

$$\vec{F} = -\frac{mv^2}{R}\hat{r}$$

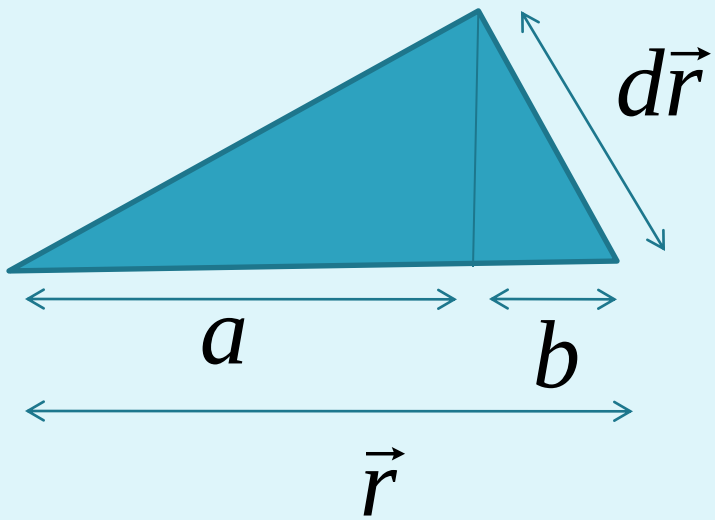
$$\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{r^2}\hat{r}$$

Força Central não provoca Torque pois é perpendicular ao deslocamento

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \vec{L} = const.$$

Momento angular se conserva !

Área e produto vetorial.



$$dA = \frac{a \cdot dr \cdot sen\alpha}{2} + \frac{b \cdot dr \cdot sen\alpha}{2}$$

$$dA = \frac{(a+b) \cdot dr \cdot sen\alpha}{2}$$

$$dA = \frac{r \cdot dr \cdot sen\alpha}{2} = \left| \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{2} \right|$$

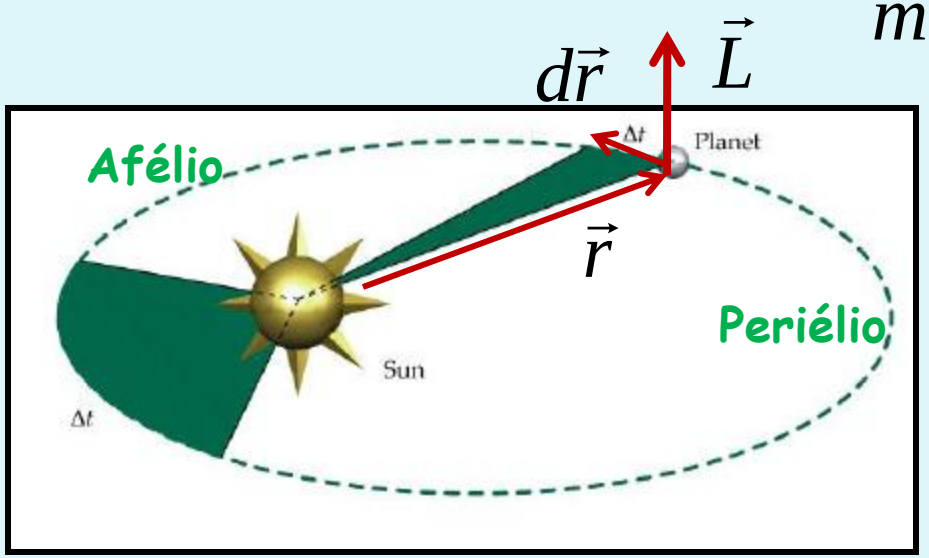
$$\frac{dA}{dt} = \left| \tfrac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \left| \tfrac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \right|$$

Segunda Lei de Keppler de acordo com as leis de Newton

Uma linha ligando qualquer planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

$$\frac{dA}{dt} = \left|\tfrac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}\right|$$

$$m\frac{dA}{dt} = \left|\tfrac{1}{2}\vec{r}\times m\vec{v}\right| = \left|\tfrac{1}{2}\vec{r}\times\vec{p}\right| = \tfrac{1}{2}L$$



$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}\frac{L}{m} = const$$

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}\vec{r}_a\times\vec{v}_a = \tfrac{1}{2}\vec{r}_p\times\vec{v}_p$$

Se o momento angular se conserva, então área por tempo também. Com isso temos áreas iguais em tempos iguais.

$$r_a\cdot v_a = r_p\cdot v_p \quad \Rightarrow \quad v_p < v_a$$

Terceira Lei de Keppler de acordo com as leis de Newton

$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2} = ma \qquad a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

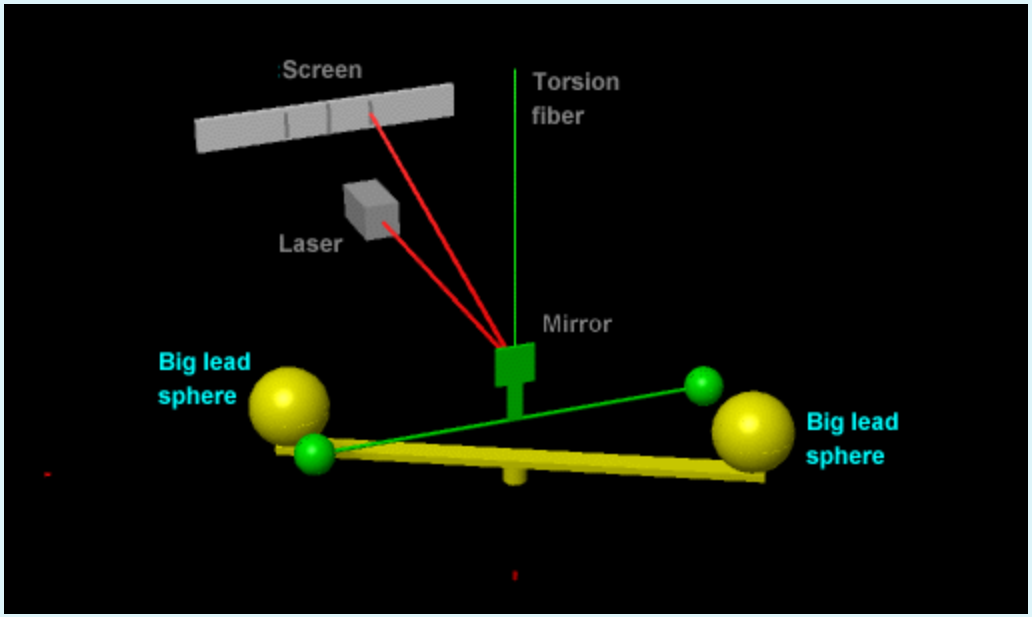
Experiência de Cavendish para determinar G

Leis de Newton para gravitação.

Força de atração entre duas massas.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

http://www.youtube.com/watch?v=vWlCm0X0QC0



Henry Cavendish mediu G pela primeira vez em 1798 e obteve 1% de precisão.

A precisão atual é de 1 parte em 10.000.

Dentre todas as constantes universais, G é a menos precisa!

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$$

Peso longe da superfície da Terra

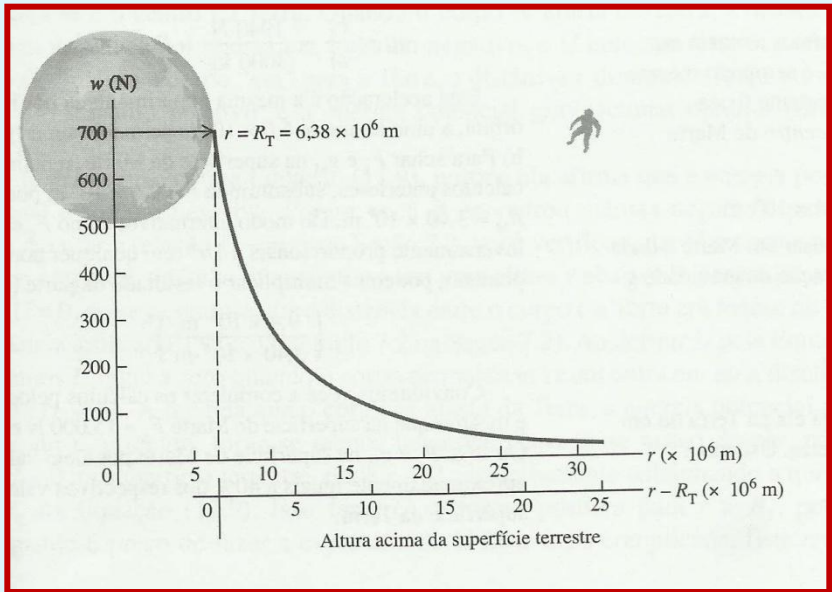
Definimos o peso de um corpo como sendo a força de atração gravitacional. Quando um corpo está próximo da superfície da Terra podemos desprezar as outras forças gravitacionais.

$$P = F_g = \frac{GM_T m}{R_T^2} = mg \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}78 m/s^2$$

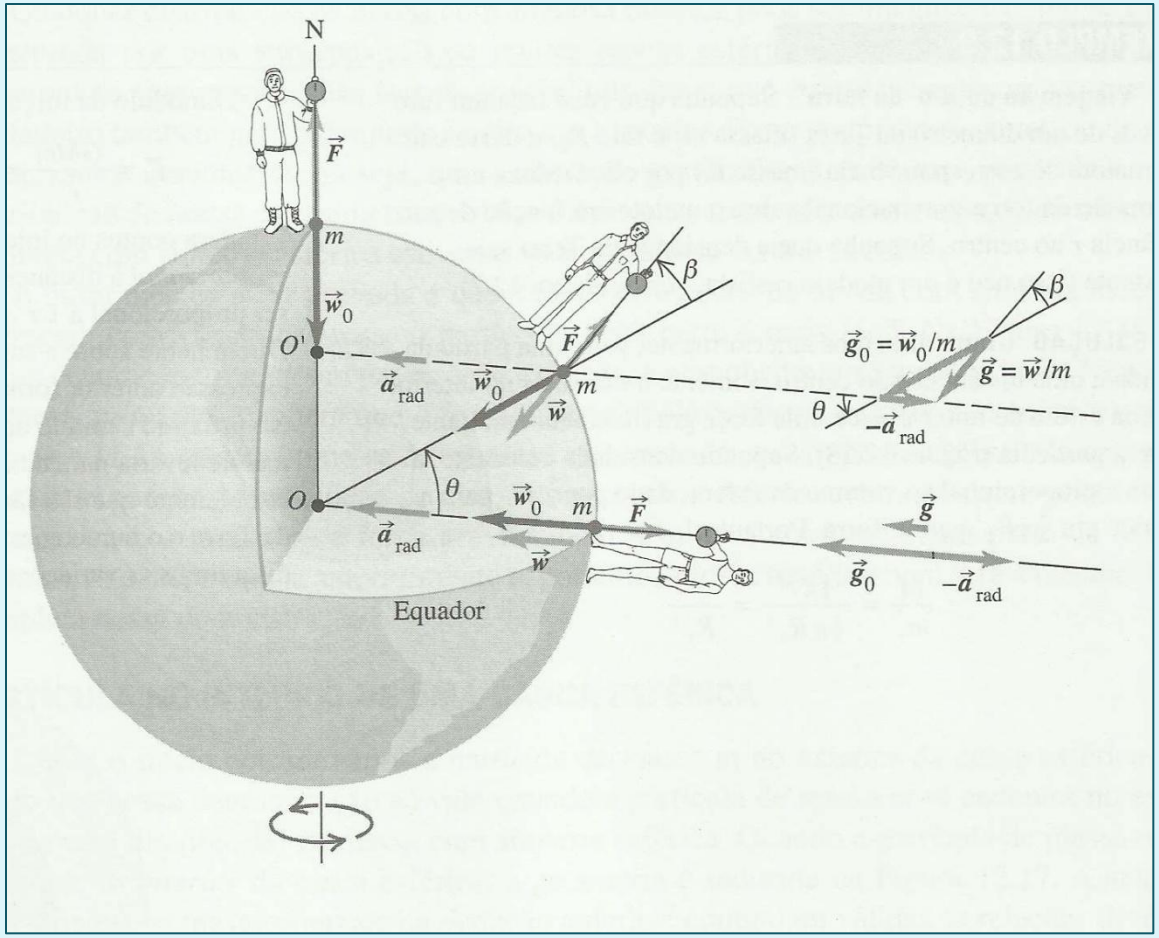
Em um ponto bem acima da superfície da Terra situado a uma distância r do centro da Terra (a uma altura r-RT), o peso de um corpo é dado por:

$$P = F_g = \frac{GM_T m}{r^2} \qquad g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$$

Isso significa que g não é constante para distância longe da superfície da Terra e depende da distância r.



Peso aparente devido força centrífuga



No equador

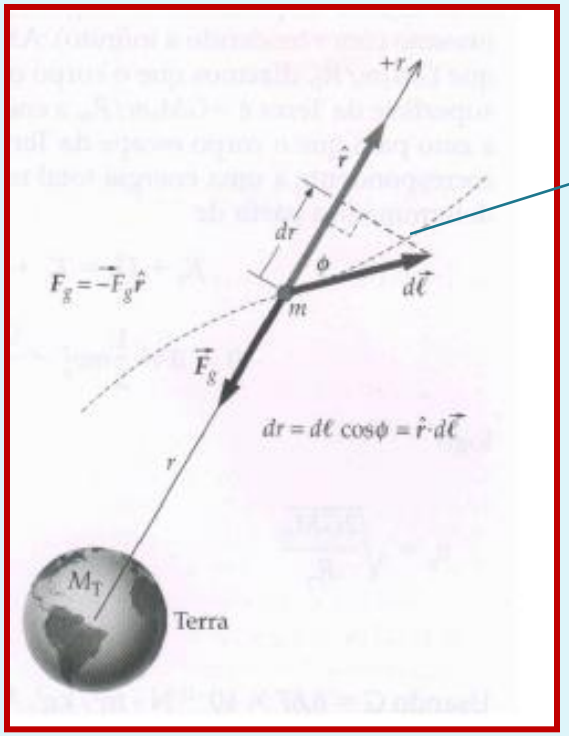
$$P = P_0 - m\frac{v^2}{R_T}$$

$$g = g_0 - \frac{v^2}{R_T}$$

Energia Potencial gravitacional

Próximo a superfície da Terra, a força gravitacional é a força peso, P=mg, e a energia Potencial gravitacional U=mgh.

Longe da superfície da Terra a força gravitacional depende da distância e a energia potencial tem que ser redefinida.



$$\hat{r}d\vec{l} = dr$$

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{r^2}\hat{r} = -F_g\hat{r}$$

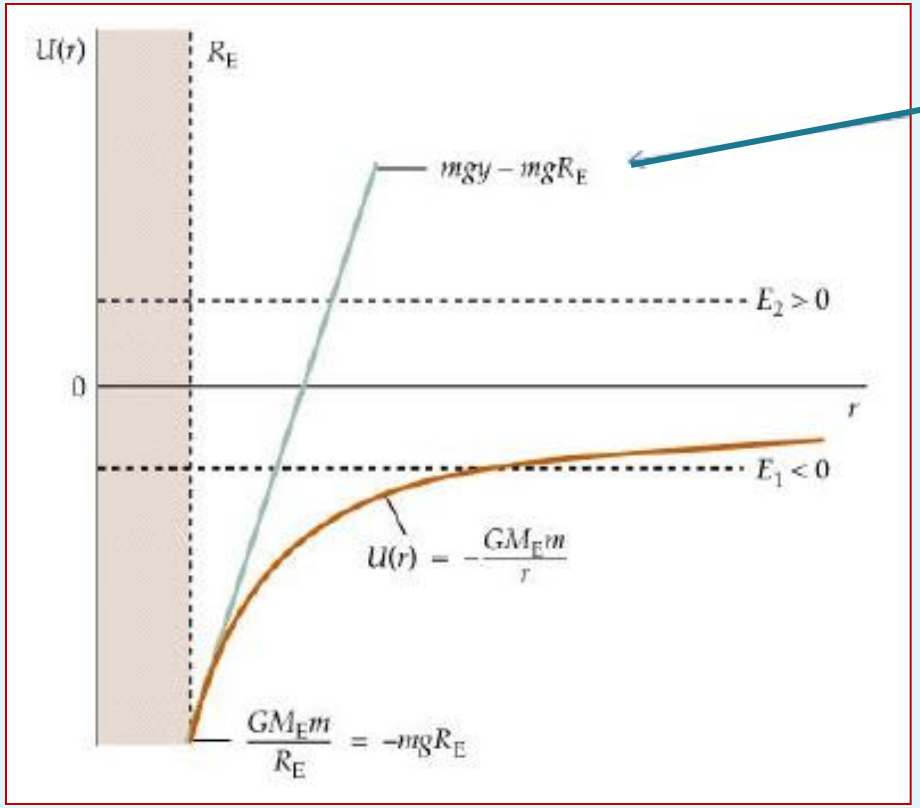
$$dU = -\vec{F}_g d\vec{l}$$

$$dU = F_g\hat{r}d\vec{l}$$

$$dU = F_g dr = \frac{GM_T m}{r^2}dr$$

Energia Potencial gravitacional

$$dU = F_g dr = \frac{GM_T m}{r^2} dr \qquad U = GM_T m \int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{GM_T m}{r} + U_0$$



Próximo a superfície

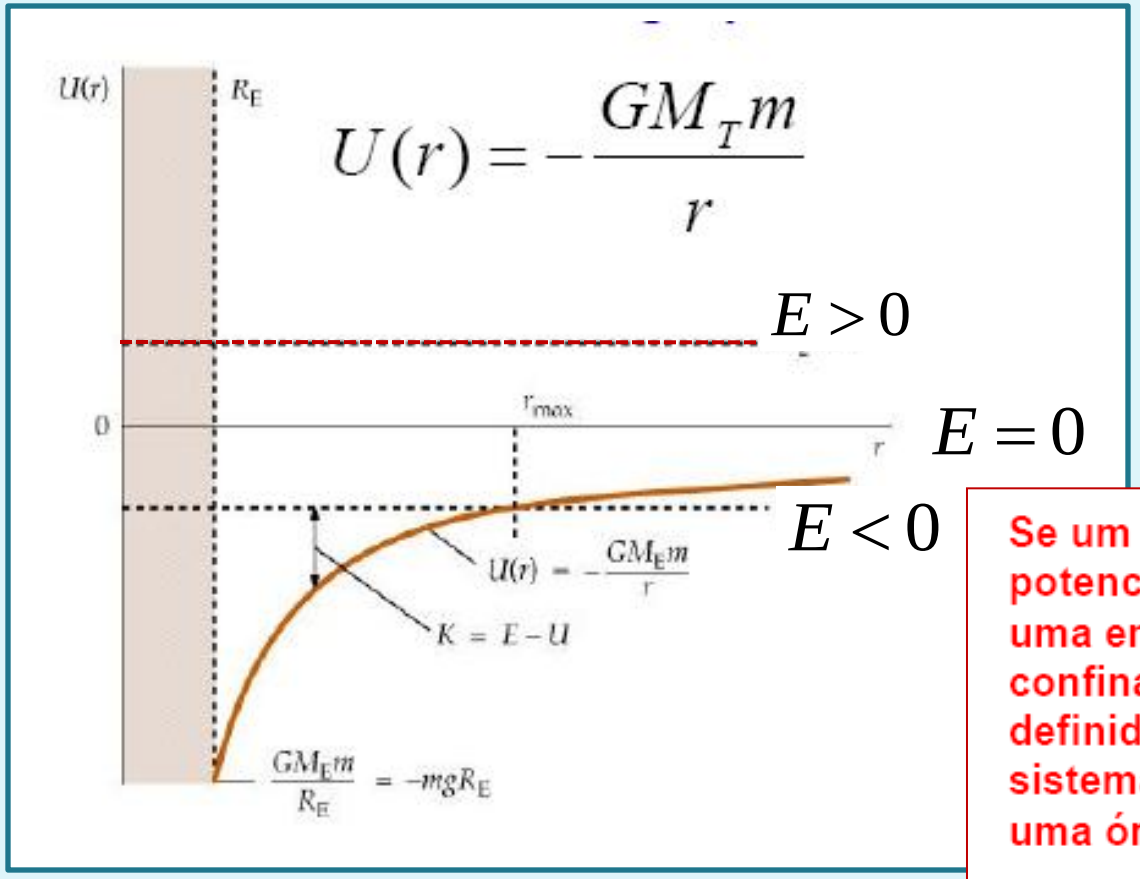
U=mgh

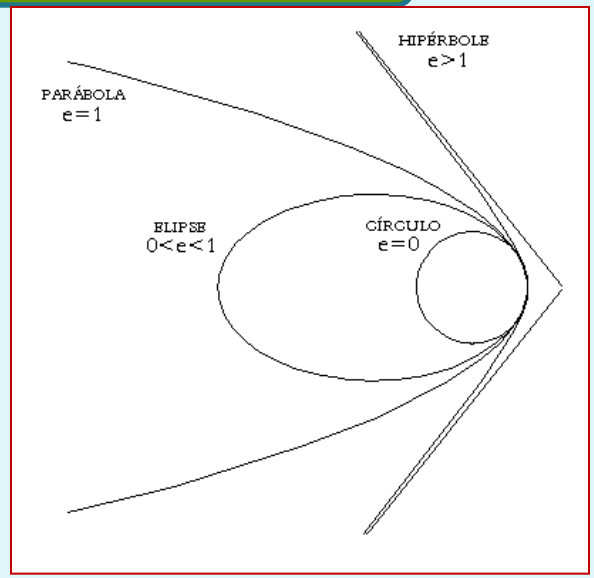
Adota-se U_0=0.

A energia potencial gravitacional é nula para uma distância muito longa (infinito).

$$U = -\frac{GM_T m}{r}$$

Energia Potencial gravitacional e energia mecanica





Se um corpo submetido à energia potencial gravitacional terrestre tiver uma energia mecânica E<0, ele estará confinado a uma região do espaço definida por r_{max}. Dizemos que o sistema é ligado e deverá descrever uma órbita fechada (elíptica).

Para E>0, o sistema não é ligado e a órbita será hiperbólica.

(Para E=0, o sistema não é ligado e a órbita será parabólica.)

Energia Potencial gravitacional velocidade de escape

Para E=0

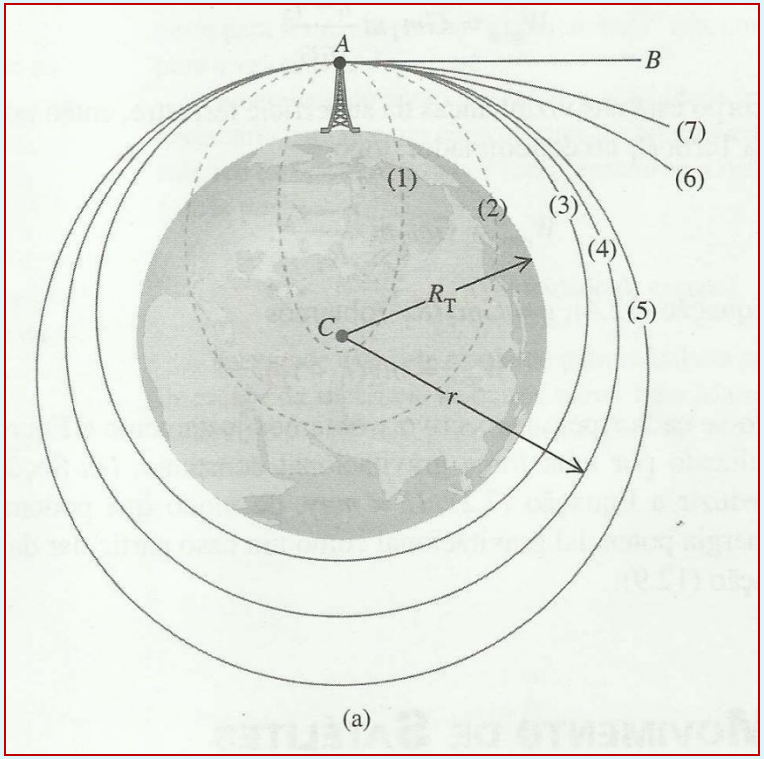
Velocidade de escape

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$0 = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G M_T m}{R_T}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}$$

$$v_e = 11.200 m/s \approx 40.000 Km/h$$



Exemplo

Um projétil é disparado verticalmente pra cima com uma velocidade inicial de 8,0 km/s.

a) Determine a altura máxima que ele atinge.

b) Se a velocidade inicial for 15 Kms/s, determine sua velocidade para uma posição distante da Terra.

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$-\frac{GM_T m}{r_f^2} = \tfrac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T^2}$$

$$R_T = 6380 km$$

$$M_T = 5{,}97 \times 10^{24} kg$$

$$r_f = 1{,}3 \times 10^7 m$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\tfrac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GM_T m}{r_f^2} = \tfrac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T^2}$$

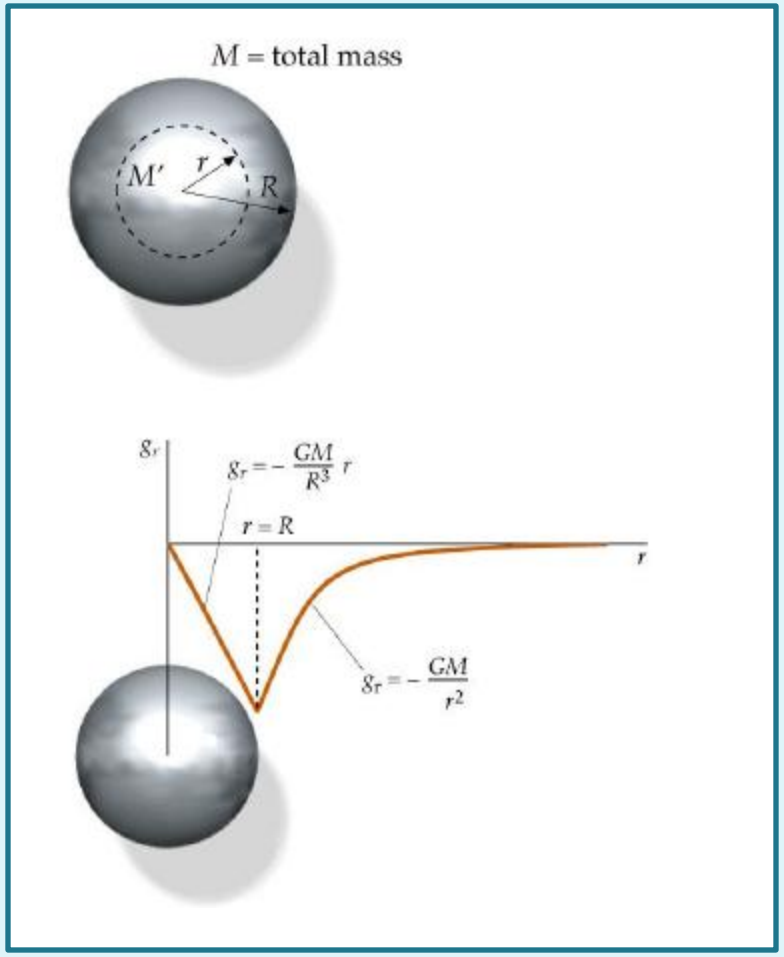
$$r_f = \infty$$

$$\tfrac{1}{2} m v_f^2 = \tfrac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T^2}$$

$$v_f = 1{,}0 \times 10^4 m/s = 10 km/s$$

Campo gravitacional dentro de uma esfera maciça e homogenea

Dentro de uma esfera maciça em um ponto a uma distância r do centro, o campo gravitacional será devido a massa M´, que esteja em um raio inferior a r.



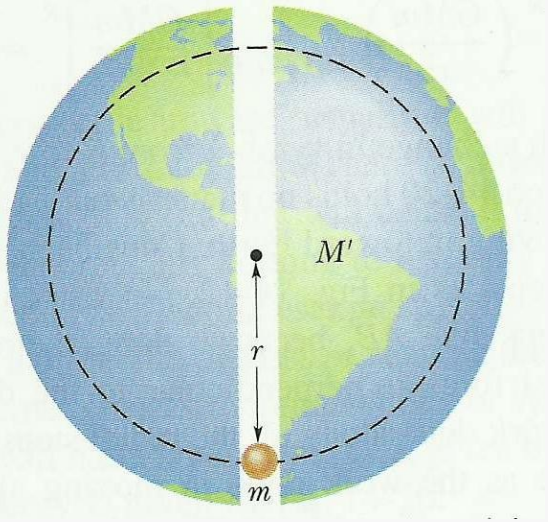
$$M' = \frac{V'}{V} M_T = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} M_T = \frac{r^3}{R_T^3} M_T$$

$$g_r(r) = \frac{GM'}{r^2} = \frac{GM_T}{r^2}\frac{r^3}{R_T^3} = \frac{GM_T}{R_T^3} r$$

$$\vec{g}_r(r) = -\frac{GM_T}{R_T^3} r\hat{r}$$

Viagem ao centro da Terra

Suponha que voce faça um furo através de um diâmetro da Terra pule. Qual seria a força gravitacional em função de r? Suponha que a densidade da Terra seja constante.



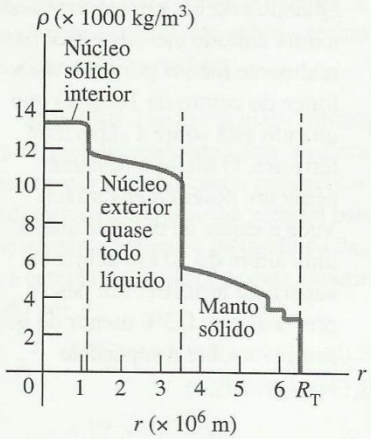


FIGURA 12.7 A densidade diminui à medida que aumenta a distância ao centro da Terra.

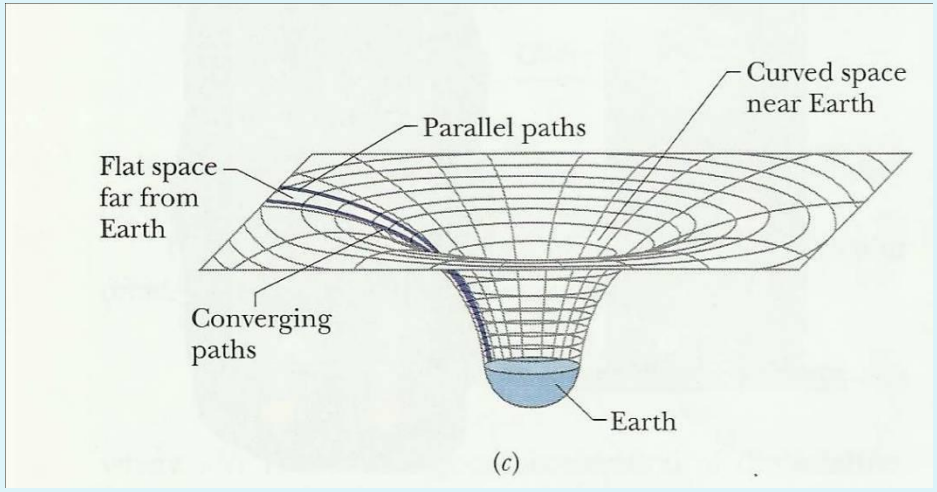
Usando a solução do problema anterior.

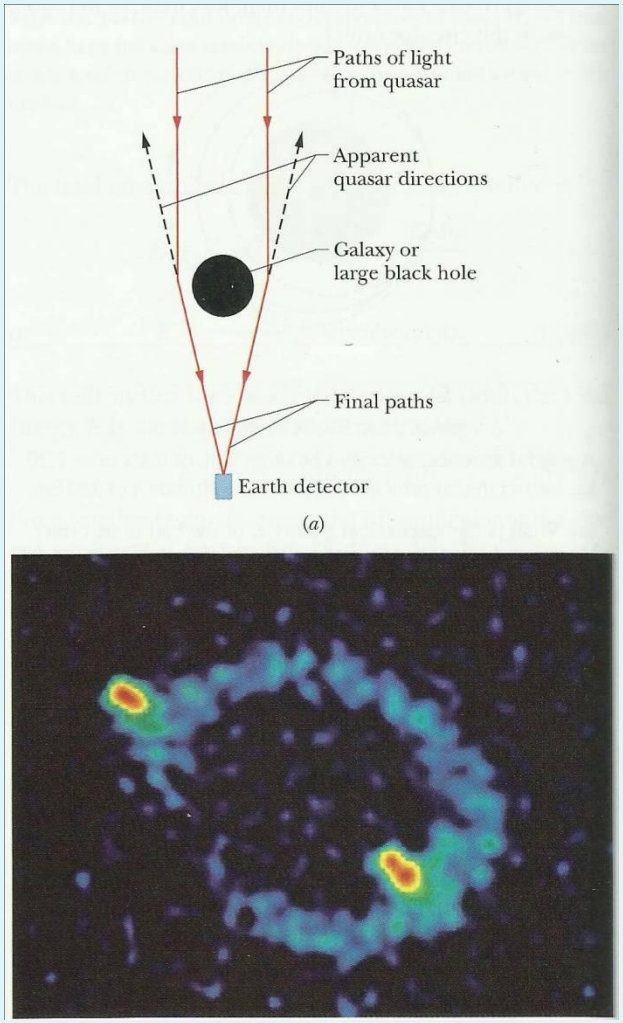
$$\vec{g}_r(r) = -\frac{GM_T}{R_T^3} r\hat{r}$$

$$F_g = \frac{GM'm}{r^2} = g(r)m = \frac{GM_T}{R_T^3} rm$$

$$F_g = \frac{GM_T m}{R_T^3} r$$

gravitação


Curved space
near Earth
Parallel paths
Flat space
far from
Earth
Converging
paths
Earth
(c)


Paths of light
from quasar
Apparent
quasar directions
Galaxy or
large black hole
Final paths
Earth detector
(a)