4320196 – Física para Engenharia II - Prova de Recuperação - 2011

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$$c = 3\times 10^8 \text{ m/s} \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& \gamma(v)\,(x-vt) \\ y' &=& y \\ z' &=& z \\ t' &=& \gamma(v)\left(t-\frac{v.x}{c^2}\right)\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'_x &=& \frac{u_x-v}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \\ u'_{y,z} &=& \frac{u_{y,z}}{\gamma(v)\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\end{array}\right.$$

$$\vec{p} = \gamma(u)m_0\vec{u} \qquad E = \gamma(u)m_0c^2$$

$$E = K + m_0c^2 \qquad E^2 = (pc)^2 + \left(m_0c^2\right)^2$$

$$\gamma^2_{(u)}u^2 = \left(\gamma^2_{(u)} - 1\right)c^2 \qquad m(u) = \gamma(u)m_0$$

Formulário (cont.):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\quad k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t+\varphi);\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right);\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a+bt)$$

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2-\Omega^2}\cos(\Omega t+\varphi)$$

$$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi(\Omega));$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+\gamma^2\Omega^2}};\tan\varphi(\Omega) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

$$Q = \frac{A(\omega_0)}{A(0)};Q = \frac{\omega_0}{\gamma};\tau_d = \gamma^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

$$y(x,t) = A\,\cos(kx \mp \omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{\omega}{k};\ \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f};\ k = \frac{2\pi}{\lambda}; v = \lambda.f$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}; I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2A^2; k_n = n\frac{\pi}{L}$$

$$\cos(a\pm b) = \cos(a)cos(b) \mp \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a\pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \text{sen}(b)\cos(a)$$

$$f = f_0\frac{\left(1\pm\frac{u}{v_s}\right)}{\left(1\mp\frac{V}{v_s}\right)} \quad \left\{\begin{array}{l} u \to \text{observador} \\ V \to \text{fonte}\end{array}\right.$$

$$f = f_0\frac{\sqrt{1\mp\frac{v}{c}}}{\sqrt{1\pm\frac{v}{c}}}\ ;\ \text{sen}\ \alpha = \frac{v_s}{V}$$

$$m\vec{a'} = \vec{F} - m\vec{A} = \vec{F} + \vec{F_{\text{in}}}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{Cor} = \left(m\omega^2 r + 2m\omega u'_\theta\right)\hat{r} - 2m\omega u'_r\,\hat{\theta}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

Q1.1 - Considere uma barra de comprimento próprio $l_0 = 50$ m com luzes em suas extremidades A e B que se acendem uma vez.

Para um observador em um referencial inercial no qual a barra está em repouso, a luz na extremidade A acende 10^{-7}s antes do que a luz na extremidade B. Para um outro observador viajando com velocidade constante v em uma direção paralela ao eixo da barra e no sentido $A \to B$, as luzes se acendem simultaneamente.

(a) [0,5] É possível haver relação de causalidade entre os dois eventos? Justifique com cálculos.

(b) [0,5] Calcule a velocidade v do segundo observador.

(c) [0,5] Calcule o comprimento da barra medido pelo segundo observador.

Solução Q1.1:

(a) No Ref. S, os eventos A e B ocorrem nas posições x_A,x_B e nos instantes t_A,t_B respectivamente sendo que $t_B - t_A = 10^{-7}$ s e $x_B - x_A = 50$ m. Para haver relação causal entre os dois eventos, um sinal teria que se propagar de x_A a x_B (distância $\Delta x = 50$m) em um intervalo de tempo $\Delta t = 10^{-7}$ no referencial S.

Logo, para que o envento A seja a causa do do evento B, o suposto sinal teria que se propagar, em S, com velocidade $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 5 \times 10^8$ m/s, que é maior que c, o que é impossível segundo os postulados da relatividade. Assim, *não é possível* que haja relação de causalidade entre os dois eventos.

(b)No Ref. S' os eventos são simultâneos de modo que $t'_B = t'_A$. Pelas Transf. de Lorentz, $t' = \gamma(v)\left(t - \frac{v.x}{c^2}\right)$, logo

$$t'_B - t'_A = \gamma(v)\left(\Delta t - \frac{v.\Delta x}{c^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{3}{5}$$

Logo, $\boxed{v = \frac{3c}{5}}$.

(c) Como as luzes se acendem simultaneamente em S', a diferença de coordenadas dos eventos $x'_B - x'_A$ é uma medida do comprimento da barra l' em S'. Pela TL: Como $x = \gamma(v)\left(x' + vt'\right)$, então

$$x_B - x_A = \gamma_v\left((x'_B - x'_A) + v.0\right) \Rightarrow l_0 = \gamma(v)l' \Rightarrow l' = \frac{l_0}{\gamma}$$

Como $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{5}{4}$, temos $\boxed{l' = \frac{4\times 50}{5} = 40 \text{ m}}$.

Solução alternativa: Para o observador em S' a barra se desloca com velocidde $-v$, de modo que, por contração de Lorentz, $l' = \frac{l_0}{\gamma}$. Logo, como $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{5}{4}$, temos $l' = \frac{4\times 50}{5} = 40$ m.

Q1.2 - Dois corpos A e B de massas de repouso $m_A = 3,5$ MeV/c^2 e $m_B = 0,5$ MeV/c^2 respectivamente viajam em sentidos opostos mas com mesma velocidade em módulo $|u| = \frac{4c}{5}$ em um referencial inercial S. Os dois corpos sofrem uma colisão completamente inelástica, formando um único corpo C.

(a) [0,5] Determine a velocidade do corpo C (magnitude e sentido) no referencial S.

(b) [0,5] Determine a massa de repouso do corpo C.

Solução Q1.2:

(a) Na situação inicial, $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$ para os dois corpos.

Considerando que A se move na direção positiva, temos, por conservação de momento e energia relativísticas:

$$\begin{aligned}
\gamma_u m_A u - \gamma_u m_B u &= \gamma_C m_C u_c \Rightarrow \gamma_C m_C u_c = \gamma_u (m_A - m_B) u \\
\gamma_u m_A c^2 + \gamma_u m_B c^2 &= \gamma_C m_C c^2 \Rightarrow \gamma_C m_C = \gamma_u (m_A + m_B)
\end{aligned}$$

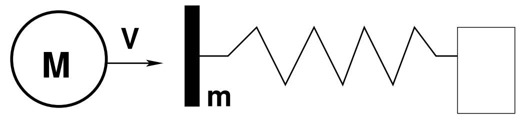
Logo, substituindo na 1a equação, temos $\gamma_u (m_A + m_B) u_c = \gamma_u (m_A - m_B) u \Rightarrow u_c = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} u$.

Assim, $\boxed{u_c = \frac{3}{4}\frac{4}{5}c = \frac{3c}{5} \text{ na mesma direção e sentido da velocidade do corpo } A}$.

(b) Da segunda eq. acima, $m_C = \frac{\gamma_u}{\gamma_C}(m_A + m_B)$. Como $\gamma_C = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{5}{4}$, temos

$\boxed{m_C = \frac{5}{3}\frac{4}{5}(4) = \frac{16}{3} \text{ MeV/c}^2}$.

Q2 - Um corpo de massa $M = 600$ g colide com uma plataforma de massa $m = 200$ g, inicialmente em repouso e presa a uma mola de constante $k = 0.8$ N/m e massa desprezível (a outra extremidade da mola mantém-se presa a uma parede). No momento da colisão, a mola está relaxada e a velocidade do corpo é $v_0 = 1$ m/s. O sistema está imerso imerso em um fluido e a constante de amortecimento é $\rho = 0,8$ kg/s.



Se a colisão entre o corpo e a plataforma for *completamente inelástica*, determine:

(a) [0,5] O regime de oscilação.

(b) [0,4] A velocidade do corpo no instante logo após a colisão.

(c) [1,6] A posição do corpo em função do tempo $x(t)$ (considere $x = 0$ a posição de equilíbrio e $t = 0$ o instante logo após a colisão).

Solução Q2:

(a) Como a colisão é totalmente inelástica, a massa total presa à mola é $M_T = M + m$, de modo que a frequência natural será $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M_T}} = \sqrt{\frac{0{,}8}{0{,}6+0{,}2}} = 1$ rad/s .

A constante $\gamma = \frac{\rho}{M_T} = \frac{0{,}8}{0{,}8} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$, de modo que $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$, o que indica $\boxed{\textit{amortecimento subcrítico}}$.

(b) Por conservação de momento na colisão: $Mv_0 = (M + m)v$, logo

$\boxed{v = \frac{M}{M+m} v_0 = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ m/s}}$.

(c) Para o amortecimento subcrítico, a solução da equação de movimento é $x(t) = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \varphi)$ onde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ e A e φ são constantes determinadas pelas condições iniciais: $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v = 0,75$ m/s.

Sendo $\dot{x}(t) = -Ae^{-\gamma t/2}\left(\frac{\gamma}{2}\cos(\omega t + \varphi) + \omega \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)\right)$

$$\begin{cases} A\cos\varphi &= 0 \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \\ -A\left(\frac{\gamma}{2}\cos\varphi + \omega\mathrm{sen}\varphi\right) &= +0,75 \Rightarrow A = \frac{3}{4\omega}; \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Como $\omega = \sqrt{1 - 0,25} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ rad/s $\rightarrow A = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m e temos:

$\boxed{x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ metros}}$.

Q3 - Uma expressão usada para expressar a energia potencial U de uma molécula diatômica em função da separação r entre os átomos é:

$$U(r) = A\left[\frac{(R_0)^7}{8r^8} - \frac{1}{r}\right]$$

onde R_0 e A são constantes positivas com dimensões de comprimento e energia $\times$ comprimento respectivamente. Usando essa expressão:

(a) [0,5] Obtenha a expressão para a força de ligação em função de r.

(b) [0,5] Calcule a separação de equilíbrio da molécula.

(c) [0,7] Escreva uma expressão aproximada para $U(r)$ em torno da separação de equilíbrio.

(d) [0,3] Calcule a "constante de mola efetiva" para pequenas oscilações em torno da separação de equilíbrio.

Solução Q3:

a) A força de ligação é dada por $F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}$:

$$\frac{dU(r)}{dr} = A\left[-8\frac{(R_0)^7}{8r^9} + \frac{1}{r^2}\right] \Rightarrow F(r) = A\left[\frac{(R_0)^7}{r^9} - \frac{1}{r^2}\right]$$

b) Na posição de equilíbrio $\bar{r}$, temos $F(\bar{r}) = 0$. Logo

$$0 = A\left[\frac{(R_0)^7}{\bar{r}^9} - \frac{1}{\bar{r}^2}\right] \Rightarrow (R_0)^7.\bar{r}^2 = \bar{r}^9 \Rightarrow \bar{r} = R_0$$

Logo, $\boxed{\bar{r} = R_0}$.

c) A posição de equilíbrio calculada acima corresponde a um mínimo de $U(r)$ já que a derivada 2a. de $U(r)$ é positiva em $r = R_0$:

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2} = A\left[+9\frac{(R_0)^7}{r^{10}} - 2\frac{1}{r^3}\right] \Rightarrow \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=R_0} = A\left(\frac{9}{(R_0)^3} - \frac{2}{(R_0)^3}\right) = \frac{7A}{(R_0)^3} > 0$$

Nesse caso, o potencial $U(r)$ pode ser aproximado em torno de R_0 por um potential harmônico

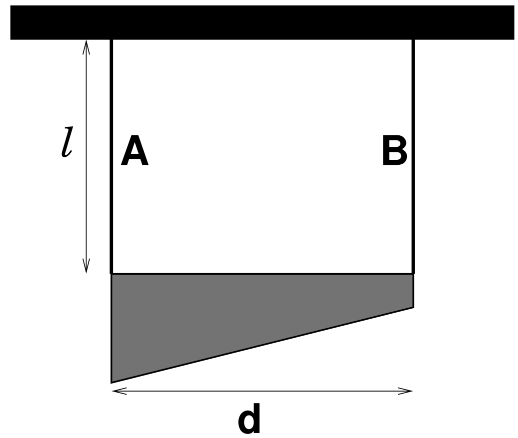
$$U(r) \approx U(R_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=R_0}(r-R_0)^2 = \frac{-7A}{8R_0} + \frac{1}{2}\frac{7A}{(R_0)^3}(r-R_0)^2$$

d) Em torno da posição de equilíbrio, o potencial $U(r)$ é semelhante ao do potencial de um sistema massa-mola com $x = r - R_0$:

$$U(x+R_0) - U(0) \approx \frac{1}{2}\frac{7A}{(R_0)^3}x^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

onde a constante de mola efetiva será dada por $\boxed{k = \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=R_0} = \frac{7A}{(R_0)^3}}$

Q4 - Uma viga irregular de comprimento d é suspensa pelas suas extremidades por dois cabos (A e B) de mesmo comprimento ℓ e mesma massa (vide figura). Um engenheiro percebe que é possível determinar a coordenada horizontal do centro de massa da viga x_{CM} batendo levemente nos cabos e medindo os tempos que os pulsos gerados levam para se propagar ao longo do comprimento de cada um dos cabos.
Fazendo a medida, o engenheiro percebe que o tempo t_A que um pulso leva para se propagar ao longo do cabo A é três vezes menor do que o tempo t_B que um pulso semelhante leva para percorrer a mesma distância no cabo B.
(quando necessário, expresse suas respostas em termos de d e/ou ℓ e/ou t_A e/ou t_B).



(a) [0,5] Calcule a razão entre as tensões nos cabos.

(b) [0,75] Calcule a coordenada horizontal do centro de massa da viga x_{CM} (medida em relação à extremidade esquerda).

Nos ítens abaixo, considere que a viga é suficientemente pesada de modo que as extremidades dos cabos possam ser consideradas fixas (sem movimento) e que as tensões nos cabos se mantenham as mesmas dos ítens (a) e (b).

(c) [1,0] Um vento forte faz os cabos vibrarem e o som emitido por ambos tem a mesma frequência. Se o cabo A estiver vibrando no 3^o harmônico, em qual harmônico o cabo B estará vibrando?

(d) [0,75] Se o cabo A estiver vibrando no 2^o harmônico e o cabo B no 7^o harmonico, calcule a frequência de batimento entre os sons gerados pelos dois cabos.

Solução Q4:

a) A velocidade do pulso no cabo A será $v_A = \ell/t_A$ e no cabo B $v_B = \ell/t_B$. Se $t_A = \frac{t_B}{3}$ então $v_A = 3v_B$.

A velocidade de propagação dos pulsos no cabo é $v = \sqrt{T/\mu}$ onde T é a tensão e μ a densidade linear de massa. Como ambos os cabos tem a mesma massa e mesmo comprimento, temos $\mu_A = \mu_B$, logo

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{T_A}{T_B}} = 3 \Rightarrow \boxed{\frac{T_A}{T_B} = 9}$$

b) Se $T_A = 9T_B$, para que a viga esteja em equilíbrio os torques em relação ao centro-de-massa devem se anular. Se x_{CM} é a posição horizontal do CM em relação ao cabo A:

$$T_A.x_{\text{CM}} = T_B.(d - x_{\text{CM}}) \Rightarrow \tfrac{d}{x_{\text{CM}}} = \tfrac{T_A}{T_B} + 1 = 10 \Rightarrow \boxed{x_{\text{CM}} = \tfrac{d}{10}}$$

c) Se o cabo A vibra no 3o Harmônico, $\ell = 3\frac{\lambda_A}{2} = 3\frac{v_A}{2f_A} \Rightarrow f_A = 3\frac{v_A}{2\ell}$.

No cabo B, a frequência será dada por $f_B = \frac{v_B}{\lambda_B}$. Como $f_A = f_B$, o comprimento de onda em B será

$$\tfrac{v_B}{\lambda_B} = 3\tfrac{v_A}{2\ell} \Rightarrow \lambda_B = \tfrac{2v_B}{3v_A}\ell = \tfrac{2}{9}\ell$$

ou seja $\ell = 9\frac{\lambda_B}{2}$, sendo que $\boxed{\text{o cabo B vibra no 9o Harmônico}}$.

d) Se o cabo A vibra no 2^o Harmônico, $\ell = 2\frac{\lambda_A}{2} = \frac{v_A}{f_A} \Rightarrow f_A = \frac{v_A}{\ell} = \frac{1}{t_A}$.

Se o cabo B vibra no 7^o Harmônico, $\ell = 7\frac{\lambda_B}{2} = \frac{7v_B}{2f_B} \Rightarrow f_B = \frac{7v_B}{2\ell} = \frac{7}{2t_B} = \frac{7}{6t_A}$.

A frequência de batimento será $\boxed{\Delta f = f_B - f_A = \frac{7-6}{6t_A} = \frac{1}{6t_A}}$ ou $\boxed{\Delta f = \frac{1}{2t_B}}$.