Cláudio Geraldo Schön

# Mecânica dos Materiais

São Paulo-SP 2010 Cláudio Geraldo Schön

# Mecânica dos Materiais

Apostila redigida para uso nos cursos "PMT2405 - Mecânica dos Materiais", "PMT2406-Mecânica dos Materiais Metálicos", "PMT5857-Tópicos Avançados em Fadiga dos Materiais" e "PMT5860-Teoria da plasticidade e da fratura dos materiais".

São Paulo-SP 2010

## FICHA CATALOGRÁFICA

Schön, Cláudio Geraldo

Mecânica dos Materiais: Apostila redigida para uso nos cursos "PMT2405- Mecânica dos Materiais" e "PMT5860-Teoria da plasticidade e da fratura dos materiais"/– 5 ed. – C. G. Schön.– São Paulo (2010). 366 p.

1. Materiais (propriedades mecânicas) I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais II.t.

# **SUMÁRIO**

Int	troduç	ão		p. 10					
1 Elementos de mecânica dos sólidos para a ciência dos materiais									
	1.1	Funda	mentos	p. 12					
		1.1.1	Deformação	p. 13					
		1.1.2	Tensão	p. 31					
		1.1.3	Trabalho de deformação	p. 33					
	1.2	Transf	ormação de referenciais	p. 34					
		1.2.1	Aplicação: Círculo de Mohr (2d)	p. 37					
	1.3	Estado	s Planos	p. 43					
		1.3.1	Estado Plano de Tensão	p. 44					
		1.3.2	Estado Plano de Deformação	p. 44					
2	Elast	ticidade	linear	p. 47					
	2.1	Fenom	nenologia da elasticidade linear	p. 47					
		2.1.1	Deformação causada por tensão normal	p. 47					
		2.1.2	Deformação produzida por tensão de cisalhamento	p. 50					
	2.2	Princíp	pio da superposição	p. 52					
		2.2.1	Lei de Hooke generalizada	p. 52					
		2.2.2	Compressibilidades	p. 55					
	2.3	Restriç	ções (Constraints)	p. 56					
	2.4	Anisot	ropia elástica	p. 58					

	2.5	Equaçõ	ões básicas da elasticidade nos estados planos e a função tensão	p. 62				
3	Conc	entrado	res de tensão e fundamentos de mecânica da fratura	p. 72				
	3.1	Concer	ntradores de tensão	p. 72				
		3.1.1	Fator de concentração de tensão $(K_t)$	p. 73				
	3.2	A solu	ção de Inglis para o furo central elíptico (1913)	p. 74				
		3.2.1	Definição de variáveis	p. 75				
		3.2.2	Relações constitutivas gerais	p. 76				
		3.2.3	Soluções particulares	p. 79				
	3.3	Critérie	o de Griffith (1921)	p. 86				
		3.3.1	Trabalhos posteriores	p. 90				
		3.3.2	Considerações filosóficas	p. 91				
	3.4	A form	a da ponta da trinca	p. 92				
		3.4.1	Módulo de Coesão	p. 94				
	3.5	Mecân	ica da Fratura Elástica Linear	p. 95				
		3.5.1	Modos de carregamento de trinca	p. 96				
		3.5.2	Efeito da geometria do sistema	p. 100				
		3.5.3	Tenacidade à fratura	p. 101				
	3.6	Integri	dade estrutural e efeitos de escala	p. 102				
		3.6.1	Distribuição de Weibull	p. 107				
4	Plast	cicidade		p. 111				
	4.1	Parâme	etros da curva tensão – deformação (o ensaio de tração)	p. 114				
	4.2	Equação de Ludwik - Hollomon						
	4.3	Instabi	lidades plásticas	p. 121				
		4.3.1	O tratamento de Argon para as instabilidades plásticas	p. 121				
		4.3.2	Estricção	p. 123				

		4.3.3	Localização da deformação em cisalhamento	p. 126
		4.3.4	Empescoçamento em polímeros	p. 127
		4.3.5	Escoamento descontínuo em aços carbono	p. 129
		4.3.6	Escoamento serrilhado	p. 130
	4.4	Efeito	Bauschinger	p. 133
5	Plast	ticidade	em solicitações multiaxiais: critérios de escoamento e de falha	p. 135
	5.1	Tensão	equivalente	p. 135
		5.1.1	Critério de von Mises	p. 136
		5.1.2	Critério de Treska	p. 138
		5.1.3	Representação gráfica dos critérios de escoamento	p. 138
	5.2	Teoria	da deformação elasto-plástica em deformações finitas	p. 142
		5.2.1	Termodinâmica da deformação elasto-plástica	p. 147
	5.3	Critérie	os de falha	p. 149
		5.3.1	Critério de Rankine	p. 149
		5.3.2	Critério de Mohr-Coulomb	p. 150
		5.3.3	Critério de Griffith	p. 150
		5.3.4	Critério de McClintock - Walsh	p. 151
	5.4	Critérie	os de escoamento em polímeros	p. 154
	5.5	Critérie	o de escoamento em materiais metálicos amorfos	p. 155
	5.6	Aplica	ção: estampabilidade de chapas	p. 155
		5.6.1	Embutimento profundo, estiramento	p. 156
		5.6.2	Curva limite de conformação (CLC)	p. 157
		5.6.3	Análise de grade de círculos	p. 158
6	Plast	ticidade	e Mecânica da Fratura: Noções de Mecânica da Fratura Elasto-Plástica	p. 159
	6.1	Correç	ão para plasticidade limitada	p. 159

	6.2	Aplicaç	ção: Ensaio de Tenacidade à fratura no EPD
		6.2.1	Características do ensaio
	6.3	Mecâni	ca da Fratura Elasto-plástica
		6.3.1	COD e CTOD
		6.3.2	Integral $J$
		6.3.3	Curva <i>R</i>
7	Мес	anismos	de deformação plástica e de fratura dos materiais p. 179
	7.1	Deform	nação plástica de monocristais
		7.1.1	Tensão de cisalhamento projetada
		7.1.2	Lei de Schmid
		7.1.3	Estágios da deformação plástica de monocristais
	7.2	Teorias	do encruamento
	7.3	Microe	struturas de deformação
		7.3.1	Aplicação: Equal-Channel Angular Pressing (ECAP)
		7.3.2	Heterogeneidades microestruturais de deformação
	7.4	Mecani	smos de fratura dúctil
	7.5	Bandas	de cisalhamento
	7.6	Deform	nação e fratura de polímeros
		7.6.1	Nucleação de MFBs
	7.7	Maclaç	ão mecânica
		7.7.1	A tensão de maclação ( $\sigma_M$ ) p. 221
	7.8	Mecani	smos de fratura frágil
		7.8.1	Clivagem
		7.8.2	Fratura intergranular
	7.9	Aplicaç	ção: Ensaios de impacto
		7.9.1	Ensaios de pêndulo de impacto

		7.9.2	Transição dúctil-frágil	. 234
		7.9.3	Ensaio de queda de peso "Drop-weight test"p	. 236
8	Visco	oelasticio	dade e Fluência de Polímeros p	. 238
	8.1	Compo	prtamento viscoso	. 238
		8.1.1	Procedimentos experimentais idealizados	. 239
		8.1.2	Modelos simplificados	. 241
		8.1.3	Módulos dinâmicos	. 245
	8.2	Compo	ortamento mecânico de polímeros	. 247
		8.2.1	Curva mestre	. 248
	8.3	Módul	os complexos	. 250
	8.4	Relaçõ	ões constitutivas em polímeros	. 252
		8.4.1	O modelo de Haward e Thackray	. 253
		8.4.2	O modelo de Arruda e Boyce	. 256
0	<b>F</b> 1\$			200
9	Fiue	ncia em	materiais cristalinos p	0.260
	9.1	Ensaio	de fluência	. 261
		9.1.1	Relações empíricas	. 262
		9.1.2	Energia de ativação para a fluência	. 263
	9.2	Métod	os de extrapolação	. 265
		9.2.1	Método de Larson-Miller	. 265
		9.2.2	Método de Dorn	. 267
		9.2.3	Método de Manson-Haferd	. 267
	9.3	Fluênc	eia em estados triaxiais de tensão	. 270
	9.4	Relaxa	nção de tensão	. 273
10	Meca	anismos	deformação e de fratura em fluência p	. 274
	10.1	Equaçã	ão MBD	. 274

		10.1.1	Mecanismos difusionais	p. 275
		10.1.2	"Dislocation creep"	p. 279
		10.1.3	Fluência por escorregamento de discordâncias	p. 279
		10.1.4	Escorregamento viscoso	p. 280
		10.1.5	Escorregamento de contornos de grão	p. 280
		10.1.6	Efeito da dispersão de precipitados sobre a resistência à fluência	p. 282
	10.2	Aplica	ção: Ligas ODS	p. 283
	10.3	Superp	lasticidade	p. 284
		10.3.1	Sensibilidade à taxa de defomação e estricção	p. 284
	10.4	Fratura	por fluência	p. 285
11	Fadig	ja dos m	nateriais	p. 287
	11.1	Esforço	os dinâmicos	p. 287
	11.2	Fadiga	definição e generalidades	p. 290
		11.2.1	História e fenomenologia da fadiga	p. 291
		11.2.2	Fadiga em controle de tensão	p. 293
		11.2.3	Fadiga em controle de deformação	p. 294
	11.3	Diagra	mas de vida constante	p. 296
12	Fratu	ira por f	adiga	p. 299
	12.1	Nuclea	ção da trinca	p. 299
	12.2	Aplica	ção: Efeito da qualidade da superfície sobre a vida em fadiga	p. 301
	12.3	Propag	ação da trinca	p. 301
	12.4	Superfí	ície de fratura	p. 303
		12.4.1	Fadiga em polímeros	p. 304
13	Teori	as de ac	cumulação de danos e propagação da trinca de fadiga	p. 306
	13.1	Previsã	io de vida em fadiga	p. 306

	13.2	Aplicaçã	ção	da I	MFE	EL à	à fa	dig	a: J	Rela	açã	o d	e Pa	aris		•			• •				 •	p. 309
	13.3	Críticas	sà1	ela	ção	de F	Pari	is .		•••			•	•		•		• •					 •	p. 310
		13.3.1	De	svio	os de	o co	omp	port	tam	ient	o d	e P	aris										 •	p. 311
		13.3.2	M	odel	os e	xpl	ica	tivo	os d	los d	des	vio	S.	•		•					•	 •		p. 313
14	Fadi	ga em mo	odo	mi	sto																			p. 317
	14.1	Critério	os p	ara	cres	cim	ient	to d	le tr	rinc	ca		•	•		•		• •					 •	p. 317
	14.2	Taxa de	e cro	esci	men	to c	da t	trine	ca .	• •		• •	•	•		•	•••	• •			•	 •		p. 318
15	Fadi	ga operac	cior	al																				p. 320
	15.1	Ensaios	s en	1 es	trutı	ıras	3.			•••			•	•									 •	p. 321
		15.1.1	De	sen	volv	ime	ento	os a	atua	is			•	•							•		 •	p. 322
	15.2	Contage	gem	de o	ciclo	os.		•••		•••			•	•									 •	p. 323
	15.3	Modelo	os n	iate	mát	icos	s.	•••		•••			•	•									 •	p. 328
		15.3.1	Pro	ojeto	o en	ı fa	dig	a.		•••		• •	•	•		•					•	 •		p. 328
16	Micr	oestrutura	ras	de o	lefo	ma	ição	) en	n fa	adig	a													p. 330
	16.1	Fadiga o	de	Baiz	ko C	liclo	0			•••			•	•		•					•		 •	p. 331
		16.1.1	Ci	clos	de	hist	ere	se		•••			•	•		•		• •	•••			 •	 •	p. 331
	16.2	Formaçã	ção	das	PSE	3s .		• •		•••			•	•									 •	p. 336
	16.3	Conexão	ão d	as e	stru	tura	as e	em l	FBO	C e	a p	rop	aga	ıçã	o da	a tr	inc	а.		• •		 •	 •	p. 343
17	Degr	adação d	dos	mat	eria	is																		p. 350
	17.1	Degrada	laçã	o té	rmio	ca.	•••	•••		•••			•	•		•		• •	•••			 •	 •	p. 350
	17.2	Degrada	laçã	0 Q	uím	ica	•			•••			•	•									 •	p. 352
		17.2.1	De	gra	daçâ	io p	or ]	Hid	lrog	gêni	io		•	•							•			p. 353
		17.2.2	Co	rros	são s	sob	ten	isãc	) (C	CST	).		•	•							•			p. 356
	17.3	Degrada	laçã	o ra	diat	iva							•	•							•		 •	p. 361

18	Mecâ	ânica dos materiais compósitos p								
	18.1	Definiç	ões	p. 363						
		18.1.1	Compósitos - Classificação	p. 365						
		18.1.2	CMPs	p. 366						
		18.1.3	Características das matrizes	p. 367						
		18.1.4	Rotas de fabricação	p. 367						
		18.1.5	Defeitos em compósitos	p. 370						
		18.1.6	Interfaces	p. 372						
		18.1.7	Aplicações de compósitos	p. 373						
	18.2	Proprie	dades físicas dos compósitos	p. 374						
		18.2.1	Mistura mecânica	p. 374						
		18.2.2	Volume crítico de reforço	p. 377						
		18.2.3	Fratura de compósitos	p. 381						
		18.2.4	Tenacificação	p. 381						

Apêndice A – Tensores

p. 384

# INTRODUÇÃO

A presente apostila foi redigida para apoiar os alunos das disciplinas "PMT2405- Mecânica dos Materiais" (sétimo semestre de graduação dos cursos de Engenharia Metalúrgica e de Engenharia de Materiais da Escola Politécnica da USP), "PMT2406-Mecânica dos Materiais Metálicos" (oitavo semestre do curso de Engenharia Metalúrgica) e "PMT5860- Teoria da Plasticidade e da Fratura dos Materiais" e "PMT5857-Tópicos Avançados em Fadiga dos Materiais" (programa de pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Escola Politécnica da USP). O seu conteúdo, portanto, abrange desde os fundamentos da disciplina até tópicos avançados, mais adequados ao estudo em um curso de pós-graduação. Alguns pontos tratam de assuntos muito avançados, que poderiam até mesmo ser omitidos num estudo superficial da matéria. Introduzí estes pontos no texto principal (e não em um apêndice) pois a meu ver seu estudo permite uma compreensão mais profunda dos fenômenos associados à Mecânica dos Materiais.

A bibliografia oficial dos três primeiros cursos é:

- [LL] L. Landau e E. M. Lifshitz "Theory of elasticity", Pergamon Press, 1970
- [M] N. I. Muskhelishvili "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity" Groningen: P. Noordhoff Ltd., 1963.
- [MC] M. A. Meyers e K. K. Chawla "Mechanical Behavior of Materials" Prentice-Hall, 1999.
- [H] R. W. Hertzberg "Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials", 4<sup>a</sup> ed., John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1996.
- [PS] Paulo Sérgio C. P. da Silva "Comportamento mecânico e fratura de componentes e estruturas metálicas", Univ. Federal do Paraná, Curitiba, 1999.
- [T] A. P. Tschiptschin *et al.* (Eds.) "Textura e relações de orientação: deformação plástica, recristalização, crescimento de grão", 3<sup>a</sup> edição, São Paulo:IPEN/CNEN-SP, 2003.

A disciplina PMT5857 é baseada em textos de revisão publicados recentemente na literatura especializada. Estes textos serão citados nos capítulos pertinentes.

#### Introdução

Outras leituras serão recomendadas no decorrer do curso. Esta apostila e as notas de aula são disponibilizadas aos alunos pelo sistema CoL.

O texto foi significativamente ampliado na segunda edição, particularmente nos aspectos relativos às teorias matemáticas da elasticidade e da plasticidade, que foram melhorados, e nos capítulos de Mecânica da Fratura, que foram completamente reformulados. Para a terceira edição o capítulo sobre mecanismos de deformação plástica e de fratura foi reformulado e um novo capítulo sobre microestruturas de deformação em fadiga de baixo ciclo foi redigido. Além destas modificações, que podem ser encaradas como alterações significativas da estrutura do texto, pequenas adições foram feitas na estrutura, como por exemplo a incorporação de exercícios usados nas provas do ano de 2007 ou no aprimoramento da redação do texto. O texto de 2008 servirá como base para o futuro livro, de tal forma que a presente edição deverá originar a versão congelada ("frozen") do texto a ser preparada em 2009.

Como é comum em obras deste tipo, agradeço aos alunos das disciplinas acima mencionadas por inúmeras correções e sugestões para melhoria do texto. Agradeço também aos meus sogros (Manuel e Adelaides), ao Sr. João Diamante ("Tio João") e a todo o povo de Ibotirama-BA por propiciarem o ambiente calmo e os recursos líquidos necessário à redação deste texto. Ao meu colega e amigo, Prof. Dr. Fernando J. G. Landgraf, agradeço a disposição em ler criticamente o texto da segunda edição e pelas sugestões de melhoria do texto.

# 1 ELEMENTOS DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS PARA A CIÊNCIA DOS MATERIAIS

# 1.1 Fundamentos

A Mecânica dos Materiais pode ser definida como a sub-disciplina da Ciência dos Materiais que lida com a resposta dos materiais a forças externas aplicadas sobre os mesmos. Assim como no caso da Ciência dos Materiais, a Mecânica dos Materiais tem um forte caráter interdisciplinar, sendo fundamentada em sub-disciplinas da Física, como por exemplo a Mecânica Clássica e a Teoria da Elasticidade, e sendo aplicada em diversos campos da Engenharia, como por exemplo a Engenharia Mecânica, a Engenharia Aeronáutica, a Engenharia Automobilística, entre outras (entre as quais se contam obviamente a Engenharia Metalúrgica e de Materiais).

Na opinião do presente autor estes fundamentos são pouco discutidos nos livros-textos usados nas disciplinas de graduação e pós-graduação onde, não raro, apenas alguns resultados importantes das disciplinas-base são mencionados de forma *ad hoc*. Como um exemplo, qualquer estudantes de segundo ano em curso de engenharia sabe como calcular uma tensão ou deformação de engenharia, porém todos se calam quando perguntados do por que se usam estas transformações de unidades quando descrevemos quantitativamente a resposta de um material às forças externas. Da mesma forma a mecânica dos sólidos deformáveis (que corresponde ao campo de estudo da Mecânica dos Materiais na Mecânica Clássica) é tratada como um caso muito especial e apenas mencionado, se tanto, em notas de rodapé nos respectivos livros-texto em Mecânica Clássica.

Esta situação de "Terra de Ninguém" em que se encontram os fundamentos da Mecânica dos Materiais motivou o presente autor a dar uma atenção especial a estes tópicos. O presente capítulo trata deste assunto e é baseado nos livros-texto clássicos de L. Landau e E. M. Lifshitz,

[LL], e de N. Muskhelishvili, [M]. A opção por autores soviéticos não implica de nenhuma forma uma opção ideológica, trata-se unicamente de um tributo ao gênio e ao rigor matemático com que estes autores escreveram seus livros. Como mencionado acima, esta é uma das partes que normalmente é desprezada em cursos tanto de graduação quanto de pós-graduação. Este autor recomenda que isto não seja feito no presente caso. O autor crê que os futuros Engenheiros (assim como os Físicos e Químicos) não devem ser tratados como meros autômatos, capazes de reproduzir fórmulas ou aplicar cegamente tabelas, mas sim que eles devem ter uma compreensão profunda de como estas foórmulas e tabelas são geradas. Na experiência do autor, a resposta dos alunos é positiva a esta iniciativa.

### 1.1.1 Deformação

De acordo com Muskhelishvili [M], o termo *deformação*, quando aplicado ao um meio contínuo, é definido a partir das alterações de posição dos pontos neste meio tal que as distâncias relativas entre eles se altere. Isto, por conseqüência, exclui todas as alterações de posição que mantém as distâncias invariantes e que são atribuídas a translações e rotações do corpo na forma de um corpo rígido.

Matematicamente, as alterações de posição podem ser descritas por uma transformação que leva as coordenadas<sup>1</sup> dos pontos materiais do corpo,  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$  para  $\mathbf{r}' = (r'_1, r'_2, r'_3)$  ou seja:

$$r_1' = f_1(r_1, r_2, r_3) \tag{1.1a}$$

$$r_2' = f_2(r_1, r_2, r_3) \tag{1.1b}$$

$$r'_{3} = f_{3}(r_{1}, r_{2}, r_{3}) \tag{1.1c}$$

As funções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  são definidas em um domínio de uma certa região do espaço euclideano, V, e tem imagem em outra região do espaço euclideano, V'. Para iniciar nossa discussão vamos considerar que as funções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  são contínuas e tem inversa em todos os pontos do domínio. Elas definem, portanto uma certa transformação biunívoca  $V \leftrightarrow V'$ . É importante voltar a ressaltar que esta transformação não se refere exclusivamente à deformação do corpo, como definido acima, mas que também contém todas as translações e rotações de corpo rígido aplicadas ao mesmo. Separar estas contribuições da deformação atual do corpo é essencial na discussão que se segue.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Assumiremos, sem perda de generalidade, que as coordenadas em questão são definidas a partir de um referencial fixo no espaço, chamado de referencial de laboratório, por meio de uma base ortonormal  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ .

#### Transformações afins

Uma transformação é dita **afim** se as coordenadas  $(r'_1, r'_2, r'_3)$  forem funções lineares de  $(r_1, r_2, r_3)$ , ou seja:

$$r'_1 = (1+a_{11})r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 + a, (1.2a)$$

$$r'_{2} = a_{21}r_{1} + (1 + a_{22})r_{2} + a_{23}r_{3} + b, \qquad (1.2b)$$

$$r'_{3} = a_{31}r_{1} + a_{32}r_{2} + (1 + a_{33})r_{3} + c, \qquad (1.2c)$$

onde os coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{31}$ ,  $a_{32}$ ,  $a_{33}$ , a, b e c são constantes<sup>2</sup>. Toda a transformação linear é contínua. Para garantir a existência de inversa, portanto, basta impormos que o determinante da transformação, D, seja não nulo:

$$D = \det \begin{pmatrix} (1+a_{11}) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (1+a_{22}) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (1+a_{33}) \end{pmatrix} \neq 0$$
(1.3)

As tranformações afins tem uma série de propriedades topológicas que podem ser facilmente verificadas. Em primeiro lugar, é fácil demonstrar que qualquer plano  $\Pi$  definido no domínio V será transformado em um outro plano  $\Pi'$  na imagem V'<sup>3</sup>. Da mesma forma é possível demonstrar que pontos infinitesimalmente próximos na região V também o serão na região V' e que linhas retas na região V são transformadas em linhas retas de V'<sup>4</sup>. Em particular, vetores definidos em V, por exemplo  $\mathbf{P} = (\xi, \eta, \zeta)$ , são transformados em vetores de V',  $\mathbf{P}' = (\xi', \eta', \zeta')$ , ou seja:

$$\xi' = (1+a_{11})\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \qquad (1.4a)$$

$$\eta' = a_{21}\xi + (1 + a_{22})\eta + a_{23}\zeta, \tag{1.4b}$$

$$\zeta' = a_{31}\xi + a_{32}\eta + (1+a_{33})\zeta, \qquad (1.4c)$$

Segue que qualquer sub-região do domínio V é transformado de forma idêntica em V' e,

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>A soma de uma unidade aos termos  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  e  $a_{33}$  foi introduzida aqui por um motivo que ficará claro logo adiante.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Considere que o plano é definido pela relação  $Ar_1 + Br_2 + Cr_3 + D = 0$  e aplique a transformação definida no sistema de equações 1.2.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Para provar isto lembre-se que linhas retas são intersecções, portanto sub-conjuntos, de dois planos.

portanto, a deformação produzida por uma transformação afim é, necessariamente, homogênea.

As relações definidas pelo sistema de equações 1.4 simplesmente expressam o fato de que os dois vetores estão linearmente relacionados. Disto segue que os coeficientes da transformação formam um tensor de posto 2 (vide Apêndice A) e estes coeficientes podem ser escritos de forma compacta  $a_{ij} + \delta_{ij}$  usando o delta de Kronecker,  $\delta_{ij}$ :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$
(1.5)

Ocorre que o delta de Kronecker por definição é o tensor identidade (de posto 2) e como a soma de dois tensores de mesmo posto também é um tensor (Apêndice A), concluímos que os coeficientes  $a_{ij}$  formam também um tensor de posto 2.

Uma transformação afim será dita **infinitesimal** se os coeficientes da transformação forem quantidades infinitesimais. Neste caso os termos de ordem quadrática ou superior nos coeficientes podem ser desprezados. Vamos considerar o resultado de duas transformações infinitesimais consecutivas aplicadas ao vetor  $\mathbf{r}$ , a primeira resulta no vetor  $\mathbf{r}'$  de acordo com o resultado das equações 1.2, a segunda atua sobre o vetor  $\mathbf{r}'$ , produzindo o vetor  $\mathbf{r}''$  segundo:

$$r_1'' = (1+b_{11})r_1' + b_{12}r_2' + b_{13}r_3' + a', (1.6a)$$

$$r_2'' = b_{21}r_1' + (1+b_{22})r_2' + b_{23}r_3' + b', (1.6b)$$

$$r_3'' = b_{31}r_1' + b_{32}r_2' + (1+b_{33})r_3' + c', (1.6c)$$

Estas duas transformações, quando combinadas, transformam o vetor  $\mathbf{r}$  em  $\mathbf{r}''$ , substituindo as equações 1.6 em 1.2 e ignorando os termos quadráticos nos coeficientes teremos:

$$r_1'' = (1+c_{11})r_1 + c_{12}r_2 + c_{13}r_3 + a'', (1.7a)$$

$$r_2'' = c_{21}r_1 + (1 + c_{22})r_2 + c_{23}r_3 + b'',$$
(1.7b)

$$r_3'' = c_{31}r_1 + c_{32}r_2 + (1 + c_{33})r_3 + c'', (1.7c)$$

 $\operatorname{com} c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, a'' = a + a' \operatorname{etc.}$ 

Obtemos, portanto, o importante resultado de que duas transformações afins infinitesimais são comutativas, ou seja, não dependem da ordem em que elas são executadas. Este resultado,

obviamente, pode ser generalizado para qualquer número de transformações afins infinitesimais. Diz-se portanto, que estas transformações são obtidas por **composição** ou ainda, que elas podem ser podem ser **compostas**.

## O vetor deslocamento

Definimos o vetor deslocamento u (Fig. 1.1) pelas relações:



Figura 1.1: Vetor posição antes,  $\mathbf{r}$  (a) e depois (b) da deformação,  $\mathbf{r}'$  e definição do vetor deslocamento  $\mathbf{u}$  (c).

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u} \Rightarrow r'_i = r_i + u_i \ (i = 1, 2, 3) \tag{1.8}$$

Substituindo as expressões 1.2 em 1.8 teremos que:

$$u_1 = a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 + a, (1.9a)$$

$$u_2 = a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + a_{23}r_3 + b, (1.9b)$$

$$u_3 = a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + a_{33}r_3 + c, (1.9c)$$

A transformação definida pelos coeficientes  $a_{i,j}$  (i, j = 1, 2, 3), a, b e c contém, como dito anteriormente, um parcela devida ao movimento do elemento de volume como um corpo rígido e uma parcela devida à deformação propriamente dita. A parcela devida ao movimento como corpo rígido pode ainda ser dividida em uma translação pura e uma rotação pura. É fácil demonstrar que a translação é dada pelo vetor (a, b, c), falta portanto determinar a parcela devida à rotação pura, que dependerá dos coeficiente  $a_{ij}$ .

Iniciamos esta discussão considerando dois pontos, A e B, inicialmente separados por uma distância infinitesimal no domínio V. Definimos o vetor  $\Delta \mathbf{r}$  como:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\rm B} - \mathbf{r}_{\rm A} \tag{1.10}$$

Por meio de uma transformação afim infinitesimal obtemos o vetor,  $\Delta \mathbf{r}'$ :

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\rm B}' - \mathbf{r}_{\rm A}' \tag{1.11}$$

Da definição de **u** (equação 1.8) podemos escrever de forma análoga:

$$\Delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{\mathrm{B}} - \mathbf{u}_{\mathrm{A}} \tag{1.12}$$

Substituindo a equação 1.12 em 1.9 teremos:

$$\Delta u_1 = \left(a_{11}^{\rm B} - a_{11}^{\rm A}\right)\Delta r_1 + \left(a_{12}^{\rm B} - a_{12}^{\rm A}\right)\Delta r_2 + \left(a_{13}^{\rm B} - a_{13}^{\rm A}\right)\Delta r_3,\tag{1.13a}$$

$$\Delta u_2 = \left(a_{21}^{\rm B} - a_{21}^{\rm A}\right)\Delta r_1 + \left(a_{22}^{\rm B} - a_{22}^{\rm A}\right)\Delta r_2 + \left(a_{23}^{\rm B} - a_{23}^{\rm A}\right)\Delta r_3,\tag{1.13b}$$

$$\Delta u_3 = \left(a_{31}^{\rm B} - a_{31}^{\rm A}\right)\Delta r_1 + \left(a_{32}^{\rm B} - a_{32}^{\rm A}\right)\Delta r_2 + \left(a_{33}^{\rm B} - a_{33}^{\rm A}\right)\Delta r_3,\tag{1.13c}$$

Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r_1 & \Delta r_2 & \Delta r_3 \end{pmatrix}$$
(1.14)

 $\operatorname{com} e_{ij} \equiv a_{ij}^{\mathrm{B}} - a_{ij}^{\mathrm{A}}.$ 

Dado que os pontos A e B estão infinitesimalmente espaçados e que a transformação é contínua, podemos interpretar  $\Delta \mathbf{u} \in \Delta \mathbf{r}$  como:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{d}\mathbf{u} \quad \mathbf{e} \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{d}\mathbf{x} \tag{1.15}$$

Na segunda identidade usamos os fato de que o vetor  $\Delta \mathbf{r}$  descreve um deslocamento diferencial no espaço a partir do vetor  $\mathbf{r}_A$ .

Da definição da diferencial de uma função vetorial, temos a identidade:

$$e_{ij} = \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{r}_{\mathrm{A}}} \tag{1.16}$$

O tensor de deslocamento diferencial definido pelas equações 1.16 pode ser decomposto de forma usual em dois outros tensores, um simétrico e outro anti-simétrico:

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix}$$
(1.17)

com:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.18}$$

Para obter uma interpretação física destes dois tensores vamos considerar como varia a distância  $\ell$  entre os dois pontos A e B durante a transformação.

$$\ell = \|\Delta \mathbf{r}\| = \left(\sum_{i=1}^{3} \Delta r_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
(1.19)

Da mesma forma:

$$\ell' = \|\Delta \mathbf{r}'\| = \left[\sum_{i=1}^{3} (\Delta r_i + \Delta u_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
(1.20)

Usando o sistema de equações 1.14 e a definição de  $e_{ij}$  (equação 1.16), substituindo acima e desenvolvendo o quadrado teremos:

$$(\ell')^2 = (\ell)^2 + \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \left( 2 \frac{\partial u_a}{\partial x_b} dx_a dx_b + \sum_{c=1}^3 \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \frac{\partial u_a}{\partial x_c} dx_b dx_c \right)$$
(1.21)

Rearranjando os termos e alterando a ordem das somas:

$$(\ell')^2 = (\ell)^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} dx_i dx_j$$
(1.22)

onde  $\varepsilon_{ij}$  é definido por:

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$
(1.23)

Notamos que as duas definições de  $\varepsilon_{i,j}$  são idênticas a menos de um termo quadrático nas derivadas. Usamos agora a condição imposta de que a transformação é infinitesimal para concluir que a parte simétrica do tensor de deslocamento diferencial (equação 1.16) caracteriza a deformação, como definida no inicio desta seção (isto é, a parcela da transformação que leva a uma alteração das distâncias mútuas dos pontos materiais no corpo). Chamaremos este tensor de **tensor de deformação** (em inglês, **strain tensor**).

Alguns fatos importantes sobre o tensor de deformação:

- O tensor de deformação corresponde a uma matriz  $3 \times 3$ .
- Atribuir valores aos elementos desta matriz corresponde a definir um estado de deformação.
- Freqüentemente podemos reduzir o problema da análise de um estado de deformação a um dado plano no interior do sólido, neste caso a matriz do tensor de deformação passa a ter dimensão 2 (e o problema passa a ser bidimensional).

Falta interpretar o sentido físico do tensor  $\omega_{ij}$ . Notamos inicialmente que a sua definição (equação 1.18) implica na seguinte forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$
(1.24)

onde  $\omega_1 \equiv \omega_{32}$ ,  $\omega_2 \equiv \omega_{13}$  e  $\omega_3 \equiv \omega_{21}$ .

Como demonstrado anteriormente, ele não contribui para uma alteração das distâncias relativas dos pontos do corpo sólido. Como a translação rígida já foi excluída da análise, ele só pode corresponder a uma rotação rígida do elemento de volume. De fato, ele correponde a uma rotação rígida infinitesimal definida pelo vetor (polar)  $\theta = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ . A demonstração é rasoavelmente simples e pode ser encontrada no livro de Muskhelishvili, anteriormente citado, nas páginas 32 a 34.

A discussão acima foi feita para uma transformação afim infinitesimal, entretanto ela vale para qualquer transformação infinitesimal, desde que não haja nenhum ponto singular no interior do corpo (isto equivale a dizer que a transformação pode ser linearizada localmente). Nem mesmo a condição de homogeneidade é necessaria, já que se pode definir um tensor de deformação local (ou seja, que é função das coordenadas, gerando um campo tensorial de deformações)<sup>5</sup>. é importante ressaltar, entretanto, que a deformação plástica é essencialmente não-afim e que diversos ítens importantes da mecanica dos materiais, como discordâncias, superfícies e trincas, são pontos singulares do campo tensorial de deformação. Outra restrição importante sobre este tratamento é que ele trata os sólidos como meios contínuos, quando sabemos que a natureza atômica da matéria exige que o caráter descontínuo passe a se manifestar se a escala de dimensões do problema se tornar nanométrica. Muitos dos resultados paradoxais da teoria podem ser eliminados se considerarmos estas descontinuidades.

#### **Exercício 1.1**

Considere a figura 1.2. Ela representa duas transformações afins infinitesimais aplicadas a um quadrado (o problema, portanto, é bidimensional). Tendo em vista o sistema de eixos representado na figura, determine:

- Quais termos dos tensores de deformação e de rotação infinitesimal são diferentes de zero e
- 2. Uma expressão aproximada para os valores dos elementos que são diferentes de zero em função das coordenadas dos pontos situados ao longo das linhas A-B e A'-B'.

Dica: aproxime as derivadas por frações discretas e despreze o termo quadrático da definição do tensor de deformação.

#### Solução

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Observe entretanto que no caso de deformação não homogênea outras contribuições surgirão no movimento, a saber, uma translação e uma rotação do elemento de volume em relação ao centro de massa do corpo.



Figura 1.2: Estados de deformação ideais aplicados a um quadrado unitário.

Para resolver estes problemas nós representamos graficamente a variação das coordenadas que unem A' a B' na configuração final em função das coordenadas da linha que une A a B na configuração original.

Para o caso (1) temos o resultado representado na Figura 1.3.

Pela análise desta figura notamos que o único termo das derivadas de **u** diferente de zero é  $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ . Seu valor será dado por:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{B' - B - A' + A}{B - A} \tag{1.25a}$$

Assumindo que a origem se situa em A = A' podemos reescrever 1.25a como:

$$\frac{u_2}{x_2} = \frac{B' - B}{B}$$
(1.25b)

Substituindo agora nas equações 1.18 notamos que o único termo do tensor de deformação diferente de zero será  $\varepsilon_{22}$  e seu valor será dado por 1.25b.

Da mesma forma, aplicando-se as equações para o tensor de rotações infinitesimais, concluímos que, neste caso, nenhum dos seus termos será diferente de zero.



Figura 1.3: Variação das coordenadas do vetor deslocamento com a distância para o caso (1) da Figura 1.2.

No caso (2) os vetores deslocamento estão representados na Figura 1.4.

*Vemos portanto que o único termo das derivadas de* (*u*) *diferente de zero é*  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ . Seu valor será:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{B' - B - A' + A}{B - A} \tag{1.25c}$$

Assumindo que a origem se situa em A = A' podemos reescrever 1.25c como:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{B' - B}{B} \tag{1.25d}$$

Substituindo nas equações 1.18 temos que dois termos do tensor de deformação serão não nulos, a saber  $\varepsilon_{12}$  e  $\varepsilon_{21}$ , cujo valor será dado por:



Figura 1.4: Variação das coordenadas do vetor deslocamento com a distância para o caso (2) da Figura 1.2.

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{B' - B}{2B} \tag{1.25e}$$

Já o tensor de rotações infinitesimais correspondente será dado por:

$$\omega_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{B'-B}{2B} \\ -\frac{B'-B}{2B} & 0 \end{vmatrix}$$
(1.25f)

### Exercício 1.2

A teoria de Euler-Bernouilli para a flexão de vigas estabelece que estas, sob a ação de um momento fletor, se deformam como representado na Figura 1.5. Determine os elementos do campo tensorial de deformação (ou seja, os elementos do tensor de deformação como função da posição) correspondentes a esta configuração. Assuma que a aproximação de deformação

infinitesimal é válida e faça as simplificações que julgar necessário.



Figura 1.5: Deformação de uma viga sujeita a um momento fletor de acordo com a teoria de Euler-Bernouilli

#### Solução

Baseado em S. P. Timoshenko e J. E. Gere "Mecânica dos Sólidos": Vol. 1, Cap. 5, Rio de Janeiro: LTC, 1993.

Definimos a curvatura da viga pela letra  $\kappa_1$  e a associamos ao seu raio de curvatura,  $\rho_1$ , esquematizado na figura, como:

$$\kappa_1 = \frac{1}{\rho_1} = \frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}x_1} \tag{1.26a}$$

Da mesma forma definimos  $\kappa_2$  como:

$$\kappa_2 = \frac{1}{\rho_2} \frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}x_2} \tag{1.26b}$$

*Onde*  $\theta_1$  *é um elemento de arco ao longo da viga.* 

Pela análise da simetria do problema, vemos que as distâncias entre os pontos situados no plano central desta viga (marcado por uma linha do tipo traço - ponto) permanecerão inalteradas. Logo o vetor deslocamento se anula neste plano. Para planos inferiores a este as distâncias serão encurtadas, enquanto que para planos superiores elas serão alongadas. Definimos a variável y como a distância de um ponto genérico da viga a este plano central (chamado de fibra neutra). Por considerações de simetria vemos que:

$$u_1 = (\rho_1 + y) \,\mathrm{d}\theta_1 \tag{1.26c}$$

Substituimos na equação 1.18 e concluimos que:

$$\varepsilon_{11} = \frac{y}{\rho_1} = \kappa_1 y \tag{1.26d}$$

Podemos repetir o raciocínio para o plano tranversal da viga e concluímos que o campo tensorial será dado por:

$$\varepsilon_{i,j} = \begin{vmatrix} \kappa_1 y & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
(1.26e)

Onde  $\kappa_1 e \kappa_2$  devem ser encaradas no momento como constantes a serem determinadas na solução do problema.

#### Propriedades do tensor de deformação

O tensor de deformação possui algumas propriedades especiais. A primeira, como vimos anterriormente, é a simetria (ou seja,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \forall i, j$ ). Os termos diagonais do tensor correspondem a extensões (ou compressões) simples na direção do respectivo eixo, como no caso (1) do exercício 1.1, e são denominadas **deformações normais**. Os termos não diagonais são, por sua vez, denominados **deformações angulares**, como no caso (2) do exercício 1.1. Por definição, deformações normais que correspondem a extensões são positivas, enquanto que as que correspondem a compressões são negativas. Uma convenção semelhante pode ser adotada para o sinal das deformações angulares em função do sentido de rotação, porém isto não será relevante na presente disciplina.

Deformações angulares podem ser identificadas alternativamente com o ângulo  $\gamma$  da figura 1.6, sendo então denominadas por esta letra grega.



Figura 1.6: Definição das deformações angulares em duas dimensões.

A equivalência entre as duas definições de deformação angular será dada por:

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \tag{1.27}$$

Como todo o tensor simétrico,  $\varepsilon_{ij}$  pode ser diagonalizado (remember AlgeLin!). O referencial no qual  $\varepsilon_{ij}$  é diagonal é chamado de referencial das deformações principais. Neste referencial todas as deformações são normais (ou seja, as deformações angulares se anulam). As três direções correspondentes ao referencial das deformações principais são chamadas **direções ou eixos principais**. Elas são mutuamente perpendiculares.

As três deformações principais são denominadas  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  respectivamente, adotando-se a convenção:

$$\varepsilon_1 \ge \varepsilon_2 \ge \varepsilon_3$$
 (1.28)

Esta convenção será obedecida neste curso, exceto em circunstâncias isoladas.

#### O problema inverso

As equações deduzidas até o momento permitem determinar os componentes do tensor de deformação caso o campo vetorial de deslocamentos seja dado. Podemos, alternativamente, desejar resolver o problema inverso, ou seja, determinar o campo vetorial de deslocamentos a partir de um campo tensorial de deformação dado. Como Muskhelishvili ressalta, o problema não é unicamente determinado, já que as deformações são definidas a menos das componentes rígidas (translação e rotação) do movimento do corpo sólido. Entretanto é possivel resolver este problema se estas componentes forem conhecidas em um ponto (poderiamos dizer também que elas podem ser determinadas para um referencial solidário a este ponto).

Seja  $M_0$  um ponto qualquer no interior do volume V'. Definimos os vetores  $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ e  $\omega^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0)$  como sendo respectivamente as componentes de translação e de rotação rígidas associadas ao ponto  $M_0$ . O problema em questão, portanto, corresponderá a determinar o campo  $(u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3))$  dado o campo  $(\varepsilon_{i,j}(x_1, x_2, x_3))$ .

A solução do problema será dada pela solução do seguinte sistema de equações diferenciais a derivadas parciais:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \varepsilon_{33}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 2\varepsilon_{23}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 2\varepsilon_{13}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{12}$$
(1.29)

Temos, portanto, seis equações para três funções-incógnitas. O problema é, assim, superdeterminado e pode não ter uma solução, a não ser que outras condições sejam impostas. A natureza destas condições ficará clara na continuação.

Seja um ponto  $M_1$  de V', conectado a  $M_0$  por um caminho  $\Gamma$ . A componente  $u_1$  do vetor de deslocamento será dada por:

$$u_{1} = u_{1}^{0} + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{1}}{\partial x_{1}} dx_{1} + \frac{\partial u_{1}}{\partial x_{2}} dx_{2} + \frac{\partial u_{1}}{\partial x_{3}} dx_{3} \right)$$
  
=  $u_{1}^{0} + \int_{\Gamma} \left[ \varepsilon_{11} dx_{1} + (\varepsilon_{12} - \omega_{3}) dx_{2} + (\varepsilon_{13} + \omega_{2}) dx_{3} \right]$  (1.30a)

Da mesma forma,  $u_2$  será dada por:

$$u_{2} = u_{2}^{0} + \int_{\Gamma} \left[ (\varepsilon_{21} + \omega_{3}) dx_{1} + \varepsilon_{22} dx_{2} + (\varepsilon_{23} - \omega_{1}) dx_{3} \right]$$
(1.30b)

e *u*<sub>3</sub>:

$$u_{3} = u_{3}^{0} + \int_{\Gamma} \left[ (\varepsilon_{31} - \omega_{2}) dx_{1} + (\varepsilon_{32} + \omega_{1}) dx_{2} + \varepsilon_{33} dx_{3} \right]$$
(1.30c)

As integrais 1.30 podem ser reescritas como:

$$u_{1} = u_{1}^{0} + \int_{\Gamma} \left( \varepsilon_{11} dx_{1} + \varepsilon_{12} dx_{2} + \varepsilon_{13} dx_{3} \right) + \int_{\Gamma} \left( \omega_{2} dx_{3} - \omega_{3} dx_{2} \right), \quad (1.31a)$$

$$u_2 = u_2^0 + \int_{\Gamma} \left( \varepsilon_{21} \mathrm{d}x_1 + \varepsilon_{22} \mathrm{d}x_2 + \varepsilon_{23} \mathrm{d}x_3 \right) + \int_{\Gamma} \left( \omega_3 \mathrm{d}x_1 - \omega_1 \mathrm{d}x_3 \right), \quad (1.31b)$$

$$u_{3} = u_{3}^{0} + \int_{\Gamma} \left( \varepsilon_{31} dx_{1} + \varepsilon_{32} dx_{2} + \varepsilon_{33} dx_{3} \right) + \int_{\Gamma} \left( \omega_{1} dx_{2} - \omega_{2} dx_{1} \right), \quad (1.31c)$$

Como Muskhelishvili ressalta, os primeiros termos das equações 1.31 são integrais de

funções dadas (ou seja, a princípio conhecidas) e podem ser resolvidas por métodos analíticos ou numéricos. Os outros termos correspondem à contribuição da rotação ao deslocamento e devem ser determinadas a partir dos termos do tensor de deformação. Para ilustrar este processo vamos considerar a integral constante na equação  $1.31a^6$  e vamos reescrevê-la como:

$$\int_{\Gamma} (\omega_2 dx_3 - \omega_3 dx_2) = \int_{\Gamma} \left[ \omega_3 d(x_2^1 - x_2) - \omega_2 d(x_3^1 - x_3) \right]$$
(1.32)

onde  $x_i^1$  se refere às coordenadas do ponto  $M_1$ . Integrando por partes:

$$= \omega_2^0 \left( x_3^1 - x_3^0 \right) - \omega_3^0 \left( x_2^1 - x_2^0 \right) - \int_{\Gamma} \left[ \left( x_2^1 - x_2 \right) d\omega_3 - \left( x_3^1 - x_3 \right) d\omega_2 \right]$$
(1.33)

Continuando, precisamos determinar d $\omega_i$  em termos de d $\varepsilon_{ij}$ . Podemos verificar facilmente, usando as definições de  $\omega_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x_3} \end{cases},$$
(1.34a)

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_1} \end{cases},$$
(1.34b)

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_{3}}{\partial x_{1}} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_{1}} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_{2}} \\ \frac{\partial \omega_{3}}{\partial x_{2}} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_{1}} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_{2}} \\ \frac{\partial \omega_{3}}{\partial x_{3}} = \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_{1}} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_{2}} \end{cases},$$
(1.34c)

Lembrando que:

$$d\omega_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_3} dx_3$$
(1.35)

Obtemos:

$$u_{i} = u_{i}^{0} + \omega_{j} \left( x_{k}^{1} - x_{k}^{0} \right) - \omega_{k} \left( x_{j}^{1} - x_{j}^{0} \right) + \int_{\Gamma} \sum_{n=1}^{3} \xi_{in} \mathrm{d}x_{n}$$
(1.36)

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>As demais podem ser resolvidas por analogia.

As demais componentes são obtidas da expressão acima por uma permutação cíclica dos índices, simbolicamente:  $(i, j, k \circlearrowright) = (1, 2, 3)$ . O tensor  $\xi i j$  foi aqui introduzido por conveniência, correspondendo a:

$$\xi ij = \varepsilon ij + \left(x_j^1 - x_j\right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_i}\right) + \left(x_k^1 - x_k\right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial x_i}\right)$$
(1.37)

 $\operatorname{com} k \neq i, j.$ 

A equação 1.36 é conhecida como equação de Volterra, em homenagem ao matemático italiano Vito Volterra, que as derivou pela primeira vez<sup>7</sup>. Ela fornece o valor do vetor deslocamento no interior de um sólido em um referencial vinculado a um dado ponto deste sólido, para os quais são conhecidos a coordenada e o valor do momento de rotação. As fórmulas são deduzidas em termos de uma integral de linha, porém é evidente que o deslocamento em um ponto deverá ser uma função da posição. Logo a integral em 1.36 deve ser independente do caminho de integração. A condição necessária e suficiente para que a integral seja independente do ca-

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \xi_{ii}}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_i} & (i, j, k \circlearrowright) = (1, 2, 3) \\ \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_{ii}}{\partial x_j} \end{cases}$$
(1.38)

Substituindo 1.37 em 1.38 obtemos as seis relações seguintes:

$$\begin{cases} \frac{\partial^{2} \varepsilon_{jj}}{\partial x_{k}^{2}} + \frac{\partial^{2} \varepsilon_{kk}}{\partial x_{j}^{2}} = \frac{\partial^{2} \varepsilon_{jk}}{\partial x_{k} \partial x_{j}}, \\ \frac{\partial^{2} \varepsilon_{kk}}{\partial x_{i}^{2}} + \frac{\partial^{2} \varepsilon_{ii}}{\partial x_{k}^{2}} = \frac{\partial^{2} \varepsilon_{ki}}{\partial x_{i} \partial x_{k}}, \\ \frac{\partial^{2} \varepsilon_{jj}}{\partial x_{k}^{2}} + \frac{\partial^{2} \varepsilon_{kk}}{\partial x_{j}^{2}} = \frac{\partial^{2} \varepsilon_{jk}}{\partial x_{k} \partial x_{j}}, \\ \frac{\partial^{2} \varepsilon_{ii}}{\partial x_{j} \partial x_{k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_{i}} + \frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_{k}} \right), \\ \frac{\partial^{2} \varepsilon_{jj}}{\partial x_{k} \partial x_{i}} = \frac{\partial}{\partial x_{j}} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_{k}} + \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_{i}} \right), \\ \frac{\partial^{2} \varepsilon_{kk}}{\partial x_{k} \partial x_{j}} = \frac{\partial}{\partial x_{k}} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_{k}} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_{k}} + \frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial x_{j}} \right), \end{cases}$$

As relações 1.39 são conhecidas como relações de compatibilidade de Saint-Venant, em homenagem a Barré de Saint-Venant, que as publicou em 1861. Elas fornecem a condição necessária para que o campo tensorial de deformações seja contínuo, desta forma também são conhecidas como **condições de continuidade**.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Segundo Muskhelishvili, a dedução aqui apresentada se deve a um certo E. Cesaro em 1906.



Figura 1.7: O caminho de integração para a solução do exercício 1.3.

### Exercício 1.3

Determine o campo de deslocamentos resultante de um estado de deformação característico de um carregamento uniaxial em tração ou compressão (*i.e.*  $\varepsilon_{11} = -v\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{22} = -v\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{33} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ , onde  $\varepsilon$  é uma constante diferente de zero e  $v \le \frac{1}{2}$  é uma constante positiva).

#### Solução

Primeiramente consideramos o referencial fixo ao centro de massa do corpo, para eliminar possíveis movimentos de translação e de rotação rígida. O problema seguinte é consideravelmente simplificado dado que os termos do tensor de deformação são constantes em todo o domínio de integração. O argumento da integral de linha na equação 1.37, se reduz portanto a  $\varepsilon_{ij}$ . Para determinar o valor do vetor  $\vec{u} = [u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)]$  construímos um caminho de integração que leva a  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  como o representado na Figura 1.7. O resultado, portanto, é  $\vec{u} = (-v\varepsilon x_1, -v\varepsilon x_2, \varepsilon x_3)$ .

#### **Exercício 1.4**

No exercício 1.2 deduzimos o tensor de deformação correpondente à solução de Euler-Bernouilli para a viga flexionada, dado na equação 1.26e. Demonstre que esta solução obedece às relações de Saint-Venant.

#### Solução

Notamos que  $y = x_3 + \alpha$ , onde  $\alpha$  é a coordenada (constante) do centro da fibra neutra,

desta forma todas as derivadas segundas se anulam, o que satisfaz as condições 1.39 de forma trivial.

### **1.1.2 Tensão**

Quando um corpo em repouso está sujeito a forças (externas), este se deforma. Como conseqüência da terceira lei de Newton desenvolvem-se forças (internas) de reação,  $\mathbf{F}$ , tais que a resultante de forças (internas e externas) se anula. Muskhelishvili separa as forças atuantes sobre o corpo em duas classes: Forças volumétricas <sup>8</sup>, que agem sobre todos os elementos de volume do sólido, e forças de contato<sup>9</sup>.

No primeiro caso elas atuam sobre qualquer elemento de volume infinitesimal do corpo sólido. Exemplos de forças volumétricas são a força peso ou forças de origem inercial (forças centrífugas). Podemos representá-las por um vetor  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  em unidades de volume ou ainda  $\frac{\mathbf{f}}{\rho}$  se forem expressas em unidades de massa ( $\rho$  representa a densidade de massa do corpo). A resultante das forças volumétricas atuando sobre qualquer volume finito, V', do corpo sólido,  $\mathbf{F}$ , será dada por:

$$\mathbf{F} = \iiint_{V'} \mathbf{f} \mathrm{d} V \tag{1.40}$$

No caso das forças de contato, estas atuam fundamentalmente sobre a superfície do elemento de volume<sup>10</sup>. Postula-se aqui que estas forças podem ser escritas como o divergente de um tensor de posto 2:

$$f_i^c = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.41}$$

onde  $\sigma_{ij}$  recebe o nome de **tensor de tensão** (ou, em inglês **stress tensor**).

Com base na definição do tensor de tensão, podemos escrever a força atuando sobre um

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>O termo em inglês é **body forces**, procurei uma forma conveniente de se traduzir este termo, mas não conseguí chegar a um consenso sobre o termo correto a ser usado em português. A literatura em francês e espanhol usa o termo equivalente a "forças externas", este termo, entretanto, é impreciso pois, como será visto posteriormente, forças de contato podem (e são) transmitidas ao material através de sua superfície, sendo tecnicamente externas por definição.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Muskhelishvili usa o termo tensões (**stresses**), mas reservaremos este termo para outra finalidade para evitar confusão.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Conforme discutido por Landau e Lifschitz, a distinção se deve fundamentalmente ao alcance destas forças. Forças de contato tem origem nas forças moleculares de coesão, que tem alcance muito limitado, geralmente da ordem de algumas distâncias interatômicas. Tudo se passa, portanto, como se elas atuassem apenas sobre a superfície do elemento de volume. Forças volumétricas, por outro lado, tem alcance maior.

elemento de volume dV do corpo como:

$$\int f_i^c \mathrm{d}V = \int \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \mathrm{d}V = \oint \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \mathrm{d}s_j \tag{1.42}$$

onde os d*s*<sub>j</sub> são os componentes do elemento de superfície d**s** orientado de acordo com a normal exterior. Escolhendo um elemento de volume de formato cúbico, com as normais das faces apontando ao longo dos eixos  $x_i$  vemos que  $\sigma_{ij}$  corresponde ao *i*-ésimo componente da força atuando sobre o elemento de área orientado com a normal ao longo do eixo  $x_i^{11}$ .

Alguns fatos sobre o tensor de tensão:

- Assim como no caso do tensor de deformação, o tensor de tensão é formalmente equivalente a uma matriz quadrada de dimensão 3.
- Atribuir valores aos elementos desta matriz corresponde a definir um estado de tensão.
- Como no caso do tensor de deformação, em certas ocasiões podemos reduzir o problema à análise das tensões em um determinado plano no interior do sólido, nestes casos a matriz fica reduzida à dimensão 2.

O tensor de tensão é simétrico, ou seja,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . A demonstração depende do equilíbrio de momentos de rotação no elemento de volume. Consideramos por exemplo o momento de rotação em torno do eixo  $x_1$  imposto pelas forças volumétricas ao elemento de volume V e pelas forças de contato à superfície S que contém o volume V:

$$M_1 = \iiint_V (x_2 f_3 - x_3 f_2) \,\mathrm{d}V' + \iint_S (x_2 f_3^c - x_3 f_2^c) \,\mathrm{d}S' \tag{1.43}$$

Usando o teorema de Green, entretanto, transformamos a integral de superfície em uma integral de volume e a equação 1.43 pode ser reescrita como:

$$M_{1} = \iiint_{V} \left\{ \left[ x_{2} \left( f_{3} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_{2}} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_{3}} \right) - x_{3} \left( f_{2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_{2}} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_{3}} \right) \right] + \sigma_{32} - \sigma_{23} \right\} \mathrm{d}V'$$

$$(1.44)$$

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>O argumento é, de certa forma, circular. Muskhelishvili, por exemplo usa o fato de que as tensões são forças de contato para deduzir que elas se originam do divergente de um tensor (portanto ele lê a equação 1.42 da direita para a esquerda). Estas identidades, entretanto, ilustram propriedades especiais das forças de contato. De fato, veremos mais adiante (Capítulo 2), que em problemas bidimensionais as tensões podem ser derivadas a partir de uma função escalar (de argumento complexo) chamada função tensão (**stress function**), que atua como uma espécie de potencial.

Os termos entre parênteses, entretanto, correspondem respectivamente a  $f_3 - f_3^c$  e  $f_2 - f_2^c$ . Como o sólido está em equilíbrio estes termos devem se anular<sup>12</sup>. O momento  $M_1$  será dado portanto por:

$$M_1 = \iiint_V (\sigma_{32} - \sigma_{23}) \,\mathrm{d}V' \tag{1.45}$$

Novamente, o equíbrio do corpo sólido é invocado para demonstrar que  $M_1 = 0$ . Esta condição somente será satisfeita para qualquer elemento de volume do sólido se o arqumento da integral se anular identicamente em qualquer ponto do corpo sólido. Isto demonstra que o tensor de tensão deve ser simétrico, como inicialmente proposto.

As componentes diagonais do tensor correspondem a forças atuando perpendicularmente às superfícies do elemento de volume, sendo denominadas **tensões normais**. Os termos não diagonais, por sua vez, correspondem a forças atuando paralelamente à superfície do elemento de volume, sendo denominadas, portanto, **tensões de cisalhamento**.

Como no caso das deformações angulares, às vezes as tensões de cisalhamento são representadas por uma outra letra grega, para distingüí-las das tensões normais, neste caso usa-se  $\tau_{ij} \equiv \sigma_{ij}$ .

Por convenção, tensões normais de tração são positivas e tensões normais de compressão são negativas. Uma convenção semelhante pode ser adotada para o sinal das tensões de ci-salhamento, sendo porém irrelevante para os objetivos da presente disciplina (esta convenção, entretanto, deve ser compatível com a adotada para as deformações angulares).

O tensor de tensão pode ser diagonalizado e as tensões neste referencial são chamadas **tensões principais** e são todas normais, obviamente.

No caso de sólidos isotrópicos as direções principais dos tensores de tensão e de deformação coincidem, para sólidos anisotrópicos de baixa simetria (por exemplo, em monocristais com simetria triclinica) isto geralmente não ocorrerá.

## 1.1.3 Trabalho de deformação

Até o momento consideramos o caso geral em que as forças volumétricas são mantidas na formulação. Para determinar o trabalho de deformação será conveniente entretanto nos restringirmos ao caso em que as forças volumétricas se anulam. Isto é feito porque o trabalho das

 $<sup>^{12}</sup>$ Na verdade os termos entre parenteses são dois casos das chamadas "condições de equilíbrio elástico". A terceira condição, referente à direção  $x_1$ , pode ser facilmente determinada por analogia.

forças volumétricas pode ser facilmente calculado pelos métodos usuais da mecânica clássica e adicionado ao trabalho das forças de contato. Consideremos um elemento de volume de um corpo sólido deformado. Suponhamos que o vetor **u** se altere por uma quantidade infinitesimal  $\delta$ **u**. O trabalho realizado pelas tensões no interior deste elemento de volume  $\delta W$  é calculado como o produto escalar da força  $\mathbf{F} = \sum_{j} \nabla \sigma_{ij}$  pelo deslocamento  $\delta$ **u**. Integrando-se por partes teremos:

$$\int \delta W dV = \oint \sum_{i} \sigma_{ij} \delta u_i ds_j - \int \sum_{i} \sum_{j} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV$$
(1.46)

Assumindo-se que o corpo se encontra não deformado ou que a tensão se anula no infinito (esta hipótese é sempre realizada na superfície do sólido), podemos posicionar a superfície de integração de tal forma que  $\sigma_{ij} \rightarrow 0$  e a integral de superfície se anula.

A integral de volume pode ser reescrita usando-se a simetria do tensor de tensão como:

$$\int \delta W dV = -\int \sum_{i} \sum_{j} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$
(1.47)

Desta forma vemos que a soma do produto dos elementos dos tensores de tensão e do incremento da deformação resultam no incremento do trabalho realizado por unidade de volume do sólido durante a deformação.

# 1.2 Transformação de referenciais

Para converter tensões (ou deformações) de um sistema de referências a outro utilizamos construção esquemática representada na Figura 1.8.

Da figura teremos:

$$\sum F_1' = 0 \Rightarrow \quad \sigma_{11}' ds_1' = \sigma_{11} \cos \theta ds_1 + \sigma_{22} \sin \theta ds_2 +$$

$$+ \sigma_{12} \cos \theta ds_2 + \sigma_{21} \sin \theta ds_1$$
(1.48)

considerando a Figura 1.8, entretanto teremos  $ds_1 \cos \theta = ds_2 \sin \theta = ds'_1$  e, portanto:

$$\sigma_{11}' = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta \tag{1.49}$$


Figura 1.8: Construção esquemática de um elemento de volume usada na derivação das regras de conversão de sistemas de referência.

analogamente,

$$\sum F_2' = 0 \Rightarrow \quad \sigma_{12}' = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \tag{1.50}$$

#### **Exercício 1.5**

Considere o estado de tensão definido por:

$$\left|\sigma_{ij}\right| = \left|\begin{array}{cc} 4 & 2\\ 2 & -1 \end{array}\right| \tag{1.51}$$

Determine:

- a. O valor das duas tensões principais,
- b. o valor do ângulo de rotação  $\theta$  que leva o sistema ao referencial das direções principais,
- c. o ângulo de rotação relativa ao referencial das tensões principais que produz a máxima (mínima) tensão de cisalhamento no sistema.

#### 1.2 Transformação de referenciais

a. Lembrando o problema da determinação dos autovalores de uma matriz, estudado em AlgeLin, procuramos a solução de

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2\\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{1.52a}$$

que resulta em

$$(4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 4 = 0 \tag{1.52b}$$

ou ainda,

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \tag{1.52c}$$

As soluções desta equação de segundo grau são dadas por:

$$\lambda^{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2} \tag{1.52d}$$

ou ainda,  $\lambda^+ = 4,7015$  MPa e  $\lambda^- = -1,7015$  MPa, que são as tensões principais solicitadas.

b. Para resolver este problema consideramos a equação 1.49. Notamos que, sendo estas direções principais, o valor de  $\sigma_{11}$  será um dos extremos da equação (um máximo ou um mínimo), logo:

$$\frac{\partial \sigma_{11}'}{\partial 2\theta} = 0 \Rightarrow 0 = -\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)\sin(2\theta) + \sigma_{12}\cos(2\theta) \tag{1.53a}$$

dividindo ambos os lados por  $-\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cos(2\theta)$  temos,

$$\tan(2\theta) = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \tag{1.53b}$$

cujas soluções são dadas por,

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1}(0, 8)$$
(1.53c)

ou ainda  $\theta^{(1)} = 19,33^{\circ}e \ \theta^{(2)} = 109,33^{\circ}.$ 

Note que as mesmas soluções seriam obtidas se tivessemos assumido que as tensões de cisalhamento no novo referencial se anulam (outra das características do referencial das tensões principais), usando a equação 1.50.

#### 1.2 Transformação de referenciais

Substituindo os dois ângulos na equação 1.49 recuperamos as duas tensões principais, como é devido, sendo que  $\theta^{(1)}$  corresponde a  $\lambda^+$  e  $\theta^{(2)}$  corresponde a  $\lambda^-$ .

c. Diferentemente do item anterior, a questão pede o ângulo de rotação em relação ao referencial das tensões principais. Novamente procuramos os extremos da equação 1.50, considerando entretanto, que no referencial das tensões principais  $\sigma_{12} \equiv 0$ . Temos portanto que:

$$\frac{\partial \sigma_{12}'}{\partial 2\theta} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos(2\theta) \tag{1.54}$$

A solução desta equação, entretanto independe dos valores de  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  e é dada por  $\theta^{(1)} = 45 \circ e \theta^{(2)} = 225 \circ = -45 \circ$ .

O estado de tensão neste referencial pode ser obtido substituindo-se o valor dos ângulos nas equações 1.49 e 1.50, tomando-se o cuidado de usar o referencial correto. Se usarmos o referencial das tensões principais teremos  $\sigma_{11} = \lambda^+$ ,  $\sigma_{22} = \lambda^- e \sigma_{12} = 0$ , se utilizarmos o referencial original, devemos subtrair o ângulo que leva este referencial ao das tensões principais.

#### 1.2.1 Aplicação: Círculo de Mohr (2d)

As equações da transparência anterior podem ser reescrita da forma:

$$\sigma_{11}' - \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta \tag{1.55}$$
$$\sigma_{12}' = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta$$

Elevando ao quadrado, somando-se as duas expressões e simplificando, teremos:

$$\left(\sigma_{11}' - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \left(\sigma_{12}'\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2 \tag{1.56}$$

Definindo-se

- $x = \sigma'_{11}$ ,
- $y = \sigma'_{12}$ ,

• 
$$a \equiv \sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$$
 e

•  $b = \left[ \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + (\sigma_{12})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ 

podemos reescrever a expressão anterior como:

$$(x-a)^{2} + (y-0)^{2} = b^{2}$$
(1.57)

que é a equação de um círculo com centro no ponto (a, 0) e raio b

A relação entre as equações de transformação de coordenadas e a equação do círculo foi observada pela primeira vez pelo engenheiro alemão Otto Mohr em 1895. Em sua homenagem o círculo assim obtido recebe o nome de **Círculo de Mohr**.

Até o momento descrevemos as transformações de referenciais no contexto das tensões, mas as mesmas relações valem para a transformação das deformações<sup>13</sup>, sendo diretamente aplicáveis. Em particular, o círculo de Mohr é diretamente aplicável à análise de um estado de formação.

Os círculos de Mohr permitem analisar o estado de tensão (respectivamente, de deformação) do corpo sólido de forma prática, simples e bastante ilustrativa. Iremos nos utilizar do círculo de Mohr em diversas ocasiões no decorrer do curso, portanto o aluno deverá praticar o trabalho com esta ferramenta. Repetindo: Círculo de Mohr **não é** uma invenção de mente doentia, criada para torturar alunos, mas sim uma ferramenta muito útil, de fácil uso e que simplifica consideravelmente o trabalho com estados de tensão e de deformação.

#### Círculo de Mohr (como desenhar)

Iremos discutir aqui dois métodos de construção do círculo de Mohr:

- 1. Quando um estado de tensão é dado e
- 2. Quando as tensões principais (ou informações equivalentes) são dadas

Caso 1:

- grafique em um diagrama cartesiano um dos pares  $\sigma_{ii} \times \sigma_{ij}$  (Figura 1.9)
- calcule e grafique a tensão média σ<sub>m</sub> ou então o par σ<sub>jj</sub> × -σ<sub>ji</sub>, sendo que neste caso σ<sub>m</sub> é lida no ponto onde a linha que une os dois pares coordenados cruza o eixo das ordenadas (Figura 1.10)
- desenhe o círculo com centro em  $\sigma_m$  e que passa por  $\sigma_{ii} \times \sigma_{ij}$  (Figura 1.11)

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>De forma mais rigorosa, elas valem para qualquer tensor de posto 2.



Figura 1.9: Como desenhar um círculo de Mohr quando um dado estado de tensão é dado. Primeira etapa.

Compare com os resultados do exercício 1.5!

Caso 2:

Quando as tensões principais são dadas, o procedimento é ainda mais simples: basta graficar as duas tensões principais no eixo  $y = \sigma'_{ij} = 0$  e desenhar o círculo que passa pelos dois pontos.

Devemos notar algumas características importantes do círculo de Mohr:

- os estados de tensão possíveis ao sistema estão sobre o círculo,
- o círculo de Mohr sempre tem o seu centro no eixo das ordenadas (y = 0),
- ângulos medidos no interior do círculo valem o dobro do espaço real (ou seja, valem 2θ)
   e
- a tensão máxima de cisalhamento vale  $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2}$ .

#### Círculo de Mohr (3d)

É possível trabalhar com o círculo de Mohr em estados triaxiais de tensão. Neste caso, entretanto, há alguma ambigüidade na determinação dos estados de tensão. Os estados permitidos ao sistema estão na região hachurada da figura 1.12.



Figura 1.10: Como desenhar um círculo de Mohr quando um dado estado de tensão é dado. Segunda etapa.

Os círculos de Mohr em 3d serão usados neste livro apenas de forma ilustrativa. Em todos os casos que serão tratados as três tensões principais (ou então alguma outra informação equivalente) serão fornecidas, permitindo ao leitor desenhar o círculo de Mohr sem dificuldades.

#### Propriedades do círculo de Mohr

Considere o círculo de Mohr representado na figura 1.13, onde os pontos sobre o círculo indicam o estado de tensão no referencial indicado na figura.

O referencial correspondente às tensões principais pode ser determinado pela construção gráfica representada na Fig. 1.14. Da mesma forma, a magnitude das tensões principais é obtida por inspeção (Fig. 1.15). Usando a mesma construção gráfica obtemos o referencial das máximas tensões de cisalhamento (Fig. 1.16).

**Exercício 1.6** Considere as condições de carregamento esquematizadas na Figura 1.17. Determine o círculo de Mohr do estado de tensão correspondente. Em qual orientação você acha mais provável que discordâncias sejam ativadas no início da deformação plástica? Dica: discordâncias escorregam sob a ação de tensões de cisalhamento.

#### Solução



Figura 1.11: Como desenhar um círculo de Mohr quando um dado estado de tensão é dado. Etapa final.

Os círculos de Mohr solicitados podem ser determinados usando a segunda estratégia discutida nesta seção (ou seja, utilizando as tensões principais ou outra informação equivalente):

- a. O elemento de chapa se caracteriza pela ausência de tensão normal ao longo de  $x_3$  ou de qualquer tensão de cisalhamento no plano da chapa, logo  $x_3$  é uma direção principal, cuja valor é 0 MPa. As outras duas direções principais encontram-se a 90° de  $x_3$ , notamos porem que o problema tem simetria cilindrica em torno de  $x_3$  logo podemos escolher arbitrariamente quaisquer duas direções ortogonais neste plano, em particular podemos escolher  $x_1$  e  $x_2$ . Como a carga é idêntica nestas duas direções, concluímos que as duas tensões principais tem o mesmo valor, portanto as três tensões principais são dadas por  $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{F}{s_0}$  e  $\sigma_3 = 0$ , o círculo de Mohr correspondente é dado na Figura 1.18a.
- b. A pressão hidrostática se caracteriza pela isotropia e pela ausência de componentes de cisalhamento. Logo concluímos que qualquer direção no espaço é uma direção principal e que todas as três tensões principais são idênticas em valor, ou seja  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -P$  (onde o sinal negativo vem da nossa convenção para tensões de compressão). Os três círculos de Mohr colapsam em um ponto (veja Figura 1.18b).
- c. No terceiro problema, assim como no primeiro, temos que x<sub>3</sub> é direção principal com valor
   0 MPa, as duas outras direções principais estão no plano da chapa (perpendicular a x<sub>3</sub>),



Figura 1.12: Círculo de Mohr em três dimensões.



Figura 1.13: Círculo de Mohr de um dado estado de tensão.

o enunciado, entretanto, etabelece que no referencial escolhido todas as tensões normais se anulam, existindo apenas uma componente de cisalhamento (ou seja, a tensão média se anula neste estado de tensão). Começamos a desenhar o circulo de Mohr marcando o ponto  $(0,\tau^*)$  e procurando o círculo que tem centro em (0,0) e passa por este ponto. Vemos que este circulo define as duas outras tensões principais, que tem valores  $\pm \sigma^*$ . Completamos o círculo de Mohr, procurando os circulos que passam por estas tensões principais e a terceira (o ponto 0,0 que corresponde à tensão principal na direção  $x_3$ ). O resultado se encontra na Figura 1.18c.

*d.* No quarto problema temos as três tensões principais:  $\sigma_1 = +\sigma^*$ ,  $\sigma_2 = 0$  e  $\sigma_3 = -\sigma^*$ . Desenhamos, portanto os três circulos que passam por estes pontos. Notamos entretanto,



Figura 1.14: Construção gráfica para determinação do referencial correspondente às tensões principais no círculo de Mohr representado na Fig. 1.13.

que o resultado é completamente idêntico ao do terceiro exercício (Figura 1.18d). De onde concluímos que os dois problemas são equivalentes e diferem apenas pela orientação do referencial escolhido. Este exercício demonstra uma outra utilidade dos círculos de Mohr, a saber, a capacidade de representar graficamente os estados de tensão de forma independente do referencial.

Com relação ao escorregamento de discordâncias, vemos que no caso (a) os planos de máxima tensão de cisalhamento formam cones com eixo em  $x_3$  e inclinação de  $45^{\circ}$  em relação ao eixo, já nos casos (c) e (d) os planos de máxima tensão de cisalhamento formam superfícies piramidais com os lados alinhados com as duas tensões principais não nulas e lado inclinado a  $45^{\circ}$  em relação a  $x_3$ .

# 1.3 Estados Planos

Como escrito anteriomente, em certos casos é possível restringir a análise da deformação ou da tensão no sólido a um caso bidimensional específico. Estes casos definem duas condições de contorno especiais, que permitem o uso de técnicas avançadas de análise complexa para a solução de problemas elásticos. Estes casos serão descritos a seguir.



Figura 1.15: Determinação do valor das tensões principais no círculo de Mohr da Fig. 1.13.

#### 1.3.1 Estado Plano de Tensão

Como visto no exercício 1.6, três dos quatro casos investigados possuíam uma das tensões principais nula ( $\sigma_3$  no caso "a" e  $\sigma_2$  nos casos "b" e "d" na Fig. 1.17). Estados de tensão que apresentam esta propriedade denominam-se **Estados Planos de Tensão (EPT)**. Estes estados são característicos de superfícies, já que estas podem se deformar livremente, daí sua importância prática. Componentes típicos onde o EPT é muito importante são os feitos de chapas ou filmes finos. O EPT, portanto, é importante em peças estampadas ou ainda em embalagens. Note que os casos b) e d) discutidos aqui correspondem a estados **triaxiais** de tensão, portanto um estado **plano** não é necessariamente um estado **biaxial**.

#### 1.3.2 Estado Plano de Deformação

Analogamente ao EPT, podemos definir um estado de deformação para o qual pelo menos uma das deformações principais se anula. Este estado de deformação é denominado **Estado Plano de Deformação (EPD)**. O EPD é característico do centro de componentes que apresentem uma grande seção transversal (exemplo: chapas grossas, colunas, vigas). Veremos este ponto com um pouco mais de detalhe no capítulo 2. O EPD assume uma importância fundamental na Mecânica da Fratura, pois a resistência à propagação de uma trinca (ou seja a tenacidade à fratura) passa a ser independente da geometria do componente. Esta propriedade torna-se, portanto uma propriedade intrínseca do material (assim como o limite de escoamento).



Figura 1.16: Construção gráfica para a determinação do referencial correspondente às máximas tensões de cisalhamento no círculo de Mohr representado na Figura 1.13.



Figura 1.17: Quatro configurações de carregamentos sobre elementos de volume tridimensionais (a) - um elemento de chapa sujeito a um carregamento biaxial isotrópico no plano da chapa, (b) - um elemento esférico sujeito a um carregamento hidrostático, (c) - um elemento de chapa sujeito a um carregamento por cisalhamento puro no plano da chapa e (d) - um elemento de chapa sujeito a um carregamento biaxial em tração ao longo de  $x_1$  e em compressão ao longo de  $x_2$ , sendo que as tensões são idênticas em módulo.



Figura 1.18: Círculos de Mohr correpondentes aos problemas do exercício 1.6.

# 2 ELASTICIDADE LINEAR

Até o momento discutimos os tensores de tensão e de deformação separadamente, estas duas quantidades, entretanto, estão relacionadas por meio de relações do tipo:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = f \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$
(2.1)

A função f ou sua inversa  $f^{-1}$  (que também podem ser funções das taxas de deformação,  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ , da temperatura T, entre outras) são denominadas **relações constitutivas** do material.

Quando consideramos a deformação de um determinado material a partir de uma tensão suficientemente baixa, observamos que, para todos os materiais sólidos, a deformação cessa de existir se o esforço for novamente retirado. Esta deformação **reversível** caracteriza o que é conhecido como **regime elástico**. Para a maioria dos materiais observa-se que a deformação produzida é proporcional à tensão. Diz-se que estes materiais possuem comportamento **elástico linear**. Este capítulo tratará das relações que caracterizam o comportamento elástico linear, também chamadas **relações constitutivas da elasticidade**. É importante ressaltar que os polímeros dúcteis em geral e os elastômeros em particular **não** apresentam comportamento elástico linear (como será visto mais adiante no decorrer do curso).

# 2.1 Fenomenologia da elasticidade linear

### 2.1.1 Deformação causada por tensão normal

A Figura 2.1 representa um corpo sólido de dimensão inicial  $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 1$  e área transversal  $s_3^0 = 1$  no estado não deformado (linhas tracejadas). Quando este corpo é carregado em tração por uma força  $F_3$ , ele se deforma expandindo-se na direção do eixo  $x_3$  e contraindo-se na direção dos eixos  $x_1$  e  $x_2$ . Designamos estas expansões e contrações por  $\Delta x_1 = \Delta x_2 < 0$  e





Figura 2.1: Estado de deformação causado por uma tensão normal.

Com base nestas definições podemos escrever:

$$\sigma_{33} = E\varepsilon_{33} \Rightarrow \frac{F_3}{s_3^0} \approx E\frac{\Delta x_3}{x_3^0}$$
(2.2a)

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} = -v\varepsilon_{33} \Rightarrow \frac{\Delta x_2}{x_2^0} \approx -v\frac{\Delta x_3}{x_3^0}$$
 (2.2b)

As aproximações do lado direito das equações são válidas para deformações tendendo a zero, o que é o caso em geral na deformação elástica<sup>1</sup>. Tensões e deformações calculadas segundo estas fórmulas são chamadas "de engenharia", pois são empregadas para cálculos de resistência em projetos de engenharia.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Esta distinção pode parecer ao leitor uma mera questão de rigor matemático, sem implicações práticas. Muskhelishvili, entretanto, ressalta que o problema em questão está relacionado a que estado deve ser usado para descrever as tensões e as deformações. De fato, os tensores de tensão e de deformação são campos e portanto, funções da posição no interior do sólido. Ocorre que o domínio de definição destas funções não é sequer unicamente determinado! Estamos nos referindo ao sólido antes da deformação ou ao sólido deformado? No caso das deformações elásticas, tipicamente infinitesimais, ambos os domínios praticamente coincidem e o erro cometido é mínimo. No caso de deformações finitas (como na deformação plástica, por exemplo) isto não será verdade e alterações na teoria são necessárias.

#### Módulo de rigidez

A constante *E* utilizada na primeira equação da página anterior caracteriza a resposta do material a uma tensão normal na direção de aplicação da força e é chamada **Módulo de rigidez** (em inglês, **stiffness modulus**). Alguns fatos sobre o módulo de rigidez:

- A literatura também designa a constante *E* pelos nomes Módulo de Young e Módulo de elasticidade. Este último nome deve ser evitado, pois pode levar a uma interpretação errônea.
- O módulo de rigidez é uma propriedade intrínseca de um dado material.
- Por análise dimensional vê-se que o módulo de rigidez tem unidades de força por área, ou seja [E] = <sup>N</sup>/<sub>m<sup>2</sup></sub> ≡ Pa (Pascal).
- O módulo de rigidez assume valores típicos entre ~10 600 GPa para materiais metálicos e cerâmicos e E ≤ 10 GPa para materiais poliméricos.

#### Módulo de flexibilidade

O inverso do módulo de rigidez é denominado **módulo de flexibilidade** e é denotado pela letra  $S \equiv E^{-1}$ . Esta constante é denominada "compliance" em inglês e descreve a deformação (ou seja, o quanto o material **cede**) em função da tensão normal aplicada.

O módulo de flexibilidade é usado no contexto de fluência em materiais poliméricos e será discutido mais adiante no curso. Ele também aparece em mecânica da fratura, caracterizando a resposta mecânica do sistema formado por corpo de prova mais máquina de ensaio.

O módulo de flexibilidade também recebe outros nomes na literatura nacional, alguns exemplos são **módulo de submissão** e **compliância**. Estes termos devem ser evitados. O último, em particular, é um anglicismo grosseiro.

#### **Coeficiente de Poisson**

A constante *v* caracteriza a resposta do material a uma tensão normal nas direções transversais à de aplicação do esforço e recebe o nome de **coeficiente de Poisson**. Alguns fatos sobre o coeficiente de Poisson:

• Assim como o módulo de rigidez, o coeficiente de Poisson é uma propriedade intrínseca de um dado material

- Por análise dimensional verificamos que o coeficiente de Poisson é um adimensional.
- O coeficiente de Poisson varia para a maioria dos materiais no intervalo 0,2 ≤ v ≤ 0,5, com forte concentração de valores em torno de v ≈ 0,3. Existem entretanto alguns materiais com microestruturas muito características (materiais celulares) que podem apresentar coeficiente de Poisson negativo (ou seja, eles se *expandem* quando esticados).
- Um coeficiente de Poisson v = 0,5 corresponde à conservação do volume durante a deformação elástica (prova a seguir).

#### Prova da constância do volume com v = 0.5

Considere a figura 2.1. Supondo por simplicidade que o corpo não deformado possuía a forma de um cubo com lado unitário (portanto com volume inicial,  $V_0 = 1$ ), podemos escrever o volume do corpo deformado como:

$$V = (1 + \varepsilon_{11}) \times (1 + \varepsilon_{22}) \times (1 + \varepsilon_{33})$$

$$(2.3)$$

Desprezando os termos quadráticos e cúbicos podemos escrever a variação do volume durante a deformação elástica como:

$$\Delta V = V - V_0 \simeq \sum_i \varepsilon_{ii} \tag{2.4}$$

Substituindo  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -v\varepsilon_{33}$  temos que  $\Delta V = 0 \Leftrightarrow v = 0, 5$ .

## 2.1.2 Deformação produzida por tensão de cisalhamento

Pela análise da Figura 2.2 podemos escrever:

$$\tau_{12} = G\gamma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \tag{2.5}$$

A constante G recebe o nome de Módulo de cisalhamento e tem como unidade o Pascal.

#### Exercício 2.1

Considere um corpo cilíndrico de material com módulo de rigidez E = 80 GPa e coeficiente de Poisson v = 0,301 que apresenta seu eixo orientado ao longo de  $x_3$  e está sujeito a uma tensão normal  $\sigma_{33} = 45$  MPa. Responda:



Figura 2.2: Estado de deformação causado por tensão de cisalhamento.

- a. Qual o círculo de Mohr das tensões para este corpo?
- b. Qual o círculo de Mohr das deformações para este corpo?
- c. Qual o valor do módulo de cisalhamento deste material, baseado nos dados do enunciado?

#### Solução

A resposta da questão a. pode ser determinada facilmente considerando-se que a única tensão presente neste referencial é a tensão normal em  $x_3$ , que é, portanto uma das tensões principais. As outras duas direções principais estão localizadas a 90° de  $x_3$  e as tensões principais se anulam. O resultado está representado à esquerda da Figura 2.3. Como no poresente formalismo tensões normais resultam em deformações normais, segue que estas direções principais do estado de tensão também serão deformações principais no estado de deformação. Usando as equações 2.2a e 2.2b calculamos que  $\varepsilon_{33} = 0.0005625$  e que  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -0.0001693125$ . O circulo de Mohr resultante das deformações é mostrado à direita na Figura 2.3.

A terceira parte da questão é resolvida observando-se que para um referencial situado a  $45^{\circ}$  de  $x_3$  iremos observar uma tensão de cisalhamento de 22,5MPa que corresponde a uma deformação angular de 0.00036590625. Substituindo na equação 2.5 (note o fator 2!)



Figura 2.3: Círculos de Mohr das tensões e das deformações referente ao exercício 2.1.

#### concluímos que G = 30,74 GPa.

Como demonstrado no exercício 2.1, é possível calcular o valor do módulo de cisalhamento caso o módulo de rigidez e o coeficiente de Poisson sejam conhecidos. Na realidade estas três propriedades são relacionadas e podem ser obtidas a partir da identidade:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.6}$$

Esta identidade pode ser facilmente demonstrada utilizando o método do exercício 2.1.

# 2.2 Princípio da superposição

Os casos anteriormente discutidos permitem calcular a deformação produzida em situações bem específicas de carregamento. Como caracterizaríamos, entretanto, a deformação em um estado de tensão mais genérico? A resposta está na linearidade das relações constitutivas descritas acima.

Considere as respostas do material a dois estados de tensão diferentes,  $\sigma^A \in \sigma^B$ , respectivamente  $\varepsilon^A \in \varepsilon^B$ . O princípio da superposição estabelece que a resposta do sistema ao estado de tensão combinado  $\sigma = \sigma^A + \sigma^B \operatorname{será} \varepsilon = \varepsilon^A + \varepsilon^B$ .

#### 2.2.1 Lei de Hooke generalizada

Utilizando o princípio da superposição podemos escrever o tensor de deformação em função de um estado de tensão qualquer da seguinte forma:

#### 2.2 Princípio da superposição

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{v}{E}\sigma_{22} - \frac{v}{E}\sigma_{33} \\ \varepsilon_{22} = -\frac{v}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{v}{E}\sigma_{33} \\ \varepsilon_{33} = -\frac{v}{E}\sigma_{11} - \frac{v}{E}\sigma_{22} + \frac{1}{E}\sigma_{33} \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G}\sigma_{23} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2G}\sigma_{13} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12} \end{cases}$$
(2.7)

As equações anteriores podem ser escritas de forma mais compacta em notação matricial. Para tanto definimos duas novas matrizes:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{1} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{3} \\ \varepsilon_{4} \\ \varepsilon_{5} \\ \varepsilon_{6} \\ \varepsilon_{6} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{6} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{15}$$

Estas construções seguem o esquema:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \leftarrow \sigma_{13} \\ \ddots & \uparrow \\ \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \cdots & \ddots & \uparrow \\ \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$(2.9)$$

Desta forma as relações constitutivas da elasticidade podem ser escritas como:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{1} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{3} \\ \varepsilon_{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ \varepsilon_{6} \end{vmatrix} = \sigma_{6}$$

$$(2.10)$$

#### 2.2 Princípio da superposição

onde:

$$|S_{ij}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{vmatrix}$$
(2.11)

é a matriz de flexibilidade do sistema.

#### Exercício 2.2

Considere um cubo de dimensões unitárias no estado não deformado feito de material com módulo de rigidez E e coeficiente de Poisson v e que está sujeito a um estado triaxial de tensões genérico, mas para o qual as direções principais da deformação coincidem com suas arestas. Responda qual a relação que existe entre a variação de volume do corpo e seu estado de tensão (expresso em função das tensões principais)?

#### Solução

Como vimos anteriormente a variação de volume do corpo é dada por:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon i i \tag{2.12}$$

Usando a Equação 2.7 obtemos:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(1-2\nu)}{E} \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii}$$
(2.13)

Que á a relação pretendida. Podemos, entratanto, utilizar a identidade:

$$-P = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \tag{2.14}$$

Reescrevemos desta forma a Equação 2.13 como:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{3(1-2\nu)}{E}P$$
(2.15)

#### 2.2.2 Compressibilidades

A constante obtida no exercício 2.2 relaciona a variação do volume à pressão hidrostática atuante sobre o corpo, sendo definida como:

$$B\frac{\Delta V}{V} = -P \Rightarrow B = \frac{E}{3(1-2\nu)} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)$$
(2.16)

Ela recebe o nome de **módulo de volume**. Na termodinâmica esta quantidade está relacionada ao inverso da **compressibilidade**. Esta última pode ser definida por meio de dois processos: uma compressão à temperatura constante ou sem permitir a troca de calor com o meio. As constantes respectivas recebem o nome de **compressibilidade isotérmica**,  $\kappa_T$ , e **compressibilidade adiabática**.  $\kappa_S$ . Para a maioria dos sólidos estas duas constantes tem praticamente o mesmo valor, mas esta distinção, em princípio, deve se manifestar também nas constantes elásticas do material. Em circunstâncias extremas, como por exemplo, na deformação por choque, ou na transmissão de som no sólido, é possível que as propriedades elásticas sejam afetadas por ela.

#### Constantes de Lamé

Os módulos elásticos definidos na seção 2.1 são de uso corrente na engenharia. No contexto da teoria matemática da elasticidade, entretanto, é mais comum a utilização das chamadas "constantes de Lamé",  $\lambda \in \mu$ .

A lei de Hooke generalizada, escrita em termos das constantes de Lamé é dada por:

$$\sigma_{11} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{11} \tag{2.17a}$$

$$\sigma_{22} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{22} \tag{2.17b}$$

$$\sigma_{33} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{33} \tag{2.17c}$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \tag{2.17d}$$

$$\sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \tag{2.17e}$$

$$\sigma_{31} = 2\mu\varepsilon_{31} \tag{2.17f}$$

Onde  $\theta = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}).$ 

Comparando as equações 2.17 e 2.7 vemos que  $\mu = G$ . Já  $\lambda$  e  $\mu$  se relacionam com E e  $\nu$ 

#### 2.3 Restrições (Constraints)

da seguinte forma:

$$E = \frac{\mu \left(3\lambda + 2\mu\right)}{\lambda + \mu} \tag{2.18a}$$

$$v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{2.18b}$$

Já as compressibilidades estão relacionadas a  $\lambda \in \mu$  por meio de:

$$B = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{2.19}$$

Por fim,  $\lambda \in \mu$  estão relacionadas a *E* e *v* por meio de:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \tag{2.20a}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.20b}$$

# 2.3 Restrições (Constraints)

Considere o cubo unitário apresentado na Fig. 2.1. No presente caso, entretanto, iremos impor o estado de deformação descrito pelo círculo de Mohr de deformações apresentado na Fig. 2.4:



Figura 2.4: Exemplo de círculo de Mohr em EPD.

Para que isto seja possível é necessário impor ao sistema três tensões principais não nulas,

#### 2.3 Restrições (Constraints)

sendo as três de tração ( $\sigma_1$  na direção de  $\varepsilon_1$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 < \sigma_1$  nas direções perpendiculares.

Estas tensões podem ser calculadas usando a lei de Hooke generalizada e seus valores são:

$$\sigma_1 = E \left( 1 - \frac{v^2}{1 - v} \right)^{-1} \varepsilon_1 \tag{2.21a}$$

e

$$\sigma_3 = \sigma_2 = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_1 \tag{2.21b}$$

Assumindo que estamos lidando com um material convencional (para o qual 0, 2 < v < 0, 5) vemos que o efeito de impedir a deformação lateral (nas direções 2 e 3) do material corresponde a **aumentar** a rigidez do mesmo na direção de solicitação (pois o termo entre parênteses é menor que a unidade).

- Este tipo de condição caracteriza uma restrição à deformação (em inglês, *contraint*) e pode ser realizado se algum meio material estiver impedindo a deformação lateral do componente (por exemplo, soldando ou colando o material a uma cavidade de material mais rígido).
- Restrições estão presentes nos processos de conformação dos materiais (por exemplo, na extrusão ou no forjamento, onde a matriz apenas se deforma elasticamente enquanto que o material escoa).

#### **Restrições e o EPD**

Um caso importante de restrição é o observado no centro de corpos espessos. Para analisar este caso, vamos considerar a Fig. 2.5, que representa uma placa espessa sendo carregada com uma tensão  $\sigma_{33}$ .

O corpo foi mentalmente dividido em três regiões distintas, uma fatia fina central e as duas partes vizinhas, marcadas como I e II. Podemos agora considerar a deformação de cada uma destas regiões como se estivessem desconectadas no interior do corpo. Vamos considerar inicialmente a interface entre a fatia central e o bloco I: A superfície da fatia central tende a se deslocar por uma distância  $\Delta x_2^{c/I} = -\frac{v}{2E}\sigma_{33}\delta x_2^c$ , enquanto que a superfície do bloco I tende a se deslocar  $\Delta x_2^{I/c} = +\frac{v}{2E}\sigma_{33}x_2^I$ . O mesmo raciocínio pode ser empregado na interface da fatia central com o bloco II, sendo o resultado idêntico (porém com sinais invertidos).

#### 2.4 Anisotropia elástica



Figura 2.5: Construção esquemática do *Gedankenexperiment* usado na demonstração do efeito de restrições sobre o estado de tensões de componentes espessos.

Se os blocos fosse realmente desconectados, a deformação lateral iria criar, portanto um espaço vazio nas interfaces. Isto, entretanto, não ocorre e o material do bloco I (respectivamente, do bloco II) resiste à contração lateral da fatia central, fazendo surgir uma restrição à deformação na direção  $x_2$ . Desta forma justifica-se a afirmação feita no capítulo anterior de que corpos espessos, carregados em tração, são caracterizados pela existência de um estado plano de deformação (pois  $\varepsilon_{22} = 0$ ) na sua região central.

# 2.4 Anisotropia elástica

Os casos anteriormente discutidos assumem implicitamente que o material tem propriedades isotrópicas, isto é, que as constantes  $E \in v$  (conforme visto no exercício 2.1, G pode ser escrito em função de  $E \in v$ ) não variam com a direção no interior do material. Isto é verdadeiro efetivamente apenas para materiais amorfos e é uma boa aproximação para materiais policristalinos (ou ainda polímeros semi-cristalinos não orientados) desde que o tamanho de grão seja pequeno em relação às dimensões do corpo e na ausência de textura cristalográfica. Em todos os outros casos (notadamente em monocristais) as constantes elásticas variam com a direção e a matriz de flexibilidade  $|S_{ij}|$  ou sua inversa, a matriz de rigidez,  $|C_{ij}| = |S_{ij}|^{-1}$  assumem formas mais complexas que as discutidas para materiais isotrópicos.

Em princípio as matrizes de rigidez e de flexibilidade podem ter até 21 termos distintos

entre si (as matrizes são simétricas)<sup>2</sup>. As estruturas cristalinas, entretanto, se caracterizam por **elementos de simetria**, que garantem a equivalência de certas direções no espaço. Por exemplo, se considerarmos uma estrutura cúbica, qualquer rotação de 90o em torno de um dos eixos [001], [010] ou [100] produz uma configuração fisicamente equivalente à de partida. As propriedades elásticas de um cristal cúbico, portanto, devem ser simétricas perante este tipo de rotação.

Após uma dedução consideravelmente longa (que pode ser encontrada em G. E. Dieter "Mechanical metallurgy", 2<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill, 1976) é possível mostrar que para uma cristal cúbico a matriz de rigidez tem a forma:

$$|C_{ij}| = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{vmatrix}$$
(2.22)

portanto, contendo uma constante a mais que no caso isotrópico.

Os termos  $C_{ij}$  da matriz de rigidez são também denominados de **constantes elásticas** do cristal.

Os termos da matriz de flexibilidade de cristais com simetria cúbica podem ser obtidos em função dos da matriz de rigidez anterior calculando-se sua inversa:

$$\begin{cases}
S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})} \\
S_{12} = \frac{-C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})} \\
S_{44} = \frac{1}{C_{44}}
\end{cases}$$
(2.23)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Esta afirmação pode parecer trivial, mas deduzí-la a partir de primeiros princípios é uma tarefa complexa. Muskhelishvili, por exemplo, cita que a dedução correta do número 21 a partir das interações moleculares foi buscada tanto por Cauchy quanto por Poisson (respectivamente nos séculos XVIII e XIX), mas que a solução definitiva do problema foi dada por Max Born apenas no início do século XX.

#### 2.4 Anisotropia elástica

A forma da matriz de rigidez para o caso de monocristais cúbicos é enganosamente simples. Cristais menos simétricos apresentam maior número de termos e formas que se diferenciam da matriz dos materiais isotrópicos. Para o caso de cristais monoclínicos (estrutura característica de algumas cerâmicas), por exemplo, teríamos:

$$|C_{ij}| = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & \ddots & & C_{55} & 0 \\ & & & & C_{66} \end{vmatrix}$$
(2.24)

Note que em cristais monoclínicos temos constantes elásticas que relacionam tensões normais a deformações angulares e vice-versa.

Comparando-se a matriz de rigidez de materiais isotrópicos com a de monocristais cúbicos e usando a relação entre G, E e v derivada no exercício 2.1, vemos que estas teriam formas idênticas se a igualdade abaixo for obedecida:

$$A \equiv \frac{2C_{44}}{(C_{11} - C_{12})} = 1 \tag{2.25}$$

O parâmetro definido acima serve como uma medida da anisotropia elástica de um monocristal cúbico e é denominado **taxa de anisotropia** por Chawla e Meyers.

Vemos, portanto, que um monocristal cúbico que apresente  $A \approx 1$  irá se comportar como uma material macroscopicamente isotrópico.

**Exercício 2.3** Mostre que para o caso de cristais monoclínicos os eixos principais da tensão **não** coincidem com os eixos principais da deformação e vice-versa (Nota: exceto para uma condição muito especial, qual é esta condição?)

#### Solução

Para provar a primeira asserção escolhemos um estado de deformação correspondente a

um referencial de deformações principais, ou seja:

$$\begin{array}{c|c}
\varepsilon_1 \\
\varepsilon_2 \\
\varepsilon_3 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}$$
(2.26)

Multiplicamos agora a Matriz 2.26 pela matriz de flexibilidade (Equação 2.24) obtendo:

.

$$\begin{array}{c}
C_{11}\varepsilon_{1} + C_{12}\varepsilon_{2} + C_{13}\varepsilon_{3} \\
C_{12}\varepsilon_{1} + C_{22}\varepsilon_{2} + C_{23}\varepsilon_{3} \\
C_{13}\varepsilon_{1} + C_{23}\varepsilon_{2} + C_{33}\varepsilon_{3} \\
0 \\
0 \\
C_{16}\varepsilon_{1} + C_{26}\varepsilon_{2} + C_{36}\varepsilon_{3}
\end{array}$$
(2.27)

Esta solução apresenta uma componente de cisalhamento ( $\sigma_6 \equiv \sigma_{23}$ ), provando que o estado de tensão não corresponde a um referencial de tensões principais. A recíproca é verdadeira devido à linearidade das equações que impõe a unicidade das soluções (ou seja, apenas a solução calculada neste problema resulta em um estado de deformações no referencial das deformações principais). A condição necessária para que os dois referenciais principais coincidissem seria  $C_{16}$ ,  $C_{26}$  e  $C_{36}$  se anularem identicamente, o que é improvável em se tratando de uma estrutura monoclínica (lembre-se que na estrutura monoclínica o eixo a<sub>3</sub> não é ortogonal a a<sub>1</sub> e a<sub>2</sub> por definição).

#### Propriedades elásticas de monocristais

Com base nas constantes elásticas é possível calcular os módulos de rigidez,  $E_{hkl}$ , e de cisalhamento  $G_{hkl}$ , efetivos para um monocristal cúbico carregado ao longo de uma direção [hkl]:

$$\frac{1}{E_{hkl}} = S_{11} - 2\left(S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44}\right)\ell^{[hkl]}$$

$$\frac{1}{G_{hkl}} = S_{44} + 4\left(S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44}\right)\ell^{[hkl]}$$
(2.28)

.

com

$$\ell^{[hkl]} \equiv \cos^2(\theta_1^{hkl})\cos^2(\theta_2^{hkl}) + \cos^2(\theta_2^{hkl})\cos^2(\theta_3^{hkl}) + \cos^2(\theta_1^{hkl})\cos^2(\theta_3^{hkl})$$
(2.29)

Onde  $\cos(\theta_n^{hkl})$  é o cosseno diretor da direção [hkl] em relação ao eixo  $a_n$  e que pode ser calculado pela fórmula genérica, usando [uvw] = [100], [010] e [001]:

$$\cos(\theta_{uvw}^{hkl}) = \frac{hu + kv + lw}{(h^2 + k^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}(u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}}$$
(2.30)

#### Materiais ortotrópicos

Uma classe importante de materiais é caracterizada por três planos de simetria elásticos mutuamente perpendiculares. Estes materiais são denominados **ortotrópicos** e são caracterizados por matrizes de rigidez (ou de flexibilidade) do tipo:

Exemplos de materiais ortotrópicos são: madeira, compensado, compositos de matriz polimérica com reforço por fibras contínuas e chapas metálicas com alto grau de textura cristalográfica.

# 2.5 Equações básicas da elasticidade nos estados planos e a função tensão

A solução dos problemas da teoria da elasticidade envolve um conjunto muito específico de equações diferenciais a derivadas parciais (as equações do equilíbrio elástico, brevemente mencionadas anteriormente) e condições relacionando as tensões às deformações, que por fim levam ao campo de deslocamentos. O caso geral, tridimensional, é discutido no livro de Muskhelishvili, anteriormente citado, nas paginas 72 a 77. A discussão destas equações, entretanto, cai fora do escopo do presente livro. No caso dos estados planos (EPD e EPT), entretanto, as equações são consideravelmente simplificadas. A restrição a problemas bidimensionais também permite o uso de técnicas de análise complexa à solução dos problemas, de forma consideravelmente elegante. No que se segue será feita uma breve explanação destes métodos. Iniciamos com uma definição formal das equações da elasticidade para os dois casos limitrofes (EPD e EPT).

#### EPD

Um material é dito sujeito a um EPD paralelo ao plano  $0x_1x_2$  se a componente  $u_3$  do campo de deslocamento se anular e se  $u_1$  e  $u_2$  dependerem de  $x_1$  e  $x_2$ , mas não de  $x_3$  ( o que equivale dizer que o problema é bidimensional). Neste caso reduzimos o problema geral ao seguinte conjunto de equações:

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{2.32}$$

Já a lei de Hooke generalizada se reduz a:

$$\sigma_{11} = \lambda \,\theta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{2.33a}$$

$$\sigma_{22} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{2.33b}$$

$$\sigma_{12} = \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$
(2.33c)

$$\sigma_{33} = \lambda \theta \tag{2.33d}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \tag{2.33e}$$

Além disto as equações do equilíbrio elástico se restringem a:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0$$
(2.34a)

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0$$
(2.34b)

$$f_3 = 0$$
 (2.34c)

As equações 2.34 e 2.33a a 2.33c formam o conjunto de equações buscado. Este conjunto é complementado por duas equações auxiliares:

$$\theta = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$
(2.35)

que pode ser obtida a partir das equações 2.33 substituindo-se a definição de  $\theta$  (Eq. 2.32) e a Eq. 2.33d para determinar  $\sigma_{33}$ .

#### EPT

A derivação das equações básicas da elasticidade no EPT é um pouco mais complexa, tendo em vista que, formalmente, o problema continua sendo tridimensional. A derivação a seguir é baseada naquela dada por Muskhelishvili (páginas 92 a 95).

Vamos inicialmente considerar uma placa fina na forma de um cilindro com eixo orientado ao longo de  $x_3$  e cuja altura é muito menor que o raio da base. Adicionalmente consideramos que as forças volumétricas, se presentes, encontram-se confinadas ao plano da base (ou seja, elas não dependem de  $x_3$ ). A origem do referencial é colocada ao longo do eixo, no plano médio do cilindro (ou seja, as superfícies da base se encontram nas coordenadas  $x_3 = \pm h$ ).

Definimos os deslocamentos médios ao longo da espessura da placa como:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} u_1(x_1, x_2, x_3) \mathrm{d}x_3$$
(2.36a)

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} u_2(x_1, x_2, x_3) \mathrm{d}x_3$$
(2.36b)

(2.36c)

Por definição as funções  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  e  $\sigma_{33}$  se anulam em  $z = \pm h$ . Usando as equações do equilíbrio elástico (e lembrando que  $f_3 = 0$  por definição) concluímos que:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right|_{z=\pm h} = 0 \\ \left. \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \right|_{z=\pm h} = 0 \\ \left. \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right|_{z=\pm h} = 0 \end{cases}$$
(2.37)

Portanto  $\sigma_{33}$  não apenas se anula na superfície, mas também tem derivada nula neste ponto. Assim  $\sigma_{33}$  será negligível ao longo de toda a espessura da chapa e podemos assumir por simplicidade que  $\sigma_{33} = 0$  em toda a placa.

Consideramos agora as duas outras equações do equilíbrio elástico e tomamos suas médias ao longo da espessura, obtendo:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial x_2} + \bar{f}_1 = 0$$
(2.38a)

$$\frac{11}{\partial x_1} + \frac{12}{\partial x_2} + f_1 = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \bar{f}_2 = 0$$
(2.38a)
(2.38b)

O resultado acima é obtido lembrando-se que:

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \mathrm{d}x_3 \equiv \frac{1}{2h} \sigma_{i3} \Big|_{-h}^{+h} = 0$$
(2.39)

Além disto, segue de:

$$\lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \sigma_{33} = 0$$
(2.40)

que

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)$$
(2.41)

Substituindo a Eq. 2.41 em 2.17 obtemos:

$$\sigma_{11} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$
(2.42a)

$$\sigma_{11} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$
(2.42b)

Por fim, tomamos a média ao longo da espessura de  $\sigma_{12}$  e obtemos:

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\lambda}\,\bar{\theta} + 2\mu \frac{\partial \bar{u_1}}{\partial x_1} \tag{2.43a}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \bar{\lambda}\,\bar{\theta} + 2\mu \frac{\partial \bar{u_2}}{\partial x_2} \tag{2.43b}$$

$$\bar{\sigma_{12}} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right)$$
(2.43c)

Estas equações são formalmente idênticas às equações derivadas para o EPD, sendo que a

única alteração é dada pela constante:

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2} \tag{2.44}$$

A distinção entre propriedades do EPD e as propriedades médias sobre a espessura da chapa no EPT pode ser, portanto, simplesmente abandonada e uma solução geral das equações pode ser buscada. A distinção entre o EPT e o EPD será feita, portanto, pela escolha da contante  $\overline{\lambda}$  ou  $\lambda$  respectivamente. Este é um resultado importantíssimo: ele mostra que qualquer solução de um problema elástico no EPD será também solução do problema equivalente (com a alteração do módulo) no EPT.

#### Solução das equações básicas

Substituindo as equações 2.33 em 2.38 e resolvendo para os deslocamentos obtemos:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \mu\Delta u_1 = 0 \tag{2.45a}$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \mu\Delta u_2 = 0 \tag{2.45b}$$

Onde os símbolo  $\Delta$  no presente caso representa o operador laplaciano, ou seja:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial (x_1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x_2)^2}$$
(2.46)

Este sistema de equações fornece a solução buscada, mas é conveniente buscar um sistema de equações que envolva apenas as tensões. Esta equações envolvem, obviamente, as equações 2.38 mais uma equação adicional, que será determinada a seguir. Vamos considerar as equações de compatibilidade de Saint-Venant (Eqs. 1.39) e aplicá-las ao caso particular do EPD. Como  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$  são independentes de  $x_3$  e considerando que  $\sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{33} = 0$ , estas condições obviamente se reduzem a:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial (x_2)^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial (x_1)^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_2}$$
(2.47)

Resolvendo as equações de Hooke generalizadas para as deformações temos:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left\{ \sigma_{11} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( \sigma_{11} + \sigma_{22} \right) \right\}$$
(2.48a)

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2\mu} \left\{ \sigma_{22} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( \sigma_{11} + \sigma_{22} \right) \right\}$$
(2.48b)

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{12} \tag{2.48c}$$

Substituindo as equações 2.48 em 2.47 obtemos:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial (x_2)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial (x_1)^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$
(2.49)

Que é a condição buscada. Ela representa um caso especial das seis condições de compatibilidade de Beltrami-Michell, necessárias para a solução do caso geral. Ela pode ser consideravelmente simplificada com o auxílio das equações 2.38. De fato, diferenciando-se a equação 2.38a em  $x_1$ , a equação 2.38b em  $x_2$  e adicionando-as obtemos:

$$-2\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial (x_1)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial (x_2)^2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$
(2.50)

Finalmente substituindo-a na equação 2.49 e simplificando obtemos:

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)$$
(2.51)

As equações acima derivadas formam um sistema de equações diferenciais a derivadas parciais que permitem a solução de problemas de elasticidade plana. Impondo ao problema a condição adicional da ausência de forças volumétricas, podemos simplificar ainda mais o problema. Veremos a seguir que, neste caso, as ferramentas da análise complexa permitem expressar os problemas da elasticidade plana de uma forma simples e elegante.

#### A função tensão

No caso da ausência de forças volumétricas podemos reescrever as equações 2.34 como:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{2.52a}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$
 (2.52b)

#### 2.5 Equações básicas da elasticidade nos estados planos e a função tensão

Observamos que a primeira implica na existência de uma certa função  $B(x_1, x_2)$  tal que:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x_1} = -\sigma_{12} \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} = \sigma_{11} \end{cases}$$
(2.53)

Da mesma forma a segunda equação implica na existência de uma certa função  $A(x_1, x_2)$  tal que:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x_1} = \sigma_{22} \\ \frac{\partial A}{\partial x_2} = -\sigma_{21} \end{cases}$$
(2.54)

Comparando-se as equações para  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  observamos que:

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} = \frac{\partial B}{\partial x_1} \tag{2.55}$$

Disto segue, entretanto, a existência de uma certa função  $U(x_1, x_2)$  tal que:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_1} = A\\ \frac{\partial U}{\partial x_2} = B \end{cases}$$
(2.56)

Substituindo as equações 2.53 e 2.54 em 2.56 obtemos:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial(x_2)^2} \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial(x_1)^2} \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases}$$
(2.57)

A função U é chamada de função de Airy em homenagem a G. B. Airy, que as derivou em 1862 ou ainda de **função tensão**.

Substituindo agora a equação 2.51 (no caso da ausência de forças volumétricas):

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \tag{2.58}$$

e notando que:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta U \tag{2.59}$$

#### 2.5 Equações básicas da elasticidade nos estados planos e a função tensão

Verificamos que U satisfaz:

$$\Delta \Delta U = 0 \Rightarrow \frac{\partial^4 U}{\partial (x_1)^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial (x_1)^2 \partial (x_2)^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial (x_2)^4} = 0$$
(2.60)

A equação diferencial a derivadas parciais de quarta ordem definida acima é chamada de **equação biharmônica**. Da mesma forma, funções que a satisfazem são chamadas de **funções biharmônicas**. O fato de que a função tensão é uma função biharmônica foi deduzido pela primeira vez por J. C. Maxwell. Entretanto, como Muskhelishvili ressalta, nem toda a função biharmônica é compatível com as equações da elasticidade plana. Para isto é necessário, adicionalmente, que a função U seja contínua e tenha derivadas contínuas até a quarta ordem e que as derivadas seja univocamente determinadas iniciando-se da segunda ordem em diante em todo o domínio.

É possível demonstrar que toda a função biharmônica de duas variáveis  $x_1$  e  $x_2$  pode ser convenientemente expressa em termos de duas funções da variável complexa  $z = x_1 + ix_2$ , o que introduz um método simples e elegante de solução das equações da elasticidade.

Introduzimos a função P definida como:

$$P = \Delta U \tag{2.61}$$

e a função Q, harmônica conjugada a P, ou seja, ela satisfaz as condições de Cauchy-Riamann:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2}\\ \frac{\partial P}{\partial x_2} = -\frac{\partial Q}{\partial x_1} \end{cases}$$
(2.62)

Notamos que Q é definida pelas condições 2.62 exceto por uma constante arbitrária. Introduzimos agora a função  $\phi(z)$  da variável complexa  $z = x_1 + ix_2$  como:

$$\phi(z) = P(x_1, x_2) + iQ(x_1, x_2) \tag{2.63}$$

Introduzimos ainda as funções  $\Phi e \Phi'$  definidas como:

$$\Phi(z) = p + iq = \frac{1}{4} \int \phi(z') dz'$$
(2.64)

2.5 Equações básicas da elasticidade nos estados planos e a função tensão

$$\Phi'(z) = \frac{\partial p}{\partial x_1} + i\frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{1}{4}\left(P + iQ\right)$$
(2.65)

Notamos agora que  $p \in q$  obedecem as condições de Cauchy-Riemann (Eq. 2.62) e derivamos:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{1}{4}P$$
(2.66a)

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\frac{\partial q}{\partial x_1} = -\frac{1}{4}Q \tag{2.66b}$$

Usando as relações 2.66 podemos demonstrar que a função  $U - px_1 - qx_2$  é harmônica, ou seja:

$$\Delta(U - px_1 - qx_2) = 0 \tag{2.67}$$

Assim introduzimos a função harmônica  $P_1$  tal que:

$$U = px_1 + qx_2 + P_1 \tag{2.68}$$

Introduzimos agora a função complexa<sup>3</sup>  $\Xi(z)$  cuja parte real é  $P_1$ , ou seja  $P_1 = \Re{\{\Xi\}}$ . Assim podemos escrever U como:

$$U = \Re \left\{ z^* \Phi(z) + \Xi(z) \right\}$$
(2.69a)

onde o símbolo ()<sup>\*</sup> denota o complexo conjugado da variável (ou seja, se  $A = a + ib \Rightarrow A^* = a - ib$ ).

Podemos ainda reescrever a equação 2.69 como:

$$2U = z^* \Phi(x) + z \Phi(z)^* + \Xi(z) + \Xi(z)^*$$
(2.69b)

Com o auxílio destas funções podemos escrever a expressão para o campo de deslocamentos:

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Para calcular  $\Xi$  devemos determinar a função  $Q_1$ , harmônica conjugada a  $P_1$ .
$$2\mu (u_1 + iu_2) = -\kappa \phi(z) - z \phi'(z)^* - \psi(z)^*$$
(2.70)

onde  $\psi(z) = \frac{\partial \Xi}{\partial z}$  e  $\kappa$  é definida no EPD como:

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu \tag{2.71a}$$

e no EPT como:

$$\bar{\kappa} = \frac{\bar{\lambda} + 3\mu}{\bar{\lambda} + \mu} = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \tag{2.71b}$$

O campo de tensões, por sua vez pode ser determinado pelo sistema de equações:

$$\theta = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 2 \left[ \Phi' + {\Phi'}^* \right] = 4 \Re \left\{ \Phi' \right\}$$
(2.72a)

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \Phi' + {\Phi'}^* + z{\Phi''}^* + {\psi'}^*$$
(2.72b)

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2\left[z^*\Phi'' + \psi'\right]$$
(2.72c)

Pelas expressões<sup>4</sup> acima vemos que a função tensão determina tanto o campo de deslocamentos quanto o campo de tensões através de suas derivadas e de funções conjugadas, contendo portanto toda a informação necessária à solução dos problemas da elasticidade linear. Este formalismo tem um papel central na fundamentação da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), como será visto a seguir.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>A dedução das expressões é consideravelmente complexa e não é apresentada aqui, ela pode ser encontrada no livro de Muskhelishvili [M], nas páginas 109 a 114.

# 3 CONCENTRADORES DE TENSÃO E FUNDAMENTOS DE MECÂNICA DA FRATURA

# 3.1 Concentradores de tensão

Até o momento discutimos estados de tensão, que apesar de triaxiais, eram assumidamente constantes ou variavam suavemente no interior do corpo sólido. Tal só ocorre na prática para componentes com geometria e carregamentos muito simples. No caso mais geral, por exemplo, em uma engrenagem, o estado de tensão varia de uma forma irregular ao longo do corpo, podendo ocasionar **concentrações de tensão** em certos pontos específicos do mesmo. Estas concentrações de tensão tem um papel preponderante em diversos aspectos da mecânica dos materiais e iremos, portanto, investigá-los com algum detalhe no presente capítulo.

Considere a situação esquematizada na Fig. 3.1. Ela representa um componente carregado em tração que apresenta, entretanto, uma variação de seção ao longo de seu comprimento.

É razoável supor que longe da região onde há a variação da seção do corpo, o estado de tensão desenvolvido se assemelhará ao carregamento uniaxial, porém com dois níveis de tensão diferentes,  $\sigma_1 = \frac{F}{s_1}$  e  $\sigma_2 = \frac{F}{s_2}$ , que agem como estados de tensão limitrofes ao qual a solução do problema deve convergir de forma assintótica.

- A região onde ocorre a variação de tensão é denominada um concentrador de tensão (em inglês, "stress raiser"), tendo em vista que pelo menos uma das componentes normais do estado de tensão usualmente será maior em módulo que o das tensões dos estados uniaxiais limites.
- Os estados uniaxiais limitrofes são um exemplo particular de estado de tensão remoto. Este termo designa o estado de tensão assintótico do corpo (ou seja, o estado para o qual o corpo tende quando nos afastamos do concentrador de tensão).

#### 3.1 Concentradores de tensão



Figura 3.1: Exemplo de conscentrador de tensão.

- Vemos que a introdução do concentrador de tensão **perturba** o estado remoto.
- Além de provocar aumentos locais da tensão, a presença do concentrador de tensão pode gerar estados de tensão com alto grau de triaxialidade, mesmo para tensões remotas uniaxiais.

# **3.1.1** Fator de concentração de tensão $(K_t)$

Pelo discutido acima, fica implícito que a distribuição das tensões no interior do sólido representado na Figura 3.1 será uma propriedade geométrica do mesmo e do(s) estado(s) de tensão remoto(s).

Chamamos de **entalhe** qualquer perturbação do estado de tensão de um corpo sólido quando sujeito a um estado de tensões remoto  $\sigma$  e definimos o **fator de concentração de tensão** deste entalhe ( $K_t$ ) como sendo:

$$K_t \equiv \frac{\sigma_{max}}{\sigma} \tag{3.1}$$

Alguns fatos sobre K<sub>t</sub>:

•  $K_t$  pode ser entendido como a "potência" de amplificação da tensão de um dado entalhe,

- *K<sub>t</sub>* abstrai o efeito do estado de tensão remoto, sendo portanto uma propriedade da geometria do corpo e do entalhe,
- os valores de *K<sub>t</sub>* para um sem número de entalhes podem ser encontrados na forma de tabelas ou gráficos em manuais de resistência dos materiais e
- o fator K<sub>t</sub> tem importância fundamental na mecânica dos materiais pois ele representa a máxima tensão normal de tração atuando em um determinado ponto do corpo, esta, por sua vez é responsável por uma série de fenômenos que levam à falha dos componentes em serviço (por exemplo, propagação de trincas em carregamento monótono ou cíclico).

# 3.2 A solução de Inglis para o furo central elíptico (1913)

Inglis resolveu em 1913 apresentou a solução geral para o problema de uma placa infinita contendo um furo central elíptico passante. Este problema é fundamental para todo o desenvolvimento posterior da Mecânica da Fratura, já que esta solução foi empregada por Griffith, Irwin e outros pesquisadores no desenvolvimento de modelos para a propagação de trincas em sólidos. Apesar desta importância, a maioria dos livros-texto limita-se a apresentar apenas os principais resultados, o que contribui para a subestimação do trabalho deste pesquisador. Aqui iremos apresentar a dedução original dada por Inglis, com a única diferença de que a notação utilizada por este pesquisador será adaptada àquela adotada no presente texto.

Deve-se mencionar entretanto que Inglis não foi o único pioneiro na solução deste tipo de problema. Na verdade quase todo o mundo matemático se debruçava sobre ele e outros problemas semelhantes no início do século XX. H. P. Rossmanith publicou um artigo recente<sup>1</sup> onde revisa a participação de diversos pesquisadores alemães e austríacos (melhor dizendo, autro-húngaros) na produção científica em mecânica da fratura no início do século XX e sugere razões para o relativo desconhecimento atual destes artigos por parte da comunidade científica. Neste artigo ele cita um trabalho de K. Wiegardt publicado<sup>2</sup> em 1907 onde o autor apresenta a solução para o campo elástico no chamado "problema da cunha" (*Wedge problem*) incluindo trincas como um caso limite. Este trabalho antecede o artigo de Inglis cerca de quatro anos, mas é virtualmente desconhecido da comunidade científica. É importante também ressaltar a importância de dois trabalhos publicados em 1922 por A. Smekal<sup>3</sup> e K. Wolf<sup>4</sup> que são creditados

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>"Fracture mechanics and materials testing: the forgotten pioneers of the early 20th century", Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. **22**, 781-797 (1999).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>K. Wiegardt "Über das Spalten und Zerreissen elastischer Körper" Z. Mathematik Physik 55, 60-103 (1907).

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>"Technische Festigkeit und molekulare Festigkeit", *Naturwissenschaften* **10**, 799-804 (1922).

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Zur Bruchtheorie von A. Griffith, Z. angew. Mathematik Mechanik **3** 107-112 (1922).

apenas por terem corrigido erros contidos nas primeiras deduções de Griffith (veja a seção 3.3), mas cuja leitura mostra uma grande preocupação em interpretar os resultados deste autor e sua importância para a engenharia.

Inglis apresentou seu trabalho no 44° encontro de primavera da Instituição dos Arquitetos Navais, em 14 de março de 1913<sup>5</sup>. O trabalho foi dividido em duas partes, na primeira parte Inglis apresenta e discute os principais resultados dos seus cálculos, bem como considerações filosóficas sobre a propagação de trincas em carregamento estático e dinâmico. Na segunda parte o autor apresenta os cálculos propriamente ditos. Iniciarei a análise por este ponto.

## 3.2.1 Definição de variáveis

Inglis define um sistema de coordenadas curvilíneas composto por dois conjuntos de curvas que se intersectam em ângulos retos. Sejam  $\alpha \in \beta$  duas constantes que definem biunivocamente duas curvas particulares dos respectivos conjuntos, podendo ser usadas, portanto, identificar as constantes com as próprias curvas. Definimos  $u_{\alpha} \in u_{\beta}$  como as componentes do vetor deslocamento normais às curvas  $\alpha \in \beta$ . Da mesma forma definimos  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ ,  $\varepsilon_{\beta\beta} \in \varepsilon_{\alpha\beta}$  como as componentes do tensor de deformação no ponto de intersecção das curvas  $\alpha \in \beta$ .

Por definição teremos<sup>6</sup>:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = h_1 \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha} + h_1 h_2 u_{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1}\right)$$
(3.2a)

$$\varepsilon_{\beta\beta} = h_2 \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + h_1 h_2 u_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_2}\right)$$
(3.2b)

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h_2 u_\beta \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( h_1 u_\alpha \right)$$
(3.2c)

onde

$$\begin{cases} (h_1)^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)^2 \\ (h_2)^2 = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right)^2 \end{cases}$$
(3.3)

Inglis ainda define a dilatação  $\theta$  e a rotação  $\omega$  como:

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>publicado em C. E. Inglis *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners* Trans. Inst. Naval Arch. v.55 (1913) pp. 219 - 241.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Inglis cita como fonte o livro de A. E. H. Love *Mathematical theory of elasticity*, que pode ser encontrado em uma versão mais moderna na 4<sup>a</sup> edição, Cambridge - UK, 1934.

3.2 A solução de Inglis para o furo central elíptico (1913)

$$\theta = h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_\alpha}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_\beta}{h_1} \right) \right]$$
(3.4)

e

$$\omega = h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_\beta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_\alpha}{h_1} \right) \right]$$
(3.5)

Para o problema em questão, Inglis define o sistema de coordenadas:

$$\begin{cases} x_1 = c \cosh \alpha \cos \beta \\ x_2 = c \sinh \alpha \sin \beta \end{cases}$$
(3.6)

O conjunto de curvas, neste caso consiste de um conjunto de elipses para  $\alpha$  = constante:

$$\frac{(x_1)^2}{c^2 \cosh^2 \alpha} + \frac{(x_2)^2}{c^2 \sinh^2 \alpha} = 1$$
(3.7)

Da mesma forma, para  $\beta$  = contante teremos o conjunto de hipérbolas:

$$\frac{(x_1)^2}{c^2 \cos^2 \beta} - \frac{(x_2)^2}{c^2 \sin^2 \beta} = 1$$
(3.8)

Teremos ainda:

$$(h_1)^2 = (h_2)^2 = h^2 = \frac{2}{c^2 \left(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta\right)}$$
(3.9)

# 3.2.2 Relações constitutivas gerais

As relações constitutivas gerais assumem a forma:

$$\begin{cases} (1-\nu)\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - (1-2\nu)\frac{\partial\omega}{\partial\beta} = 0\\ (1-\nu)\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + (1-2\nu)\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 0 \end{cases}$$
(3.10)

As relações acima, entretanto, são uma expressão das relações de Cauchy-Riemann já introduzidas anteriormente e mostram que a função  $\Xi(z) = (1 - v)\theta + i(1 - 2v)\omega$  é função da variável complexa  $z = \alpha + i\beta$ .

A seguir Inglis postula que:

$$\Xi = c_1 \frac{\exp(-nz)}{\sinh z} \tag{3.11}$$

Onde  $c_1$  é uma constante de integração e n um número inteiro que serão determinados posteriormente.

Definimos agora as variáveis auxiliares  $\tilde{u}_1 = \frac{u_{\alpha}}{h} \alpha$  e  $\tilde{u}_2 = \frac{u_{\beta}}{h} \beta$  que levam ao seguinte sistema de equações diferenciais a derivadas parciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_{1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{u}_{2}}{\partial \beta} = \frac{\theta}{h^{2}} = \frac{a_{n}}{1-\nu} \left\{ \exp\left[-\left(n-1\right)\alpha\right] \cos\left(n+1\right)\beta \right\} \\ -\exp\left[\left(n+1\right)\alpha\right] \cos\left(n-1\right)\beta \right\} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{1}}{\partial \beta} - \frac{\partial \tilde{u}_{2}}{\partial \alpha} = -\frac{2\omega}{h^{2}} = \frac{a_{n}}{1-2\nu} \left\{ \exp\left[-\left(n-1\right)\alpha\right] \sin\left(n+1\right)\beta \\ -\exp\left[\left(n+1\right)\alpha\right] \sin\left(n-1\right)\beta \right\} \end{cases}$$
(3.12)

Resolvendo estas equações teremos:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{1} = A_{n} \{ (n+\kappa) \exp[-(n-1)\alpha] \cos(n+1)\beta \\ +(n-\kappa) \exp[-(n+1)\alpha] \cos(n-1)\beta \} + \chi_{1}(n) \\ \tilde{u}_{2} = A_{n} \{ (n-\kappa) \exp[-(n-1)\alpha] \sin(n+1)\beta + \\ (n+\kappa) \exp[-(n+1)\alpha] \sin(n-1)\beta \} + \chi_{2}(n) \end{cases}$$
(3.13)

onde,  $\kappa$  foi introduzida anteriormente (Eq. 2.71),  $A_n$  é uma constante de integração e  $\chi_1(n)$ ,  $\chi_2(n)$  são funções conjugadas harmônicas de  $\alpha$  e  $\beta$ . Inglis propôs usar as seguintes funções:

$$\chi_1(n) = c' \exp\left(-n\alpha\right) \cos n\beta \tag{3.14a}$$

$$\chi_2(n) = c' \exp\left(-n\alpha\right) \sin n\beta \tag{3.14b}$$

A partir de  $\tilde{u}_1$  e  $\tilde{u}_2$  podemos determinar os elementos do tensor de deformação:

$$\begin{cases}
\varepsilon_{11} = h^2 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \alpha} + \frac{\tilde{u}_1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \beta} - \frac{\tilde{u}_2}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \beta} \\
\varepsilon_{22} = h^2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \beta} + \frac{\tilde{u}_2}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \beta} - \frac{\tilde{u}_1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \alpha} \\
\varepsilon_{12} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h^2 \tilde{u}_2 \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( h^2 \tilde{u}_1 \right)
\end{cases}$$
(3.15)

e a partir das deformações, obtemos as tensões:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) \\ \sigma_{\beta\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) \\ \sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12} \end{cases}$$
(3.16)

Substituindo as equações 3.13 em 3.15 e então em 3.16 podemos obter a solução geral do problema. A solução particular é obtida através das condições de contorno do problema.

Para  $\sigma_{\alpha\alpha}$ :

$$\gamma \sigma_{\alpha \alpha} = A_n \left\{ \begin{array}{c} (n+1) \exp\left[-(n-1) \,\alpha\right] \cos\left(n+3\right) \beta + (n-1) \exp\left[-(n+1) \,\alpha\right] \cos\left(n-3\right) \beta \\ -\left\{4 \exp\left[-(n+1) \,\alpha + (n-3) \,\alpha\right\} \cos\left(n+1\right) \beta\right\} \\ +\left\{4 \exp\left[-(n-1) \,\alpha + (n+3) \,\alpha\right\} \cos\left(n-1\right) \beta\right\} \\ +B_n \left\{ \begin{array}{c} \left\{n \exp\left[-(n+1) \,\alpha\right] \cos\left(n+3\right) \beta - (n+2) \exp\left[-(n+1) \,\alpha\right]\right\} \cos\left(n-1\right) \beta \\ -\left\{(n+2) \exp\left[-(n-1) \,\alpha\right] + n \exp\left[-(n+3) \,\alpha\right]\right\} \cos\left(n+1\right) \beta \end{array} \right\} \\ \end{array} \right\}$$
(3.17a)

onde definimos  $\gamma = (\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2$  e introduzimos a constante  $B_n$  para diferenciá-la de  $A_n$  na segunda equação.

Para  $\sigma_{\beta\beta}$  teremos:

$$\gamma \sigma_{\beta\beta} = A_n \begin{cases} -(n-3) \exp[-(n-1)\alpha] \cos(n+3)\beta - (n+3) \exp[-(n+1)\alpha] \cos(n-3)\beta \\ +\{-4 \exp[-(n+1)\alpha + (n-1)\alpha\} \cos(n+1)\beta\} \\ +\{+4 \exp[-(n-1)\alpha + (n+3)\alpha\} \cos(n-1)\beta\} \\ -B_n \begin{cases} \{n \exp[-(n-1)\alpha] \cos(n+3)\beta + (n+2) \exp[-(n+1)\alpha]\} \cos(n-1)\beta \\ -\{(n+2) \exp[-(n-1)\alpha] + n \exp[-(n+3)\alpha]\} \cos(n+1)\beta \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$
(3.17b)

Finalmente, para  $\sigma_{\alpha\beta}$ :

$$\gamma \sigma_{\alpha\beta} = A_n \left\{ \begin{array}{c} (n-1) \exp\left[-(n-1)\,\alpha\right] \sin\left(n+3\right)\beta + (n+1) \exp\left[-(n+1)\,\alpha\right] \sin\left(n-3\right)\beta \\ -(n+1) \exp\left[-(n-3)\,\alpha\right] \sin\left(n+1\right)\beta - (n-1) \exp\left[-(n+3)\,\alpha\right] \sin\left(n-1\right)\beta \end{array} \right\} \\ + B_n \left\{ \begin{array}{c} n \exp\left[-(n-1)\,\alpha\right] \sin\left(n+3\right)\beta + (n+2) \exp\left[-(n-1)\,\alpha\right] \sin\left(n-1\right)\beta \\ -\{(n+2) \exp\left[-(n-1)\,\alpha\right] + n \exp\left[-(n+3)\,\alpha\right]\} \sin\left(n+1\right)\beta \end{array} \right\} \\ (3.17c)$$

## 3.2.3 Soluções particulares

As equações 3.17 fornecem a solução geral do problema. As soluções particulares são determinadas aplicando-se as condições de contorno. Isto determina quais termos são não nulos e quais os valores de  $A_n$  e  $B_n$ .

Inglis ainda fornece a solução particular para quatro casos distintos. Iremos aqui discutir apenas os dois primeiros.

#### Primeiro problema

Placa contendo orifício elíptico sujeita a tensões de tração remotas biaxiais com  $\sigma_{11}(\alpha \rightarrow \infty) = \sigma_{22}(\alpha \rightarrow \infty) = \sigma$ .

Neste caso as condições de contorno são:

$$\sigma_{\alpha\alpha}|_{\alpha=\alpha_{0}} = \sigma_{\alpha\beta}|_{\alpha=\alpha_{0}} = 0$$
  

$$\sigma_{\alpha\alpha}|_{\alpha\to\infty} = \sigma_{\beta\beta}|_{\alpha\to\infty} = \sigma$$
  

$$\sigma_{\alpha\beta}|_{\alpha\to\infty} = 0$$
(3.18)

Estas condições podem ser satisfeitas usando  $A_{-1} = A_{+1} = \frac{\sigma}{8} e B_{-1} = \frac{\sigma}{2} \cosh 2\alpha_0$ . Adicionando os termos correspondentes a n = +1 e n = -1 as tensões podem ser determinadas. Neste caso:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma \sinh 2\alpha \left[\cosh 2\alpha - \cosh 2\alpha_0\right]}{\left[\cosh 2\alpha - \cos 2\beta\right]^2}$$
(3.19a)

$$\sigma_{\beta\beta} = \frac{\sigma \sinh 2\alpha \left[\cosh 2\alpha - \cosh 2\alpha_0 - 2\cos 2\beta\right]}{\left[\cosh 2\alpha - \cos 2\beta\right]^2}$$
(3.19b)

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sigma \sin 2\beta \left[\cosh 2\alpha - \cos 2\beta\right]}{\left[\cosh 2\alpha - \cos 2\beta\right]^2}$$
(3.19c)

A tensão ao longo da borda do orifício é dada por:

$$\sigma_{\beta\beta}\big|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{2\sigma \sinh 2\alpha_0}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} \tag{3.20}$$

O extremos da tensão serão observados nos pontos  $\beta_0$  dados por:

$$\left. \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} = 0 \tag{3.21}$$

Notamos que a equação 3.21 é satisfeita para os pontos dados por  $\sin 2\beta_0 = 0$ , ou seja:

$$\begin{cases} \beta_0 = m\pi \\ \beta_0 = \frac{m\pi}{2} \end{cases}$$
(3.22)

 $com (m = 0, \pm 1, \pm 2...).$ 

Substituindo estes valores na equação 3.20 observamos que os dois pontos correspondem a tensões de tração, mas que o ponto de máxima tensão será dada nos pontos  $\beta_0 = m\pi$ .

#### Segundo problema

Placa contendo orifício elíptico sujeita a uma tensão remota de tração  $\sigma_{11}(\alpha \rightarrow \infty) = \sigma$  perpendicular ao eixo maior da elipse.

$$\sigma_{\alpha\alpha}|_{\alpha=\alpha_{0}} = \sigma_{\alpha\beta}|_{\alpha=\alpha_{0}} = 0$$
  

$$\sigma_{\alpha\alpha}|_{\alpha\to\infty} = \frac{\sigma}{2} [1 - \cos 2\beta]$$
  

$$\sigma_{\beta\beta}|_{\alpha\to\infty} = \frac{\sigma}{2} [1 + \cos 2\beta]$$
  

$$\sigma_{\alpha\beta}|_{\alpha\to\infty} = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\beta$$
  
(3.23)

Estas condições podem ser satisfeitas com  $A_{-1} = -\frac{\sigma}{16}$ ,  $B_{-1} = \frac{\sigma}{4} [1 + \cosh 2\alpha_0]$ ,  $A_{+1} = \frac{\sigma}{16} - \frac{\sigma \exp[2\alpha_0]}{8}$ ,  $B_{+1} = \frac{\sigma \exp[4\alpha_0]}{8}$  e  $B_{-3} = -\frac{\sigma}{8}$ .

A expressão exata das tensões no presente problema pode ser determinada adicionando-se os termos correspondentes a  $n = \pm 1$  e n = -3. Entretanto a expressão final é muito longa e Inglis não a apresenta em seu trabalho. Em substituição ele apresenta a expressão da tensão ao longo da borda do orifício:

$$\sigma_{\beta\beta}\big|_{\alpha=\alpha_0} = \sigma \frac{\sinh 2\alpha_0 + \exp\left[2\alpha_0\right]\cos 2\beta - 1}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta}$$
(3.24)

### Analise do segundo problema de Inglis

A geometria do segundo problema está representada na Figura 3.2.

Caso a elipse tenha semi-eixos maiores e menores dados respectivamente por a e b, a tensão



Figura 3.2: Furo central elíptico passante.

na posição do semi-eixo maior ( $\beta = 0$ , ou ainda no ponto A da Figura 3.2) será dada por:

$$\sigma_{\beta\beta}\big|_{\alpha=\alpha_0,\beta=0} = \sigma\left[1+2\frac{a}{b}\right] \tag{3.25}$$

Ou seja,

$$K_t = 1 + 2\frac{a}{b} \tag{3.26}$$

Definindo o raio de curvatura da superfície da elipse no ponto A,  $\rho_A$  como:

3.2 A solução de Inglis para o furo central elíptico (1913)

$$\rho_{\rm A} = \frac{b^2}{a} \tag{3.27}$$

teremos:

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho_{\rm A}}} \simeq 2\sqrt{\frac{a}{\rho_{\rm A}}} \quad (\rho_{\rm A} \ll a) \tag{3.28}$$

Analisando a equação anterior, vemos que:

$$\lim_{\rho_{\rm A}\to 0} K_t = \infty \tag{3.29}$$

A relevância destes resultados talvez possa ser melhor apreciada pelo testemunho dos pesquisadores presentes na seção de apresentação do trabalho<sup>7</sup>. B. Hopkinson, por exemplo escreve em seus comentários ao artigo de Inglis:

"Turning now to Mr. Inglis' paper, it is, I think, one of great importance. Most failures in engineering structures originate, I suppose, in a crack of some sort... They originate in a centre of high stress such as exist at the end of a crack. Mr Inglis has shown us exactly how the stress at the end of a crack varies with its curvature and size."

O Prof. J. B. Henderson vai mais além e escreve:

"(On Mr. Inglis' paper), I can only hold up my hand in admiration of this beautiful piece of mathematics."

Na descrição menos formal da seção de apresentação<sup>8</sup> vemos que o debate em torno deste artigo foi considerável e de alto nível e que os presentes (assim como o próprio Inglis) já se preocupavam com a relevância destes resultados no caso de materiais dúcteis e em solicitações de fadiga. Tópicos que, como veremos, são mais que atuais na Mecânica da Fratura.

82

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Aparentemente os resultados de Inglis foram tornados mais impressionantes aos presentes dado que foram apresentados em seguida a um trabalho experimental de E. G. Coker, que apresentou um método de medida das tensões em placas contendo furos circulares. Apesar de as figuras não terem sido preservadas, o testemunho dos presentes atesta que a concordância entre as curvas medidas por Cocker e as calculadas por Inglis era impressionante.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Engineering, 28 de março 1913, p. 415.

#### Placa contendo furo circular passante

A Figura 3.3 apresenta o caso de uma placa infinitamente larga contendo um furo central circular passante (bem como o sistema de coordenadas polares, usado para a representação do estado de tensão da placa) sendo submetida a uma tensão remota de tração  $\sigma$ .



Figura 3.3: Placa infinita com furo central circular passante.

O estado de tensão do problema descrito acima é um caso particular da solução de Inglis quando os semi-eixos da elipse são idênticos. A solução formal deste caso pode ser encontrada em S. P. Timoshenko, Resistência dos Materiais, Vol. 2, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1957 e vale:

Tensão normal radial:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$
(3.30)

Tensão normal tangencial:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \tag{3.31}$$

Tensão de cisalhamento:

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \left( 1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \tag{3.32}$$

#### Cavidades esféricas (Goodier, 1933)

Vamos considerar o caso de uma cavidade esférica de raio *a* contida em um corpo sólido de seção infinitamente grande, sujeito a uma tensão remota de tração  $\sigma$ . A solução (obtida por Goodier am 1933) resulta na tensão tangencial (válida para o plano equatorial,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ):

$$\sigma_{\theta\theta} = \left[1 + \frac{4 - 5v}{2(7 - 5v)} \frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2(7 - 5v)} \frac{a^5}{r^5}\right]\sigma$$
(3.33)

Vemos que a tensão máxima em um carregamento remoto em tração será obtida na coordenada (r = a) e, assumindo-se  $v \sim 0,3$ , vale:

$$\sigma_{max} \sim \frac{45}{22} \sigma \Rightarrow K_t \simeq 2 \tag{3.34}$$

No exemplo anterior é interessante também observar que na coordenada  $(r = a, \theta = 0)$  (ou seja, no pólo da esfera) teremos:

$$(\sigma_{\theta\theta})_{r=a,\theta=0} = -\frac{3+15\nu}{2(7-5\nu)}\sigma$$
 (3.35)

Portanto, para o caso de tensões remotas de **compressão**, surgirá uma tensão tangencial de tração no pólo da cavidade esférica. Isto terá implicações importantes na fratura de materiais cerâmicos (poros podem ser considerados cavidades esféricas em primeira aproximação) em compressão, como será visto no próximo exercício.

**Exercício 3.1** Considere a solução de Goodier para o estado de tensão de um sólido contendo uma cavidade esférica em seu interior, apresentada nas Equações 3.33 e 3.35 e, assumindo que trincas se propagam em materiais frágeis assim que a máxima tensão normal atinge um valor  $\sigma_c$ , deduza:

- a. Uma expressão para a razão entre a resistência deste material a esforços de tração e em compressão e
- b. Um modelo para o modo como este material falhará em tração e em compressão.

Observação: apresente seu resultado em função de  $\sigma_c$  e *v*.

Solução

#### 3.2 A solução de Inglis para o furo central elíptico (1913)

*a* . *Resolvendo a equação 3.33 para r* = *a temos:* 

$$\sigma_c = \left[\frac{27 - 15\nu}{2(7 - 5\nu)}\right]\sigma_f^+ \tag{3.36a}$$

Da mesma forma, a Equação 3.35 pode ser escrita como

$$\sigma_c = -\left[\frac{3+15\nu}{2(7-5\nu)}\right]\sigma_f^- \tag{3.36b}$$

Desta forma a razão solicitada é dada por:

$$\frac{\sigma_f^+}{-\sigma_f^-} = \left[\frac{3-5\nu}{27-15\nu}\right] \tag{3.36c}$$

Assumindo um valor típico para v, por exemplo, v = 0.3 vemos que esta razão seria 0.0666 ou seja,  $\frac{1}{15}$ . Este resultado prevê, portanto que o material é cerca de 15 vezes menos resistente a esforços de tração em comparação a solicitações de compressão.

b. Supondo que as trincas se propaguem no plano da máxima tensão de tração, vemos que em carregamentos remotos em tração resultariam em trincas crescendo no plano do equador da cavidade, que é perpendicular à direção de carregamento. Neste caso teríamos uma única trinca crescendo, dominando o processo de fratura, assim que uma das cavidades atingisse a tensão crítica. É possível também que múltiplas cavidades atingissem a tensão crítica, gerando múltiplas trincas, mas neste caso é consideravelmente mais provavel que estas trincas coaleçam, já que a primeira trinca formada atuaria como concentrador de tensão, induzindo a formação das outras trincas no plano poximo a ela. No caso de carregamentos em compressão, entretanto, o plano das trincas deve conter a direção polar, ou seja, o plano será aproximadamente paralelo à direção de carregamento. Desta forma é improvável que uma única trinca domine o processo de falha, já que diferentes trincas formadas em diferentes cavidades provavelmente crescerão paralelas. Em resumo, o modo de falha previsto para esforços de compressão corresponde a múltiplas trincas crescendo paralelamente, o que resulta na fragmentação total do sólido.

#### Imperfeições, falhas, defeitos ....

Na análise apresentada no exercício 3.1 associamos certos tipos de defeitos presentes nos materiais (trincas e poros) e suas características geométricas (tamanho, raio de curvatura, raio) ao incremento local da tensão normal de tração e conseqüente falha do componente. Este é um dos fundamentos da Mecânica da Fratura, pois uma das suas hipóteses básicas é a de que todo material apresenta uma distribuição inicial de "defeitos" que atuarão como concentradores

de tensão, levando o componente à fratura.

Na literatura em inglês estes "defeitos" são denominados **flaws**. A tradução do termo em português como "defeito" é de certa forma imprecisa: riscos na superfície ou mesmo concentradores de tensão oriundos da sua geometria (como por exemplo, na raiz de roscas) são exemplos de "flaws", que não cabem propriamente na definição como defeitos. Desta forma a palavra "defeito", como utilizada acima, deve ser considerada sinônimo de imperfeições ou falhas, permitindo acomodar todos os tipos de concentradores de tensão que podem levar um componente à fratura.

# 3.3 Critério de Griffith (1921)

A análise feita anteriormente dos defeitos e da concentração de tensões associadas a eles permitiu tirar algumas conclusões sobre sua importância no processo de fratura dos materiais. A análise, entretanto, baseia-se quase exclusivamente em propriedades geométricas destes defeitos. Griffith propôs em 1921<sup>9</sup> uma extensão do trabalho de Inglis, permitindo uma visão alternativa para a compreensão do processo de propagação de trincas. Este modelo, conhecido atualmente como **modelo de Griffith** é um dos pilares da mecânica da fratura.

Inicialmente Griffith propõe e prova um teorema simples: "Seja um sólido linear elástico, deformado por forças de contato aplicadas à sua superfície. A soma da energia potencial das forças aplicadas e da energia de deformação elástica do corpo será diminuida ou permanecerá inalterada pela introdução de uma trinca, cuja superfície não esteja sujeita a trações". O fundamento do modelo de Griffith consiste em calcular esta parcela de energia ganha pela introdução da trinca.

Considere as figuras abaixo. Elas representam esquematicamente os processos que ocorrem durante o carregamento de uma placa de espessura *B* contendo uma trinca central de tamanho inicial 2*a*, que cresce para 2(a + da) durante o carregamento. Este processo pode ser descrito pelos seguintes passos:

- I A trinca se encontra inicialmente fechada (Fig. 3.4a) e a placa apresenta energia  $U_1 = 0$ ,
- II com o carregamento surgiria (Fig. 3.4b), caso não houvesse a trinca, um estado de tensão uniaxial com energia  $U_2 = V \frac{\sigma^2}{2E}$  (V é o volume da placa),

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>A. A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, Phil. Trans. A, v. 221 (1921) 163-198.

- III as faces da trinca cedem (Fig. 3.4c) liberando parte da energia elástica ( $\delta U_1^{el}$ ) seja liberada,  $U_3 = U_2 \delta U_1^{el}$ ,
- IV a trinca cresce simetricamente um infinitesimal d*a* (Fig. 3.4d), aumentando a energia do cristal em  $\delta U^{sup}$ , dada a criação de duas novas superfícies de área ds = Bda,  $U_4 = U_3 + \delta U^{sup}$  e
- V finalmente a trinca relaxa localmente (Fig. 3.4e), liberando mais energia elástica ( $\delta U_2^{el}$ ),  $U_5 = U_4 - \delta U_2^{el}$ .



Figura 3.4: Construção esquemática do *Gedankenexperiment* de Griffith: configuração inicial. De (a) a (e) temos os cinco passos do experimento, descritas no texto.

A variação da energia do cristal devida ao crescimento de trinca será  $U_5 - U_3$ . Se esta resultar numa diminuição da energia do cristal, o crescimento da trinca poderá ocorrer, senão, a trinca permanece com o tamanho original, estacionária.

O critério de Griffith, portanto, é um critério de balanço energético: se a energia ganha pela liberação de energia elástica com o crescimento da trinca suplantar a energia necessária para criar as duas novas superfícies, a mesma irá crescer (ou seja, ela irá se propagar).

A parcela devida à liberação de energia elástica com à introdução ouo crescimento da trinca pode ser calculada, segundo Griffith, usando a solução de Inglis. Ele inicialmente simplifica o tratamento dado por Inglis, introduzindo variáveis complexas desde o início do tratamento. Assim, o sistema de coordenadas curvilíneas introduzido por Inglis será escrito simplesmente pela equação (compare com as equações 3.6):

$$(x_1 + ix_2) = a\cosh\left(\alpha + i\beta\right) \tag{3.37}$$

A seguir ele procura uma solução para a energia armazenada no sólido sujeito ao sistema de forças  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  que geram as tensões remotas principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Esta expressão, como Griffith ressalta, deve ser uma forma quadrática das tensões principais. Ele se propõe, portanto, a examinar um conjunto de casos para determinar a forma geral desta expressão.

Partindo do primeiro problema de Inglis, ele procura uma expressão da energia elástica do material contido no interior de uma elipse  $\alpha$  por unidade de espessura da placa,  $U_{\alpha}$  na forma:

$$U_{\alpha} = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \left( \frac{u_{\alpha}}{h} \sigma_{\alpha\alpha} + \frac{u_{\beta}}{h} \sigma_{\alpha\beta} \right) \mathrm{d}\beta$$
(3.38)

Substituindo e integrando e procurando o limite para  $\alpha \to \infty$ , Griffith obtém a expressão para o incremento de energia da placa pela introdução da cavidade  $\alpha_0$ :

$$U_3' = \frac{\pi a^2 \sigma^2}{8G} \left(3 - \bar{\kappa}\right) \cosh 2\alpha_0 \tag{3.39}$$

Levando ao limite  $\alpha_0 \rightarrow 0$  temos finalmente:

$$U_{3} = \frac{(3 - \bar{\kappa})\pi a^{2}\sigma^{2}}{8G}$$
(3.40)

A parcela devida à liberação de energia elástica admite uma interpretação geométrica particular, supondo que no volume hachurado na Figura 3.5 a tensão se anula, enquanto que no restante do material ela permanece com o valor dado pelo do carregamento uniaxial.

Lembramos que pela definição de  $\bar{\kappa}$ :

$$\frac{(3-\bar{\kappa})}{8G} = \frac{\nu}{2G(1+\nu)} = \frac{\nu}{E}$$
(3.41)

Calculando o volume da região hachurada, V<sup>elipse</sup>, teremos:

$$\delta U_1^{el} = \frac{U_1}{V} \times V_1^{elipse} = \left(\frac{\sigma^2}{2E}\right) \times \left(2\pi a^2 B\right) \tag{3.42}$$

Esta interpretação, entretanto, serve apenas como um recurso mnemônico para a descrição da equação 3.40 e não deve ser confundida com a solução obtida por Griffith, que deve ser considerada rigorosa, já que foi baseada na solução de Inglis para o estado de tensão.



Figura 3.5: Representação esquemática da construção usada na derivação do critério de Griffith.

Da mesma forma, podemos calcular a energia ganha após a extensão da trinca:

$$\delta U_2^{el} = \frac{U_1}{V} \times V_2^{elipse} = \left(\frac{\sigma^2}{2E}\right) \times \left[2\pi (a+\mathrm{d}a)^2 B\right]$$
(3.43)

O trabalho para formação de duas novas superfícies será dada por:

$$\delta U^{sup} = (2\mathrm{d}aB)(2\gamma_S) \tag{3.44}$$

onde  $\gamma_5$  é a energia de superfície (ou seja, a tensão superficial) do material e o fator 2 vem de duas superfícies criadas. Considerando agora o balanço teremos:

$$\Delta U = U_5 - U_3 = \delta U^{sup} - \left(\delta U_2^{el} - \delta U_1^{el}\right)$$
(3.45)

A expressão final pode ser calculada expandindo-se o quadrado em  $\delta U_2^{el}$  e desprezando o termo quadrático em d*a*:

$$\Delta U = \left(4\gamma_S - \frac{2\pi\sigma^2 a}{E}\right)Bda \tag{3.46}$$

como d*a*, por definição, é positivo, teremos que a energia do sólido irá diminuir se e somente se:

$$2\gamma_{\rm S} \le \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \tag{3.47}$$

que é a expressão matemática do critério de Griffith.

Podemos agora reescrever o critério de Griffith, determinando a tensão necessária para que a trinca se torne instável ( $\sigma_c$ ):

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma_S}{\pi a}} \tag{3.48}$$

A equação acima é válida no EPT, se introduzirmos uma restrição lateral, produzindo um EPD teremos que corrigir o critério, considerando o efeito das tensões de restrição:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma_S}{\pi a(1-\nu^2)}} \tag{3.49}$$

## **3.3.1** Trabalhos posteriores

O trabalho de Griffith pode ser considerado como um marco no desenvolvimento da nossa compreensão da fratura de sólidos. Por volta da deçada de 1950 a linha de investigação padrão neste campo consistia em procurar extensões da teoria de Griffith para outros casos particulares e aplicá-los a materiais reais. Nesta linha devemos mencionar os trabalhos de R. A. Sack<sup>10</sup> e I.N. Sneddon<sup>11</sup> (ambos publicados em 1946) que apresentam a solução na linha da desenvolvida por Griffith para um caso tridimensional no EPD, a saber, uma trinca plana de bordas circulares ("penny-shaped crack") perpendicular à tensão aplicada. O primeiro autor conclui que a tensão crítica de Griffith, neste caso, é dada por:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\pi E \gamma_S}{2a \left(1 - \nu^2\right)}} \tag{3.50}$$

Comparando as equações 3.49 e 3.50 vemos que ela difere por um fator  $\frac{\pi}{2}$ , o que causou certa surpresa na época por sua simplicidade (hoje em dia sabe-se que este é um caso particular

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>R. A. Sack *Extension of Griffith theory to rupture in three dimensions* Proc. Phys. Soc. vol 58 (1946) pp. 729-736

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>I. N. Sneddon *The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid* Proc. Royal Soc. (London) A vol. 187 (1946) pp. 229-260

de fator de forma, que será abordado posteriormente).

Sneddon apresenta uma análise geral do estado de tensão no mesmo problema e reanalisa o caso bidimensional (Griffith) usando o método desenvolvido por Westergaard em 1939<sup>12</sup> (este autor aplicou o método da função tensão, descrito na seção 2.5) usando:

$$\Phi' = \sigma\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2 - 1}}\right) \tag{3.51}$$

A análise de Sneddon do problema de Inglis-Griffith tem o mérito de tratá-lo em um referencial mais conveniente (ele usa coordenadas polares vinculadas às bordas da trinca) o que simplifica os resultados e a sua visualização. Em particular Sneddon apresenta as linhas de nível para a máxima tensão de cisalhamento, apresentando o formato de "grão de feijão" próximo à borda da trinca, que se tornaria famoso após os trabalhos de Irwin.

Sneddon aplica o método das transformadas de Hankel no caso tridimensional, que é consideravelmente sofisticado e não será reproduzido aqui, onde nos limitaremos a apresentar o resultado de sua análise em coordenadas cilíndricas ( $r, \theta, z$ ):

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{2\sigma}{\pi} \left(\frac{a}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{3}{4}\cos\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{4}\cos\frac{5}{2}\psi\right\} \\ \sigma_{zz} = \frac{2\sigma}{\pi} \left(\frac{a}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{5}{4}\cos\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\cos\frac{5}{2}\psi\right\} \\ \sigma_{rz} = \frac{\sigma}{\pi} \left(\frac{a}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\sin\psi\cos\frac{3}{2}\psi\right\} \end{cases}$$
(3.52)

Onde  $\delta \in \psi$  denotam a distância e o ângulo tomado com referência a um ponto arbitrário à borda da trinca. Os termos acima tem um análogo direto aos termos deduzidos por Inglis para o caso bidimensional. Como Sneddon demonstra, estes termos diferem do caso bidimensional apenas pelo fator  $\frac{\pi}{2}$  já discutido em relação ao critério de Griffith deduzido por Sack para a trinca circular. Novamente lembramos que isto é um resultado geral da Mecânica da Fratura: a distribuição de tensões de trincas genéricas difere do resultado de Inglis apenas por um fator geométrico, conhecido como fator de forma.

## 3.3.2 Considerações filosóficas

As equações de Griffith e de Inglis não são muito úteis na prática. Não é trivial medir a tensão superficial de um corpo ou o raio da ponta de uma trinca. Se analisarmos a equação de Griffith (por brevidade, apenas no EPT) entretanto e a reescrevermos como:

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>H. M. Westergaard *Bearing pressures and cracks* J. Appl. Mech. v. 6 A (1939) pp. 49-53.

$$\sqrt{E\gamma_S} = \sigma_c \sqrt{\pi a} \tag{3.53}$$

observaremos que o lado esquerdo ( que denominaremos provisoriamente  $K_c$ ) depende apenas de propriedades intrínsecas ao material, enquanto que o lado direito traz informações sobre o carregamento (através da tensão remota) e da geometria do defeito investigado.

Isto nos faz crer que alguma propriedade intrínseca do material seja responsável pela resistência que o material oferece ao crescimento de uma trinca.

#### Força de extensão de trinca crítica ( $G_c$ )

A hipótese elaborada na seção anterior levou Irwin<sup>13</sup> a postular (em 1957) a existência de uma propriedade, denominada **força de extensão de trinca** (*G*), que seria a força motriz para o crescimento da trinca no sólido, definida como sendo a taxa de liberação de energia elástica por unidade de acréscimo de comprimento da trinca:

$$G \equiv \frac{1}{2B} \frac{\delta U}{\delta a} = \frac{\pi \sigma^2 a}{E}$$
(3.54)

Teríamos, portanto, crescimento instável de trinca (ou seja, fratura) caso G ultrapassasse um certo valor crítico,  $G_c$ , intrínseco do material. A rigor a definição de G não introduz novidade no formalismo, exceto pelo fato de que a sua definição (acima) *sugere uma metodologia para a sua medição*.

# 3.4 A forma da ponta da trinca

As considerações anteriores mostram que a distribuição de tensões ao redor de uma trinca se assemelha àquela obtida por Inglis para a cavidade elíptica em uma placa. Como Barenblatt<sup>14</sup> ressalta, este resultado tem uma falha fundamental.

Uma cavidade no interior de um sólido muda de forma infinitesimalmente quando as tensões são alteradas também infinitesimalmente. Isto permite o uso de métodos clássicos da teoria da elasticidade à solução do problema, especificando-se as condições de contorno da cavidade

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>G. R. Irwin Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate J. Appl. Mech. v. 24 (1957) 361-364.

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup>G. I. Barenblatt *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture* In: H. L. Dryden, Th. von Kármán (Eds.) Advances in Applied Mechanics v. 7 (1962) New York: Academica Press, pp. 55 -129.

correspondente ao sólido não tensionado, como feito por Inglis.

Ocorre que uma trinca, em princípio, pode ser propagar indefinidamente com uma alteração infinitesimal das tensões (por exemplo, se elas resultarem em  $G > G_c$ ). Isto faz com que o problema do equilíbrio de trincas em sólidos pertença a uma classe de problemas matemáticos conhecidos como problemas de contornos indeterminados (**problems with unknwown boundaries**): A forma da trinca deve ser determinada como solução do problema e as condições de contorno não podem ser aplicadas inicialmente (elas são determinadas durante a solução).

Estes problemas são marcadamente não-lineares e a sua investigação é uma linha de pesquisa contemporânea da matemática. Isto torna a solução deste problema particularmente complicada. Barenblatt aponta outra deficiência das análises anteriores. A tensão sempre assume valores infinitos na proximidade da trinca independente do caso tratado, o que é fisicamente inaceitável. Na verdade Inglis estava perfeitamente a par deste problema, como atestam as discussões relacionadas à apresentação de seu trabalho na Instituição dos Arquitetos Navais. Na época ele justificava a inexistência destas tensões infinitas apelando para a plasticidade na ponta de trinca. Em sólidos frágeis, onde a plasticidade é improvável, é comum atribuir-se a inexistência destas tensões infinitas pela ocorrência de elasticidade não-linear (veja por exemplo em [MC]). Ocorre que no problema matemático nem plasticidade, nem elasticidade não linear são admitidas a princípio e mesmo assim a existência de tensões infinitas no interior do sólido é inaveitável por razões físicas.

Nos trabalhos citados acima, invariavelmente, a forma da trinca era determinada pela solução para o vetor deslocamento perpendicular ao plano de trinca, concluindo-se que ela tinha formato elíptico, que leva a tensões infinitas na ponta da trinca. Barenblatt demonstra que outro formato permite concluir que as tensões são finitas na ponta de trinca e que a trinca cresce assim que a tensão ultrapassa um certo valor determinado, dependente das forças de coesão moleculares do sólido, mas finito. A forma de equilíbrio da ponta da trinca, deduzida por Barenblatt, corresponde a uma cúspide determinada pela solução da indeterminação do tipo:

$$\sigma_{ij} = \frac{N(\psi)}{\delta^{\frac{1}{2}}} = \frac{0}{0}$$
(3.55)

Procuramos, portanto, uma curva no espaço que leve o termo da dependência angular da tensão a se anular.Barenblatt, usando os métodos desenvolvidos por Mukhelishvili, deduz que a solução para a tensão e para a componente normal do vetor de deslocamento é dada pela solução das equações:

#### 3.4 A forma da ponta da trinca

$$\sigma_{22} = -\frac{1}{\pi\delta} \int_0^\infty \frac{g(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$
(3.56a)

e

$$u_2 = \mp \frac{4\left(1 - v^2\right)}{\pi E} \sqrt{\delta} \int_0^\infty \frac{g(t)dt}{\sqrt{t}}$$
(3.56b)

Onde g(t) corresponde à diferença entre as tensões aplicadas ao sólido e as forças de coesão moleculares atuando na proximidade da trinca<sup>15</sup>. A Forma deduzida por Baremblatt está esquematicamente reproduzida na Figura 3.6.



Figura 3.6: A figura apresenta esquematicamente a evolução da forma da ponta da trinca. As condições a e b se referem a casos onde  $G < G_c$ , o caso crítico ( $G = G_c$ ) está representado em c, para trícas super-críticas a forma da ponta da trinca permanece inalterada, mas a trinca passa a se mover (d). Baseado em Baremblatt (citado anteriormente).

## 3.4.1 Módulo de Coesão

Barenblatt propõe e justifica duas hipóteses:

- A espessura *d* da região da borda da trinca é pequena em comparação com o resto da trinca e
- A forma da trinca na região da borda e consequentemente a distribuição das forças de coesão moleculares, não dependem das tensões aplicadas ao sólido e é sempre a mesma para um determinado material sob as mesmas condições (temperatura, composição, pressão ambiente etc...).

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>As forças de coesão moleculares, por sua própria natureza, atuam apenas na visinhança imediata da ponta da trinca, quando as separações entre as duas faces são da ordem da distância interatômica. Nestas condições elas são muito intensas.

Com base nelas o autor postula a existência de uma propriedade do material, conhecida como módulo de coesão, definida como:

$$K_c = -\frac{1}{\pi} \int_0^d \frac{G(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \tag{3.57}$$

Onde G(t) corresponde à distribuição das forças de coesão moleculares em função da separação entre as duas faces, que obviamente é uma propriedade intrínseca do material. Isto permite formalizar o postulado proposto na seção 3.3.2, vinculando a propriedade intrínseca do material à distribuição das forças de coesão do material.

**Exercício 3.2** Determine por análise dimensional as dimensões de  $G_c$  e de  $K_c$ 

- a. em unidades de força (Newtons) e
- b. em unidades de energia (Joules)

#### Solução

- a. Consideramos o lado direito da equação 3.53. Vemos que sua dimensão é dada por  $[Nm^{-2}] \times [m^{\frac{1}{2}}]$  ou seja,  $[Nm^{-\frac{3}{2}}]$  ou ainda  $[Pa.m^{\frac{1}{2}}]$ . Para  $G_c$  tomamos o lado direito da equação 3.54 e temos  $[G_c] = [N^2m^{-4}] \times [m] \times [N^{-1}m^2] = [Nm^{-1}]$ .
- b. Levando em conta que [J] = [Nm], vemos que os resultados anteriores podem ser escritos como:  $[K_c] = \left[Jm^{-\frac{5}{2}}\right] e [G_c] = \left[Jm^{-2}\right]$ .

# 3.5 Mecânica da Fratura Elástica Linear

Da discussão anterior vemos que os métodos da elasticidade linear podem ser usados, ao menos intuitivamente, para explicar o crescimento de trincas em sólidos. Isto e a generalização das idéias de Griffith permitiram o surgimento na década dos 1950 de um ramo da engenharia, a **mecânica da fratura elástica linear** (MFEL), que se propunha a estabelecer critérios projeto de engenharia envolvendo materiais frágeis.

A MFEL justifica-se já que fragilidade não é necessariamente um impedimento para o uso de materiais na engenharia (vidros, aços temperados, cerâmicas etc...), nestes materiais as trinca preexistem, ou seja, já vem pré-nucleadas, há portanto a necessidade de se quantificar o comportamento mecânico dos materiais frágeis contendo uma trinca em seu interior, que é o objeto de estudo da MFEL.

#### Hipóteses da MFEL

A MFEL se fundamenta em quatro hipóteses:

- Defeitos semelhantes a trincas sempre existem nos materiais frágeis<sup>16</sup>,
- estes defeitos podem ser simulados por (ou seja, tornados equivalentes a) uma trinca plana passante de tamanho 2*a* em uma placa infinita,
- durante o carregamento do sólido com um estado de tensão remoto σ desenvolve-se um estado de tensão não homogêneo na placa, que será descrito por uma função K(σ,a), denominada fator de intensificação de tensão e
- o material apresenta uma resistência intrínseca à propagação da trinca, que será denominada K<sub>R</sub>, ou simplesmente R.

# 3.5.1 Modos de carregamento de trinca

A MFEL define três modos de carregamento de trincas dependendo da orientação relativa da carga aplicada e do plano e da borda da trinca (Fig. 3.7):

- I. modo de abertura ("opening")
- II. modo de deslizamento ("sliding")
- III . modo de rasgamento ("tearing")

Irwin provou<sup>17</sup> que o estado de tensão próximo à ponta da trinca em um sólido linear elástico é definido apenas pelo modo de carregamento e pela intensidade da carga e tem a forma geral<sup>18</sup>:

$$\sigma_{ij}(\sigma, a) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta)$$
(3.58)

onde

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Em materiais dúcteis isto não é necessariamente verdadeiro, mas em algum momento defeitos são nucleados, antecedendo a fratura, o que permite a extender os métodos da Mecânica da Fratura a estes materiais.

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup>No trabalho de 1957, já citado anteriormente.

<sup>&</sup>lt;sup>18</sup>Este estado de tensão é assintótico, o que significa que, distante da ponta da trinca, o estado de tensão pode ser diferente.



Figura 3.7: Modos de carregamento de trincas. I - modo de abertura, II - modo de deslizamento e III - Modo de rasgamento.

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \tag{3.59}$$

As variáveis  $r \in \theta$  são definidas de acordo com o referencial solidário à ponta da trinca, como apresentado na Fig. 3.8.



Figura 3.8: Referencial vinculado à ponta da trinca.

O estado de tensão para os três modos de carregamento é dado por:

Modo I:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \cdots \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \cdots \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \cdots \end{bmatrix}$$
(3.60a)

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \tag{3.60b}$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} 0 & \text{EPT} \\ v(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \text{EPD} \end{cases}$$

Modo II:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \left(2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \cdots \\ \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots \end{bmatrix}$$
(3.60c)

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \qquad (3.60d)$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} 0 & \text{EPT} \\ \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \text{EPD} \end{cases}$$

Modo III:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} + \cdots \\ \cos\frac{\theta}{2} + \cdots \end{bmatrix}$$
(3.60e)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \tag{3.60f}$$

**Exercício 3.3** Analise o estado de tensão nas coordenadas ( $r = 0,0001a; \theta = 0$ ) supondo um carregamento monotônico nos três modos e responda:

- a. O que você pode concluir a respeito da tendência à fratura frágil nos três modos?
- b. Qual o impacto que a alteração do estado plano de tensão para o estado plano de deformação tem sobre a tendência à fratura frágil nos modos I e II?

# Solução

Consideramos primeiramente que o pré-fator dos três casos será:

$$\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi 0.0001a}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\times 0.0001}} \approx 70,71\sigma \tag{3.61}$$

Resolvendo agora as equações 3.60, obtemos os circulos de Mohr representados na Figura 3.9.



Figura 3.9: Estados de tensão observados à ponta de trincas nos três modos de carregamento.

- a. Trincas crescem, preferencialmente no plano de máxima tensão normal de tração. No modo I este plano coincide com o plano da trinca. Já nos modos II e III a tensão normal se anula no plano da trinca. Como consequência trincas em modo II e III ou tendem a se desviar da direção original (o que, na prática, significa que ela tende ao modo I), ou apresentam uma menor tendência à propagação.
- b. No modo I a alteração do estado plano de tensão para o estado plano de deformação tem como conseqüência um dramático aumento da tensão média (ou seja, a componente hidrostática de tração aumenta) e uma diminuição da máxima componente de cisalhamento. Estas duas condições resultam em uma maior tendência à fratura frágil, pois o aumento da componente hidrostática de tração trabalha a favor da abertura de cavidades (micromecanismo responsável pela propagação da trinca em modo I) e a diminuição da tensão de cisalhamento sugere uma menor tendência à ativação de mecanismos de deformação plástica (escorregamento de discordâncias, bandas de cisalhamento) na região da ponta da trinca. No modo II observa também um (moderado) aumento de tensão média, mas a máxima tensão de cisalhamento permanece essencialmente a mesma, sugerindo que a alteração do EPT para o EPD no modo II é menos crítica que no modo I.

## **3.5.2** Efeito da geometria do sistema

Os estados de tensão, como definidos nas páginas anteriores, são válidos para uma trinca de comprimento 2*a* **em uma placa infinita**. Outras geometrias do sistema, entretanto, exigem modificações nas equações anteriores tendo em vista que as tensões devem se anular numa superfície livre. O procedimento padrão corresponde a tomar a solução para a placa infinita e multiplicá-la por uma equação algébrica ou trigonométrica que a anule na superfície, resolvendo as equações da elasticidade linear para o novo sistema.

#### Exemplo

Para uma placa **finita** de largura *W* teremos:

$$K = \sigma \left( W \tan \frac{\pi a}{W} \right) \tag{3.62}$$

expandindo-se a equação acima em série de potências:

$$K = \sigma W^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi a}{W} + \frac{\pi^3 a^3}{3W^3} + \dots \right)^{\frac{1}{2}}$$
  
=  $\sigma \sqrt{\pi a} \left( 1 + \frac{\pi^2 a^2}{3W^2} + \dots \right)^{\frac{1}{2}} = Y \sigma \sqrt{\pi a}$  (3.63)

#### Fator de forma

Vimos no exemplo anterior que o efeito da alteração da geometria do sistema foi abstraído na forma de uma constante multiplicativa *Y*, que só depende de fatores geométricos, à solução anterior para a placa infinita. Esta constante é conhecida como **fator de forma** e pode ser encontrada para um grande número de geometrias típicas em manuais de mecânica da fratura.

É importante salientar que a definição de K apresentada na equação 3.63 é conveniente para ressaltar a extensão da solução de Irwin para casos genéricos. Os manuais de engenharia, entretanto, adotam definições alternativas que são mais convenientes para a aplicação prática. Por exemplo, a norma ASTM E399-09, que regula o ensaio de tenacidade à fratura em deformação plana, define K em função da geometria dos corpos de prova ensaiados, o que, obviamente, é muito conveniente para aplicação em laboratório. Como um exemplo, a norma mencionada define K para o corpo de prova Compacto em Tração, C(T), como:

$$K = \frac{P}{\sqrt{BB_N}\sqrt{W}} \times f\left(\frac{a}{W}\right) \tag{3.64a}$$

com

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\left(2 + \frac{a}{W}\right)\left[0,886 + 4,64\frac{a}{W} - 13,32\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14,72\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5,6\left(\frac{a}{W}\right)^4\right]}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
(3.64b)

onde *P* representa a carga de ruptura, medida durante o ensaio, *B* e  $B_N$  são medidas da espessura do corpo de prova (definidas na norma) e *W* é a largura do corpo de prova.

## 3.5.3 Tenacidade à fratura

De acordo com a análise anterior teremos que a fratura se tornará instável caso:

$$K \ge K_c \tag{3.65}$$

onde  $K_c$  é uma propriedade do sistema denominada **tenacidade à fratura**. Quando esta propriedade for medida no EPD, ela passará a ser dada pelo símbolo  $K_{Ic}$ .

Vemos que a tenacidade à fratura corresponde ao módulo de coesão introduzido por Barenblatt. É, entretanto, conveniente manter a denominação acima tendo em vista que ela é amplamente disseminada na engenharia e que ela admite uma influência do estado de tensão sobre esta propriedade (que não era admitida por Barenblatt).

Alguns fatos sobre a tenacidade à fratura:

- Por análise dimensional,  $K_c \in K_{Ic}$  tem unidades de MPa.m<sup>1</sup>/<sub>2</sub>
- Não confundir<sup>19</sup> K,  $K_c$  e  $K_{Ic}$  com  $K_t$ !
- *K<sub>Ic</sub>* é uma propriedade intrínseca do material (não depende da geometria do componente), já *K<sub>c</sub>*, quando medida fora do EPD, dependerá da geometria do sistema e do material.
- No EPT K<sub>c</sub> depende linearmente da espessura da placa.

**Exercício 3.4** Corpos de prova usinados a partir de um monocristal de sílica (com  $K_{Ic} = 1,15$  MPa m<sup> $\frac{1}{2}$ </sup>) foram ensaiados em flexão de três pontos, tendo-se obtido, em média, uma tensão de

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup>Pode parecer estranho que a engenharia adote a mesma letra ("K") para definir propriedades diferentes. Na verdade a letra K associada ao fator de intensificação de tensão e à tenacidade à fratura é uma homenagem a J. A. Kies, colaborador íntimo de Irwin, que percebeu sua importância pela primeira vez.

ruptura de 35 MPa, com base nestes dados e assumindo-se que os defeitos neste corpo de prova são predominantemente microtrincas superficiais (suponha que Y = 1,12), estime o tamanho do defeito crítico. A seguir, suponha que se aplique a estes corpos de prova um tratamento de polimento químico com ácido fluorídrico, que tem como resultado a remoção de 50 $\mu$ m de material da superfície. Estime o ganho esperado em resistência para este corpo de prova polido. *Solução* 

O tamanho do defeito crítico (a) será dado por:

$$a = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{Y\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1,15}{1,12\times35}\right)^2 \approx 274\mu m$$
(3.66)

A eliminação de 50  $\mu$ m de superfície, portanto, reduz o tamanho do defeito crítico para 224 $\mu$ m e, portanto, a tensão de ruptura do corpo de prova polido é estimada em:

$$\sigma = \frac{K_{Ic}}{Y\sqrt{\pi a}} = \frac{1,15}{1,12\sqrt{\pi 0,000224}} \approx 39MPa \tag{3.67}$$

#### Síntese

- A análise do campo de tensões em torno de uma trinca imersa em um sólido introduz o conceito de **fator de intensificação da tensão**,  $K = Y \sigma \sqrt{\pi a}$ , que é uma **função**.
- A resistência que um material oferece à propagação de uma trinca é denominada tenacidade à fratura e é um dado valor crítico de *K*, denotado por *K<sub>c</sub>*. Este valor é uma constante (que, porém, pode depender da geometria do sistema).
- Quando o sistema se encontra dominado por um estado plano de deformação, K<sub>c</sub> passa a ser denominado tenacidade à fratura no estado plano de deformação e é denotado por K<sub>Ic</sub>. Este valor é uma constante independente da geometria do sistema.

# 3.6 Integridade estrutural e efeitos de escala

Segundo Z. P. Bažant<sup>20</sup>, estruturas de engenharia, como pontes, barragens, aviões e usinas nucleares devem ser projetadas de tal forma que estejam sujeitas a uma probabilidade de falha extremamente baixa, da ordem de  $10^{-6}$  ou  $10^{-7}$ . Isto é tradicionalmente atingido na engenharia pelo uso de fatores de segurança empíricos, o que leva a duas condições contraditórias: ou a estrutura é superdimensionada, ou assume-se o risco de falha catastrófica imprevista. A

<sup>&</sup>lt;sup>20</sup>Aula plenária apresentada durante a 17<sup>a</sup> Conferência Européia de Fratura, realizada de 2 a 5 de setembro de 2008 em Brno, Rep. Tcheca.

descrição estatística do processo de falha de estruturas de grande porte, portanto, adquire um papel fundamental na redução de custos e otimização de processos.

A situação é ainda mais complexa dado que há uma enorme diferença de tamanho entre as estruturas propriamente ditas e os corpos de prova utilizados na avaliação das propriedades do material utilizado na construção destas estruturas. Estruturas frágeis apresentam uma forte dependência com o tamanho do sistema, o que leva ao que se conhece na engenharia como um " efeito de escala" (*size effect*), que Bažant define como<sup>21</sup>:

"The size effect in solid mechanics is understood as the effect of the characteristic structure size (dimension) D on the nominal strength  $\sigma_N$  of structure when geometrically similar structures are compared." (Z. P. Bažant, 1999)<sup>22</sup>.

Para compreender melhor o conceito de efeito de escala vamos considerar duas condições limites. No primeira condição assumimos que o material segundo algum critério de tensão máxima (por exemplo, uma falha dúctil). O critério de falha <sup>23</sup>, ou seja, a condição limite de uso deste material será definida por uma tensão limite (por exemplo, o limite de escoamento,  $\sigma_e$  ou o limite de resistência,  $\sigma_u$ , que serão discutidos em detalhe no capítulo 4, generiacamente dizemos que esta tensão máxima é  $\sigma_{max}$ ). Podemos estabelecer que o critério de falha está associado a uma carga máxima suportada pela estrutura,  $F_{max}$ , que será dada por:

$$F_{max} = \sigma_N \times s_0(D) \tag{3.68}$$

Onde  $s_0(D)$  é a área da seção transversal da estrutura, que é função da dimensão característica, evidentemente. Vamos agora supor três estruturas auto-similares, por exemplo, os corpos de prova de tração apresentados na Figura 3.10.

Descrevemos a resposta característica do sistema, P, (por exemplo, a própria resistência nominal) destas estruturas em função de D:

$$P = P_0 f\left(D\right) \tag{3.69}$$

onde f(D) é uma função, no momento, desconhecida, e  $P_0$  é a resposta da primeira estrutura representada na figura (com dimensão característica  $D_0$ ). Supomos ainda que não há

<sup>&</sup>lt;sup>21</sup>Z. P. Bažant, Size effect on structural strength: a review, Arch. Appl. Mech. 69 (1999) 703 – 725

<sup>&</sup>lt;sup>22</sup>Tradução: O efeito de escala é compreendido como o efeito que a dimensão característica da estrutura, *D*, tem sobre a resistência nominal,  $\sigma_N$ , desta estrutura quando estruturas geometricamente similares são comparadas.

<sup>&</sup>lt;sup>23</sup>Conceito que será melhor elaborado no capítulo 5.



Figura 3.10: Três estruturas auto-similares, que falham sob condições dúcteis.

nenhum comprimento característico da estrutura, ou seja, trabalhamos com a hipótese de que a estrutura pode ser descrita no contexto de uma das teorias do *continuum*, como a elasticidade linear, a plasticidade ou até mesmo a mecânica da fratura elástica linear. Esta hipótese implica na indefinição de uma referência para as dimensões, que é completamente arbitrária. Podemos, assim, escolher  $P_0 = 1$  como esta referência. As respostas para as duas outras estruturas, portanto, serão dadas por  $P_1 = f(D_1)$  e  $P'_1 = f(D'_1)$ . Como não há comprimento característico, entretanto, poderíamos também ter adotado  $D_1$  como referência, desta forma a seguinte relação funcional deve ser obedecida pela função desconhecida f:

$$\frac{f\left(D_{1}'\right)}{f\left(D_{1}\right)} = f\left(\frac{D_{1}'}{D_{1}}\right) \tag{3.70}$$

A solução para o funcional f é únicamente definida e corresponde à lei de potências:

$$f(D) = \left(\frac{D}{c_1}\right)^s \tag{3.71}$$

onde  $c_1$  é uma contante de integração que está associada à unidade de medida adotada para *D* e *s* é o expoente que caracteriza o efeito de escala.

No caso aqui tratado, assumindo-se que  $P \equiv \sigma_{max}$ , temos que s = 0, ou seja, as estruturas são insensíveis à escala<sup>24</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>24</sup>Note, entretanto, que se tivessemos adotado a carga máxima suportada pela estrutura, usando a Equação 3.68, teríamos um efeito de escala caracterizado por um expoente s = 2, que é trivial, já que ele advém da própria geometria do sistema (a área da seção transversal também escala com s = 2).



Figura 3.11: Três estruturas auto-similares contendo um defeito, que falham sob condições frágeis.

Um caso menos trivial está representado na Figura 3.11, com três estruturas geometricamente similares idealizadas como corpos de prova de tenacidade à fratura. A condição de auto-similaridade implica que as razões entre as características geométricas de cada corpo de prova são as mesmas para todas as estruturas (por exemplo,  $\frac{a_0}{W_0} = \frac{a_1}{W_1} = \frac{a'_1}{W'_1}$ ).

Usando as Equações 3.63 e 3.65, podemos escrever a tensão de ruptura para a primeira estrutura como:

$$\sigma_f^0 = \frac{K_{Ic}}{Y(a_0, W_0)\sqrt{\pi a_0}}$$
(3.72a)

Da mesma forma tempos para a segunda e terceira estruturas:

$$\sigma_f^1 = \frac{K_{Ic}}{Y(a_1, W_1)\sqrt{\pi a_1}} = \frac{K_{Ic}}{Y(a_1, W_1)\sqrt{1.5\pi a_0}}$$
(3.72b)

e

$$\sigma_f^{1'} = \frac{K_{Ic}}{Y\left(a_1', W_1'\right)\sqrt{\pi a_1'}} = \frac{K_{Ic}}{Y\left(a_1', W_1'\right)\sqrt{2.0\pi a_0}}$$
(3.72c)

Notamos, entretanto, que a expressão de *Y* na equação 3.63 depende somente da razao  $\frac{a}{W}$ , que, como vimos, é uma constante para as estruturas auto-similares. Sendo assim concluímos que  $s = -\frac{1}{2}$  para estes casos (fratura frágil controlada por um defeito crítico).

Temos, portanto, dois regimes distintos de efeitos de escala, que denominamos "dúctil" e "frágil", cada um associado a um dado expoente.

Cabem aqui três advertências. Primeiramente, os dois regimes são meramente casos limites. É possível que uma determinada estrutura se comporte com um regime intermediário (ou seja, com um expoente  $0 > s > -\frac{1}{2}$ . Os materiais que compõem estas estruturas são ditos **pseudofrágeis** (*quasibrittle*). Um exemplos importante de material pseudofrágil é o concreto armado.

Em segundo lugar, a hipótese da inexistência de um comprimento característico para o material é muito severa para materiais reais. Qualquer material possui inomogeneidades microestruturais (por exemplo, as barras de reforço no concreto, inclusões em aços ou mesmo os contornos de grão em materiais policristalinos) que freqüentemente afetam o processo de fratura. Estes materiais definem um comprimento característico para a estrutura (por exemplo, a distância de separação entre inclusões ou o tamanho de grão). Materiais reais podem ser (e freqüentemente são) descritos por dependências de escala que divergem da lei de potência.

Para um material pseudofrágil, que apresenta comportamento intermediário entre os limites frágil, caracterizado por  $K_{Ic}$ , e dúctil, caracterizado por uma tensão limite  $\sigma_0$ , é possível definirse um comprimento característico  $\ell_0$  tal que:

$$\ell_0 = \frac{1}{\pi} \frac{(K_{Ic})^2}{\sigma_0}$$
(3.73)

Este comprimento deve ser interpretado como uma característica da zona de processo de fratura (*fracture process zone*, FPZ), que pode ser definida como a região do material onde os processos unitários de separação ocorrem. No contexto da teoria de Barenblatt, discutida anteriormente (seção 3.4, a FPZ corresponde à região onde o alcance das forças interatômicas é comparável à separação entre os atomos.

Por fim, os critérios de falha foram intrísecamente assumidos como determinísticos (ou seja, a tensão limite,  $\sigma_{max}$ , é única, o tamanho do defeito crítico,  $a_0$ , é único e conhecido). Na verdade estas propriedades estão sujeitas a flutuações estatísticas e os critérios de falha devem, necessariamente, assumir um caráter estocástico (ou seja, probabilístico).

Bažant e colaboradores<sup>25</sup> mostram que os regimes "frágil" e "dúctil" discutidos anteriormente são governados por funções de distribuição de probabilidade de falha distintas, a distribuição de Weibull para o primeiro caso e uma distribuição normal (Gaussiana) para o segundo caso. Distribuições intermediárias podem ainda ser obtidas facilmente pelo modelo proposto por estes autores, o que abre a perpectiva da descrição estatística das falhas em mate-

<sup>&</sup>lt;sup>25</sup>Z. P. Bažant, J.-L. Le, M. Z. Bazant, Size effect on strenght and lifetime distributions of quasibrittle structures implied by interatomic bond break activation, In:*Proceeding of the 17<sup>th</sup> European Conference on Fracture*, Brno (Rep. Tcheca): ESIS, 2008, pp. 78 – 92 (cdrom).
riais pseudofrágeis.

A seguir discurtiremos algumas propriedades da distribuição de Weibull, já que esta é menos comumente discutida na literatura.

## 3.6.1 Distribuição de Weibull

Conforme discutido anteriormente neste capítulo, materiais frágeis contém uma série de defeitos ("flaws") pré-nucleados, que, em certas condições, podem se tornar críticos para a propagação instável de uma trinca.

A hipótese de Griffith permite, portanto, calcular a carga máxima suportada pelo componente, ou alternativamente, o tamanho máximo tolerado de defeito *desde que este seja conhecido* O que fazer, portanto, quando não temos um conhecimento preliminar do defeito que se tornará crítico?

Devemos neste caso assumir que há uma **distribuição estatística** de defeitos e utilizar os métodos da teoria da probabilidade para caracterizar a resposta da estrutura a tensões aplicadas.

Hipótese básicas:

- I O sólido contém uma população homogênea de defeitos de tamanhos e orientações variáveis.
- II Os defeitos não interagem (ou seja, cada defeito pode ser conisiderado como um ente isolado, independente dos demais).
- III A fratura total da estrutura ocorrerá quando o defeito mais favoravelmente orientado atingir a condição de criticalidade (hipótese do elo mais fraco, ou *weakest-link*).
- IV Um sólido de volume unitário  $V_0$ , sujeito a uma tensão uniaxial  $\sigma$  apresentará uma certa probabilidade de falha, que será denotada por  $P_1(\sigma, V_0)$ .

Com base nas hipóteses anteriores, podemos escrever a probabilidade (acumulada) de falha do mesmo sólido em função do volume, *V*, como:

$$P_{f}(\boldsymbol{\sigma}) = 1 - \exp\left\{-\int_{V} c\left[\boldsymbol{\sigma}_{ij}\left(\mathbf{x}\right)\right] d\left(\mathbf{x}\right)\right\}$$
(3.74)

onde *c* é uma função escalar do tensor de tensão local (na coordenada definida pelo vetor **x**),  $\sigma_{ij}$ , que representa a probabilidade (acumulada) de falha por unidade de volume.

Para materiais frágeis, é seguro assumir-se que:

$$c\left(\sigma_{ij}\right) \approx \sum_{i} \frac{P_1\left(\sigma_i\right)}{V_0} \tag{3.75}$$

Note que usamos a hipótese I para concluir que o sólido é isotrópico (pois  $\sigma_i$  denotam as tensões principais) e a hipótese II para relacionar  $P_1$  a c, assumindo implicitamente que o elemento de volume  $V_0$  é aquele que estatísticamente contém apenas um defeito isolado em seu interior.

A probabilidade (acumulada) de falha  $P_1$ , por sua vez, pode é postulada<sup>26</sup> como:

$$P_1(\sigma) = \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m \tag{3.76}$$

Na expressão 3.76 os três parâmetros de material, m,  $\sigma_u \in \sigma_0$  admitem alguma interpretação tecnológica. O parâmetro m é denominado **módulo de Weibull** e, como veremos abaixo, determina o desvio padrão característico da distrubuição, sendo portanto um caracterizador da dispersão dos resultados. Este número é usualmente encontrado no intervalo  $5 \le m \le 50$  e quanto maior ele for, menor será o desvio padrão, ou seja, mais concentrada será a distribuição em torno da média. O parâmetro  $\sigma_u$  é chamado de **limiar de resistência** (*strength threshold*) e representa o nível de tensão abaixo do qual a falha nunca ocorre<sup>27</sup>. Segundo Bažant este parâmetro pode ser tomado como nulo para materiais frágeis. Finalmente o parâmetro  $\sigma_0$  representa uma tensão de referência, e, contrariamente ao que se pode esperar, está relacionado à média da distribuição (e não à sua largura).

Assumindo-se que o material encontra-se sujeito a um estado de tensão homogêneo e uniaxial, podemos reescrever a equação 3.74 como:

$$P_f = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m \frac{1}{V_0} \int_V d\mathbf{x}\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m\right]^{\frac{V}{V_0}}$$
(3.77)

que é a forma usual de representação da função de Weibull encontrada em muitos livrostexto. Assumindo-se agora que  $\sigma_u = 0$ , podemos mostrar que a média,  $\langle \sigma \rangle$  e o desvio padrão,  $\omega$ , da distribuição serão dados por:

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_0 \Gamma \left( 1 + m^{-1} \right) \left( \frac{V}{V_0} \right)^{\frac{1}{m}}$$
 (3.78a)

<sup>&</sup>lt;sup>26</sup>Segundo Bažant, Weibull propôs esta forma funcional para  $P_1$  usando argumentos heurísticos, mas posteriormente diversos autores tentaram justificá-la, baseando-se em modelos estatísticos para a distribuição de defeitos.

<sup>&</sup>lt;sup>27</sup>Note que a equação 3.74 só fará sentido como uma probabilidade de falha se  $\sigma \ge \sigma_u$ .

$$\omega = \sqrt{\langle \sigma^2 \rangle - (\langle \sigma \rangle)^2} = \left[ \frac{\Gamma\left(1 + 2m^{-1}\right)}{\Gamma^2\left(1 + m^{-1}\right)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$
(3.78b)

onde  $\Gamma(x)$  representa a função gama de Euler<sup>28</sup>.

O módulo de Weibull, portanto, controla a largura da distribuição de Weibull. Quanto maior seu valor, mais "estreita" será a distribuição, ou seja, maior será a confiabilidade na determinação da tensão de ruptura (Fig. 3.12). Sendo assim o módulo de Weibull é uma medida direta da qualidade de um material frágil. Note ainda que a dispersão dos resultados depende somente de *m*, desta forma este parâmetro pode ser determinado simplesmente analizando-se a dispersão (ou seja, tomando-se o desvio padrão) de resultados de tensão de ruptura em múltiplos corpos de prova idênticos.



Figura 3.12: Representação de duas distribuições de Weibull com  $\sigma_0$  e *m* distintos.

## Exercício 3.5

Dois conjuntos de amostras pertencentes a dois lotes de um mesmo material cerâmico (identificadas pelas letras A e B) foram testadas em flexão (usando corpos de prova idênticos de flexão em três pontos, com volume  $V_0$ ) e submetidas a uma análise de Weibull. Como resultado observamos que:

- I- O limiar de resistência vale  $\sigma_u = 0$  para os dois lotes.
- II- A tensão de referência ( $\sigma_0$ ) é a mesma para os dois lotes.

<sup>&</sup>lt;sup>28</sup>Que é uma generalização do fatorial para argumentos reais.

III- O módulo de Weibull das amostras do grupo B é três vezes maior que o observado para as amostras do grupo A.

Com base nestas informações mostre que a tensão correspondente a  $10^{-6}$  de probabilidade de falha será maior para o grupo B em comparação com o grupo A para valores fisicamente razoáveis de *m*.

#### Solução

De acordo com o enunciado, teríamos:

$$10^{-6} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_A}{\sigma_0}\right)^m\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_B}{\sigma_0}\right)^{3m}\right]$$
(3.79)

tomando os logaritmos, elevando a  $\frac{1}{m}$  e multiplicando por  $\sigma_0$  obtemos:

$$\sigma_0 \left[ -\ln\left(1 - 10^{-6}\right) \right]^{\frac{1}{m}} = \sigma_A = \left(\sigma_B\right)^3 \tag{3.80}$$

temos, entretanto, que  $\ln(1-10^{-6}) \approx -10^{-6}$ . Assumindo agora que  $5 \le m \le 50$  vemos que  $0.0631\sigma_0 \le \sigma_A \le 0.7586\sigma_0$ . Na verdade, para qualquer valor fisicamente razoável de m,  $\sigma_A = \alpha \sigma_0$ , onde  $0 < \alpha < 1$ . Repetindo o procedimento para  $\sigma_B$ , teremos  $\sigma_B = \alpha^{\frac{1}{3}}\sigma_0$ , de onde concluímos que  $\sigma_B > \sigma_A$  como proposto. Note que a diferença é maior quanto menor for o valor de m, justificando a afirmação anterior de que o módulo de Weibull quantifica a qualidade do material frágil: nesta situação hipotética, valores maiores de m iriam resultar em uma menor variação da tensão admissível para os dois lotes (já que  $\lim_{m\to\infty} \alpha = 1$ ).

# 4 PLASTICIDADE

Até o momento consideramos que as deformações geradas pelas cargas aplicadas ao sólido são infinitesimais. Isto é válido no âmbito do regime elástico<sup>1</sup>. Quando a carga ultrapassa um certo valor crítico, caso não ocorra a ruptura frágil, parte da deformação se tornará permanente no material. Isto define o chamado **regime plástico**. No âmbito da plasticidade, as deformações não podem mais ser consideradas infinitesimais, neste caso é conveniente introduzir um tratamento teórico alternativo ao usado anteriormente, o que será visto ao final deste capítulo. De forma aproximada, entretanto, podemos ainda empregar o formalismo introduzido anteriormente, introduzindo os conceitos de **tensão real** e **deformação real**.

#### Deformação real

Até o momento trabalhamos com a chamada fórmula de engenharia para calcular a deformação de um corpo sólido:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\Delta l_i}{l_i^0} \tag{4.1}$$

As justificativas eram:

- desejamos poder relacionar as propriedades mecânicas do corpo ao projeto de engenharia, ou seja, às dimensões do componente como fabricado (não deformado) e às cargas aplicadas sobre este componente e
- no regime elástico as deformações são pequenas e, portanto, a fórmula de engenharia pode ser considerada uma boa aproximação para a deformação real.

No regime plástico, entretanto, estamos interessados em associar o comportamento mecânico dos materiais aos mecanismos de deformação ou de fratura, que são ativados por uma certa tensão crítica, além disto, salvo casos muito específicos, o regime plástico é caracterizado por

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Exceto para os elastômeros.

#### 4 Plasticidade

deformações mais intensas. Um simples exemplo pode demonstrar a inadequação da fórmula de engenharia.

Consideremos um corpo de comprimento inicial  $l_1^0$  deformado em duas etapas, a primeira até o comprimento  $l_1^1$  e a segunda até o comprimento  $l_1^2$ . Calculando a deformação de engenharia do processo total de deformação  $\varepsilon_{11}^{0\to2}$  e os de cada etapa intermediária  $\varepsilon_{11}^{0\to1}$  e  $\varepsilon_{11}^{1\to2}$ , veremos que:

$$\varepsilon_{11}^{0\to2} \equiv \frac{l_1^2 - l_1^0}{l_1^0} \neq \varepsilon_{11}^{0\to1} + \varepsilon_{11}^{1\to2} \equiv \frac{l_1^1 - l_1^0}{l_1^0} + \frac{l_1^2 - l_1^1}{l_1^1}$$
(4.2)

ou seja, o resultado é dependente do caminho de deformação, o que é absurdo. Note que o erro é tanto maior, quanto mais intervalos de deformações intermediárias tivermos entre as deformações inicial e final.

Para calcular a deformação real partimos novamente da definição do tensor de deformação:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{x_i} \right)$$
(4.3)

Note que desprezamos o termo quadrático nas derivadas, isto é possível pois, apesar de termos grandes deformações durante a deformação plástica, a variação do vetor de deslocamento com a deformação continua a ser pequena (mas esta aproximação falha em materiais elásticos não lineares, como a borracha).

Aplicando a fórmula ao caso de uma deformação infinitesimal normal pura ao longo do eixo  $x_1$  teremos:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{11} = \frac{\mathrm{d}l_1}{l_1} \tag{4.4}$$

Integrando ao longo do caminho de deformação  $0 \rightarrow 2$  teremos:

$$\varepsilon_{11}^r = \ln \frac{l_1^2}{l_1^0} \tag{4.5}$$

onde utilizamos o sobre-escrito "*r*" para distinguir a deformação real da calculada com a fórmula de engenharia (que será escrita sem sobre-escrito, por ser a mais comumente utilizada).

## Exercício 4.1

Demonstre que a deformação real, derivada na página anterior, independe do caminho de deformação.

Solução

#### 4 Plasticidade

Como no exercício anterior, subdividimos o processo de deformação em duas etapas, do comprimento  $l_0^1$  a  $l_1^1$  e daí até  $l_1^2$ . De acordo com a Equação 4.5 temos que a deformação para a primeira etapa é dada por:

$$\varepsilon_{11}^{r,0\to1} = \ln\left(\frac{l_1^1}{l_0^0}\right) \tag{4.6a}$$

Da mesma forma, a segunda etapa é caracterizada por:

$$\varepsilon_{11}^{r,1\to2} = \ln\left(\frac{l_1^2}{l_1^1}\right)$$
 (4.6b)

Finalmente, a deformação característica de todo o processo é dada por:

$$\varepsilon_{11}^{r,0\to2} = \ln\left(\frac{l_1^2}{l_0^0}\right) = \ln\left(\frac{l_1^2}{l_1^1} \times \frac{l_1^1}{l_0^0}\right) = \ln\left(\frac{l_1^2}{l_1^1}\right) + \ln\left(\frac{l_1^1}{l_0^0}\right) = \varepsilon_{11}^{r,0\to1} + \varepsilon_{11}^{r,1\to2}$$
(4.6c)

Como a subdivisão é arbitrária, a asserção fica provada para qualquer situação.

#### Tensão real

Assim como no caso da deformação real, a tensão calculada pela fórmula de engenharia também não corresponde à tensão real atuando sobre um elemento de volume no interior do sólido, que é definido para o caso da solicitação uniaxial normal ao longo do eixo  $x_1$  como:

$$\sigma_{11}^r \equiv \frac{F_1}{s_1(\varepsilon_{11})} \tag{4.7}$$

onde  $s_1(\varepsilon_{11})$  é a área instantânea do elemento de volume deformado por  $\varepsilon_{11}$ .

Podemos agora calcular a tensão real assumindo duas hipóteses:

- o volume se conserva durante a deformação plástica e
- a deformação é uniforme ao longo de todo o volume do corpo.

A primeira hipótese é experimentalmente verificada na maioria dos casos, já a segunda é válida apenas durante a etapa inicial da deformação plástica, como será discutido mais adiante ainda nesta aula.

Usando a primeira hipótese podemos relacionar a área instantânea do corpo à deformação de engenharia da seguinte forma:

$$\frac{V\left(\varepsilon_{11}\right)}{V_0} = 1 \Rightarrow \frac{l_1^1 \times s_1\left(\varepsilon_{11}\right)}{l_1^0 \times s_1^0} = 1$$
(4.8)

mas

$$\varepsilon_{11} \equiv \frac{l_1^1 - l_1^0}{l_1^0} \Rightarrow \frac{l_1^1}{l_1^0} = 1 + \varepsilon_{11} \tag{4.9}$$

portanto ...

$$\sigma_{11}^r = \sigma_{11} \left( 1 + \varepsilon_{11} \right) \tag{4.10}$$

Da mesma forma notamos que a deformação real pode ser expressa em temos da deformação de engenharia por:

$$\varepsilon_{11}^r = \ln\left(1 + \varepsilon_{11}\right) \tag{4.11}$$

Sendo assim, desde que a deformação seja uniforme ao longo de todo o corpo, tanto a tensão real quanto a deformação real poderão ser calculadas em função da tensão e da deformação de engenharia.

# 4.1 Parâmetros da curva tensão – deformação (o ensaio de tração)

A Figura 4.1 apresenta uma curva tensão – deformação típica obtida em ensaio de tração de material metálico que não apresenta escoamento descontínuo. Nesta curva estão representados os principais parâmetros que são usados na caracterização do comportamento plástico dos materiais.

Estes parâmetros são:

- o limite de escoamento (yield stress,  $\sigma_e$ ),
- o limite de resistência (ultimate tensile stress, σ<sub>u</sub>),
- o alongamento uniforme  $(\varepsilon_u)$  e
- o alongamento total  $(\varepsilon_f)$ .



Figura 4.1: Representação esquemática de uma curva  $\sigma \times \varepsilon$  de ensaio de tração para um material metálico convencional.

#### Limite de escoamento

O limite de escoamento fornece uma estimativa da máxima tensão suportada pelo material sem que este apresente deformação plástica apreciável. Este parâmetro substitui outro, de determinação mais complexa, chamado **limite de proporcionalidade**, que designa mais propriamente a separação entre o regime elástico e o regime plástico.

O limite de escoamento, nos casos genéricos, é determinado a partir de um critério subjetivo, ou seja, ele é especificado como o valor da tensão que resulta em uma certa quantidade de deformação permanente após o descarregamento (usualmente,  $\varepsilon = 0,002$ ).

Para alguns materiais (por exemplo, aços carbono recozidos, alguns polímeros) há um máximo local da tensão que correspondente ao início da deformação plástica. Este fenômeno é denominado **escoamento descontínuo** e será tratado mais adiante ainda neste capítulo.

O limite de escoamento (de materiais que não apresentam escoamento nítido) é medido pelo procedimento esquematizado na Figura 4.2.

Quando este procedimento for usado, o valor da deformação residual deve ser informado. Por exemplo, segundo a norma ASTM A370-90: "limite de escoamento (0,2%) de desvio) =



Figura 4.2: Representação esquemática da contrução gráfica para a determinação do limite de escoamento (com desvio de 0,2%) de um material metálico convencional.

125 MPa" indica que o limite de escoamento medido com uma deformação permanente de 0,2% ( $\varepsilon = 0,002$ ) é 125 MPa.

O limite de escoamento é uma propriedade consideravelmente insensível à geometria do corpo de prova que é utilizado na sua determinação e às condições em que o ensaio é realizado. Por exemplo, quando o ensaio é executado com ou sem extensômetro, o limite de escoamento obtido é praticamente o mesmo. A razão disto é que os erros associados à determinação da deformação do corpo de prova devidos à desconsideração da deformação da máquina são cancelados através da construção apresentada na Figura 4.2. Deve-se ressaltar, entretanto, que alguma dependência deste parâmetro com o tamanho (área da seção transversal) do corpo de prova é esperada, já que quanto maior a área, maior será a cotribuição que a região dominada pelo EPD no centro do corpo de prova terá para o ensaio. É claro que isto ocorre porque o estado de tensão não é realmente uniaxial (o EPD é triaxial por natureza, como visto anteriormente) e o limite de escoamento medido é, portanto, um limite de escoamento efetivo. Em resumo, o limite de escoamento é utilizado como uma propriedade intrínseca do material, mas na sua determinação é recomendável identificar claramente as dimensões e a geometria do corpo de prova utilizado na sua determinação.

#### Limite de resistência

O limite de resistência corresponde ao máximo da curva tensão vs. deformação **de engenharia**.

O nome em inglês reflete esta característica ("ultimate tensile strength" é traduzido como máxima resistência à tração, em algumas referências esta propriedade também é indicada pela abreviatura **UTS**.

O parâmetro é facilmente determinado a partir da curva resultante de um ensaio de tração típico. Assim como no caso do limite de escoamento, o limite de resistência pode apresentar alguma dependência com o tamanho do corpo de prova, devido à contribuição da região dominada pelo EPD no centro do corpo de prova.

#### Alongamento uniforme e total

Os alongamentos correspondem a deformações plásticas, logo, a parcela devida à deformação elástica deve ser descontada quando da determinação destas quantidades (Fig. 4.3).



Figura 4.3: Representação gráfica esquemática do método para determinação dos alongamentos uniforme e total.

Alguns fatos sobre o alongamento uniforme:

 o alongamento uniforme é o valor da deformação plástica correspondente ao limite de resistência (portanto, ao máximo da curva tensão - deformação),

- para materiais convencionais (exemplo, o que não apresentam escoamento descontínuo ou os que não apresentam forte depedência com a taxa de deformação) o alongamento uniforme marca o limite máximo para a ocorrência de deformação uniforme no corpo,
- para deformações maiores que  $\varepsilon_u$  inicia-se a instabilidade plástica conhecida como **estricção**, que eventualmente leva o componente à fratura,

Devido a esta conexão com a ocorrência da deformação homogênea no material o alongamento uniforme tem uma importância fundamental no processamento mecânico dos materiais metálicos, particularmente na estampagem de chapas.

Do ponto de vista prático, a determinação de  $\varepsilon_u$  é difícil e sujeita a erros. A razão para isto é que normalmente a curva obtida em uma máquina é muito plana próxima ao máximo, o que leva a uma consideravel imprecisão na determinação deste ponto.

O alongamento total, assim como o alongamento uniforme, é uma medida da **ductilidade** de um material, entretanto, ao contrário de  $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_f$  depende fortemente da geometria do corpo.

Em um ensaio de tração  $\varepsilon_f$  é facilmente determinado juntando-se cuidadosamente as duas metades do corpo de prova e medindo-se o comprimento total deformado (normalmente coincide com a medida feita na máquina). Este procedimento é, inclusive, previsto na norma.

**Exercício 4.2** A Figura 4.4 apresenta os resultados obtidos em um ensaio de tração realizado em corpo de prova de liga de alumínio. Os dados são apresentados em duas escalas diferentes. Sabendo-se que a região útil do corpo de prova tinha originalmente 9mm de diâmetro e 65mm de comprimento, determine, usando o gráfico mais conveniente para cada parâmetro:

- a. O módulo de rigidez (ou módulo de Young), E,
- b. O limite de escoamento a 0.2% de desvio,  $\sigma_e^{0.002}$ ,
- c. O limite de resistência,  $\sigma_u$ ,
- d. O alongamento uniforme,  $\varepsilon_u$ ,
- e. O alongamento total,  $\varepsilon_f$



Figura 4.4: Resultados obtidos em ensaio de tração em corpo de prova de liga de alumínio. Escala completa (a) e detalhe da região do escoamento (b).

# 4.2 Equação de Ludwik - Hollomon

Para alguns materiais metálicos deformados à temperatura ambiente<sup>2</sup> vale a seguinte expressão no regime plástico:

$$\sigma^r = \sigma_1 \left( \varepsilon_p^r \right)^n \tag{4.12}$$

onde  $\sigma_1$  e *n* são constantes e o último recebe o nome de coeficiente de encruamento. O subescrito "*p*" indica que apenas a parcela plástica da deformação real é considerada na equação (na maioria dos casos a parcela elástica é desprezível, portanto  $\varepsilon_p^r \approx \varepsilon^r$ ).

A equação acima recebe o nome de "Equação de Hollomon". Em certos casos, utiliza-se uma variante desta equação, chamada de **"Equação de Ludwik - Hollomon"**:

$$\sigma^{r} = \sigma_{0} + \sigma_{1} \left(\varepsilon_{p}^{r}\right)^{n} \tag{4.13}$$

Onde  $\sigma_0$  representaria o limite de escoamento do material. Deve-se notar, entretanto, que tanto a a equação de Hollomon, quento a de Ludwik - Hollomon, são equações empíricas e deve-se ter cautela quanto a qualquer tipo de interpretação física associada a estes parâmetros.

#### Coeficiente de encruamento

O coeficiente de encruamento varia nos materiais no intervalo  $0 \le n \le 1$ . O coeficiente de encruamento está relacionado à capacidade do material se deformar sem o desenvolvimento de estricção, quanto maior *n*, maior será esta capacidade, desta forma, em aplicações onde o desenvolvimento de estricção é indesejável (exemplo, na estampagem profunda) procuramos materiais com elevado valor de *n*.

Novamente cabe uma advertência: o coeficiente de encruamento é um parâmetro empírico (determinado como a inclinação de uma curva em um gráfico bilogaritmico de  $\sigma^r \times \varepsilon^r$ ). Fato é que, nestes gráficos, o valor da inclinação (e consequentemente, do expoente) freqüentemente depende da deformação. Isto, obviamente, é uma contradição já que *n* deveria ser uma constante. No âmbito da indústria de estampagem de chapas, por exemplo, define-se que o valor de *n* adotado é aquele medido para  $\varepsilon^r = 0.15$  (15%).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Mais precisamente, em uma temperatura homóloga baixa, que será definida posteriormente.

# 4.3 Instabilidades plásticas

Baseado em F. A. McClintock e A. S. Argon "Mechanical Behavior of Materials" Addison-Wesley Pub. Co. Inc., Reading-MA, EUA, 1966.

Quando analisamos as curvas tensão - deformação de engenharia dos mais diversos materiais observamos que, em certas condições, esta apresenta um máximo (local ou global). Este ponto de máximo corresponde ao desenvolvimento de deformação plástica localizada em algum ponto do corpo. No caso do máximo global, este é determinado pelo balanço entre encruamento e diminuição da seção resistente do corpo.

A condição para que a carga aplicada apresente um máximo local para o caso de um carregamento uniaxial de tração ao longo do eixo  $x_1$  será dada por:

$$dF_1 = d[\sigma_{11}^r \times s_1(\varepsilon_{11}^r)] \Rightarrow [s_1(\varepsilon_{11}^r) d\sigma_{11}^r] + [\sigma_{11}^r ds_1(\varepsilon_{11}^r)] = 0$$
(4.14)

Como discutido anteriormente, a área instantânea pode ser expressa em termos da deformação e, portanto, a condição correspondente ao máximo será dada na **curva tensão real vs. deformação real** pelo ponto para o qual:

$$\sigma_{11}^r = \frac{\mathrm{d}\sigma_{11}^r}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^r} \tag{4.15}$$

Utilizando a equação de Hollomon (ou a de Ludwik-Hollomon) teremos:

$$\sigma_1 \left( \varepsilon_{11}^r \right)^n = n \sigma_1 \left( \varepsilon_{11}^r \right)^{n-1} \Rightarrow \left( \frac{n}{\varepsilon_{11}^r} - 1 \right) \sigma_{11}^r = 0 \tag{4.16}$$

O termo entre parênteses se anula quando  $\varepsilon_{11}^r = n$ , o que nos leva à importante **relação de Considère**:

$$\varepsilon_u^r = n \tag{4.17}$$

# 4.3.1 O tratamento de Argon para as instabilidades plásticas

Baseado em A. S. Argon, Stability of Plastic Deformation, *in:* The Inhomogeneity of plastic deformation, Cap. 7, Metals Park-OH: ASM, 1973, pp. 161 – 189.

Ali S. Argon apresenta um tratamento matemático mais detalhado do problema do surgi-

mento de instabilidades plásticas em materiais, capaz de emcompassar tanto materiais metálicos quanto poliméricos. As linhas básicas deste desenvolvimento serão descritas a seguir.

Em primeiro lugar é preciso ressaltar que a principal diferença do comportamento plático entre materiais cristalinos e amorfos está na dependência com a pressão hidrostática, *P*. Materiais cristalinos são geralmente insensiveis à variação da pressão, enquanto que materiais amorfos, por apresentarem uma grande proporção de volume livre, apresentam forte sensibilidade a esta variável. Um tratamento que se propõem a descrever ambos os materiais deve, portanto, incluir a dependência com a pressão.

A fenomenologia da deformação plástica sugere que a taxa de deformação angular,  $\dot{\gamma}$  é termicamente ativada, obedencendo uma relação de Arhenius:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \exp\left[-\frac{\Delta H\left(\tau, \tau_0, P\right)}{k_B T}\right]$$
(4.18)

onde  $\tau$  é a tensão de cisalhamento aplicada,  $\tau_0$ , denominada por Argon de "resitência plástica", é o limite de escoamento do material a 0K e na ausência de pressão e  $\dot{\gamma}_0$  é um termo pré-exponencial que corresponde ao produto da fração volumétrica dos elementos responsáveis pela deformação (discordâncias glísseis no caso de metais ou número de sítios moleculares ativos no caso de polímeros), do volume da região onde o rearranjo se processará e de um termo de freqüência que incorpora todos os termos da entropia de ativação do processo. Note-se que  $\tau_0$  não é constante, já que o material em princípio encrua.

Derivando-se a equação 4.18 temos:

$$d\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{0} \exp\left(-\frac{\Delta H}{k_{B}T}\right) \left[-\frac{1}{k_{B}T} \left(\frac{\partial H}{\partial \tau}\right)_{P,\tau_{0}} d\tau - \frac{1}{k_{B}T} \left(\frac{\partial H}{\partial \tau_{0}}\right)_{P,\tau} d\tau_{0} -\frac{1}{k_{B}T} \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{\tau,\tau_{0}} dP + \frac{\Delta H}{k_{B}T^{2}} dT\right]$$

$$(4.19)$$

A seguir Argon lembra que apenas uma fração pequena da deformação plástica é armazenada na forma de encruamento. A parcela principal,  $\beta$  é transformada em calor. Caso a deformação fosse homogênea, o incremento temporal de temperatura seria dado simplesmente por:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta \,\tau \dot{\gamma}}{\rho C_P} \tag{4.20}$$

No caso da deformação não homogênea (concentrada em uma banda de espessura h) devemos considerar a potência geradora de calor e a difusão deste calor para fora da banda.

#### 4.3 Instabilidades plásticas

Definindo-se a condutividade térmica  $k_T$  temos:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\beta\,\tau\dot{\gamma}}{\rho C_P}\right) \left(\frac{\rho C_P}{k_T}\right) \left(\frac{h^2\dot{\gamma}}{\gamma}\right) = \left(\frac{\beta\,\tau\dot{\gamma}h^2}{k_T\gamma}\right)\dot{\gamma} \tag{4.21}$$

Substituindo 4.21 em 4.19 temos:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\gamma}}{\mathrm{d}\gamma} = -\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \gamma}\right)_{P,T} \dot{\tau} - \frac{1}{k_B T} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial P}\right)_{\gamma,T} \dot{P} + \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \tau_0}\right)_{\gamma,P} \left(\frac{\mathrm{d}\tau_0}{\mathrm{d}\gamma}\right)_P + \left(\frac{\Delta H}{k_B T}\right) \left(\frac{\beta \tau \dot{\gamma} h^2}{k_T \gamma T}\right)\right] \dot{\gamma}$$

$$(4.22)$$

Assumimos agora que a entalpia de ativação da deformação plástica é função apenas da razão entre a tensão de cisalhamento aplicada e a resistência plástica:

$$\Delta H = \Delta H \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \tag{4.23}$$

Usando esta hipótese e definindo o coeficiente de sensibilidade à taxa de deformação,  $m = \left(\frac{d \ln \dot{\gamma}}{d \ln \tau}\right)_T$ , temos:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\gamma}}{\mathrm{d}\gamma} = m\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} - m\left(\frac{\partial\ln\tau_0}{\partial P}\right)_{\gamma}\frac{\dot{P}}{P} + \left[-\frac{m}{\tau_0}\left(\frac{\partial\tau_0}{\partial\gamma}\right)_P + \theta\right]\dot{\gamma}$$
(4.24)

Onde definimos por simplicidade a variável  $\theta$  como:

$$\theta \equiv \frac{\beta \tau \dot{\gamma} h^2}{k_T \gamma T} \tag{4.25}$$

A equação 4.24 deve então ser resolvida para as diferentes condições de contorno.

## 4.3.2 Estricção

Como vimos, a instabilidade de deformação associada ao máximo da curva tensão deformação (de engenharia) está relacionada ao balanço entre encruamento e a taxa de diminuição da área com o progresso da deformação plástica. Esta instabilidade recebe o nome de **estricção** e corresponde à localização da deformação em uma determinada região do corpo, como esquematizado na Figura 4.5.

Usando o formalismo desenvolvido na seção 4.3.1 temos as seguintes condições de contorno para o caso de tração em controle de deformação (substituimos a tensão de cisalhamento



Figura 4.5: Representação gráfica esquemática do desenvolvimento da estricção em um corpo de prova metálico.

pela tensão normal do ensaio e a deformação angular pela deformação normal), onde F é a carga medida no ensaio e  $\ell$  o deslocamento dos travessões:

$$\begin{cases} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \frac{\dot{F}}{F} + \dot{\varepsilon} \\ P = \frac{\sigma}{3} \\ \frac{d\dot{\varepsilon}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\ell}{\ell}\right) \end{cases}$$
(4.26)

Substituindo as equações 4.26 em 4.24 teremos:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\ell}}{\mathrm{d}\ell} = m\left(\frac{\partial\,\tau_0}{\partial P}\right)_{\varepsilon}\frac{\dot{F}}{F} + \left\{m\left[1 - \left(\frac{\partial\,\ln\tau_0}{\partial\,\ln P}\right)_{\varepsilon} - \frac{1}{\tau_0}\left(\frac{\partial\,\tau_0}{\partial\,\varepsilon}\right)_P\right] + 1 + \theta\right\}\frac{\dot{\ell}}{\ell} \tag{4.27}$$

Em um ensaio em controle de deformação temos que  $\dot{\ell} = 0$  o limite da capacidade de sustentação de carga pelo componente será dada por  $\dot{F} = 0$ , que fornece a condição para o máximo de carga:

$$m\left[1 - \left(\frac{\partial \ln \tau_0}{\partial \ln P}\right)_{\varepsilon} - \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon}\right)_P\right] + 1 + \theta = 0$$
(4.28)

Para um material que não apresente dependência da deformação plástica na pressão hidrostática e onde o aquecimento adiabático possa ser negligenciado a equação 4.28 se reduz a:

$$1 - \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon} \right)_P + \frac{1}{m} = 0 \tag{4.29}$$

Deve-se notar que a equação anterior se refere à resistência plástica e não à tensão de

escoamento instantânea. A resistência plástica do material e sua relação com a curva tensãodeformação não é óbvia. Para exprimir a condição de instabilidade em termos de variáveis ligadas à curva tensão-deformação vamos definir:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\ell}}{\ell} = \dot{\varepsilon}_{0} \exp\left(-\frac{\Delta H}{k_{B}T}\right) \\ \frac{\dot{\ell}}{\ell} \frac{d\ell}{dt} = 0 = \dot{\ell} - \ell \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta H}{k_{B}T}\right) \Leftarrow \ddot{\ell} = 0 \\ d\varepsilon = d\left(\frac{\Delta H}{k_{B}T}\right) = \frac{1}{k_{B}T} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \sigma}\right)_{\tau_{0},P} d\sigma + \frac{1}{k_{B}T} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \tau_{0}}\right)_{\sigma,P} d\tau_{0} \\ + \frac{1}{k_{B}T} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial P}\right)_{\sigma,\tau_{0}} dP - \frac{\Delta H}{k_{B}T^{2}} dT \end{cases}$$

$$(4.30)$$

que leva a:

$$\frac{m}{\tau_0} \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon} \right)_P = 1 + \frac{m}{\sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_P + \theta \tag{4.31}$$

Substituindo 4.31 em 4.28 temos finalmente:

$$1 - \left(\frac{\partial \ln \tau_0}{\partial \ln P}\right)_{\varepsilon} - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\right)_P = 0 \tag{4.32}$$

Como esperado, esta expressão se reduz à condição de Considère para um material insensível à pressão.

As condições definidas acima apontam apenas a condição necessária para a observação de um máximo na curva carga versus deslocamento. A condição para localização da deformação pode ser consideravelmente diferente em materiais sensíveis à taxa de deformação. Para determinar a condição para localização da deformação voltamos à dedução da relação de Considère e escrevemos a condição para estabilidade da deformação como:

$$\frac{\delta \dot{s_1}}{\delta s_1} \le 0 \tag{4.33}$$

que requer:

$$-\frac{\dot{s_1}}{s_1} \left\{ -m \left[ 1 - \left( \frac{\partial \ln \tau_0}{\partial P} \right)_{\varepsilon} \right] \frac{\delta \ln F}{\delta \ln s_1} - 1 + m \left[ 1 - \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial P} \right)_{\varepsilon} - \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon} \right)_{P} \right] \right\} \le 0 \qquad (4.34)$$

Já que não há variação de força ao longo do comprimento da barra tracionada temos que  $\frac{\delta \ln F}{\delta s_1} \equiv 0$  e como  $\frac{\dot{s_1}}{s_1} < 0$  em tração temos que a condição para estabilidade da deformação em tração é dada por:

#### 4.3 Instabilidades plásticas

$$1 - m \left[ 1 - \left( \frac{\partial \ln \tau_0}{\partial \ln P} \right)_{\varepsilon} - \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon} \right)_P \right] - \theta \ge 0$$
(4.35)

Comparando as condições para máximo da carga (equação 4.28) com a condição necessária para localização da deformação plástica (correspondente ao sinal de igualdade na inequação 4.35) temos:

$$\frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon} \right)_P = \frac{1}{m} + 1 - \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial P} \right)_{\varepsilon} + \frac{1}{m} \theta$$
(4.36a)

para a primeira, enquanto que a segunda será dada por:

$$\frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon} \right)_P = 1 - \frac{1}{m} - \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial P} \right)_{\varepsilon} + \frac{1}{m} \theta$$
(4.36b)

Óbviamente estas expressões levam a resultados diferentes, exceto na condição particular em que  $m \rightarrow \infty$  (ou seja, para materiais insensíveis à taxa de deformação). Em materiais altamente sensíveis à taxa de deformação, onde *m* se aproxima da unidade (ligas superplásticas e vidros) freqüentemente se observa uma significativa extensão da região de deformação plástica homogênea para além do máximo da curva carga versus deslocamento.

# 4.3.3 Localização da deformação em cisalhamento

No caso da deformação por forças cisalhantes não se espera uma variação significativa da área resistente do corpo, mesmo assim a localização da deformação é possível. Para compreender como vamos resolver a equação 4.24 sob a condição de taxa de deformação angular constante (ou seja,  $d\dot{\gamma} = 0$ ):

$$m\frac{\dot{\tau}}{\tau} - m\left(\frac{\partial\ln\tau_0}{\partial\ln P}\right)_{\gamma}\frac{\dot{P}}{P} - \left[\frac{m}{\tau_0}\left(\frac{\partial\tau_0}{\partial\gamma}\right)_P - \theta\right]\dot{\gamma}$$
(4.37)

Para que um máximo de carga ocorra é necessário que  $\dot{\tau} = \dot{P} = 0$ , o que leva à condição necessária ao desenvolvimento de instabilidades de deformação em cisalhamento:

$$\frac{m}{\tau_0} \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \gamma}\right)_P - \theta = 0 \tag{4.38}$$

Esta condição pode ser satisfeita em duas condições:

- 1. se tanto  $\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \gamma}\right)_P$  quanto  $\theta$  forem independentemente nulos ou
- 2. se o aquecimento adiabático superar o encruamento.

No primeiro caso a condição de nulidade de  $\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \gamma}\right)_p$  implica que o próprio micromecanismo de deformação apresenta um máximo, o que é o caso por exemplo de maclas mecânicas ou mesmo do escorregamento de discordâncias. O segundo caso sugere que instabilidades plásticas em cisalhamento podem surgir por um processo cooperativo entre a deformação aplicada e o aquecimento adiabático. Este é o principal modelo explicativo do surgimento das chamadas "bandas de cisalhamento" (*shear bands*) em diversas classes de materiais, como será discutido posteriormente.

A seguir discutiremos algumas formas particulares de instabilidades plásticas por cisalhamento observadas em materiais metálicos e poliméricos.

## 4.3.4 Empescoçamento em polímeros

A Figura 4.6 representa esquematicamente a curva tensão - deformação de um polímero dúctil (caso geral dos termoplásticos acima da temperatura de transição vítrea).



Figura 4.6: Representação gráfica esquemática da curva  $\sigma \times \varepsilon$  de um polímero semi-cristalino que desenvolve pescoço após o escoamento.

Definimos neste caso os seguintes parâmetros de engenharia:

- $\sigma_e$  = limite de escoamento ("yield stress")
- $\sigma_d$  = tensão de estiramento ("drawing stress")

O máximo da curva em  $\sigma_e$  está associado ao surgimento de uma instabilidade plástica conhecida como **empescoçamento** ("necking"), que se propaga ao longo de todo o comprimento do corpo enquanto a tensão permanecer constante (Fig. 4.7).



Figura 4.7: Representação gráfica esquemática do desenvolvimento do pescoço em um corpo de prova polimérico de tração de material que apresenta escoamento descontínuo.

Em polímeros semi-cristalinos o empescoçamento está associado à destruição dos esferulitos e ao alinhamento progressivo das cadeias poliméricas ao longo do eixo de tração, entretanto a existência de cristalinidade não é condição necessária para a ocorrência do empescoçamento. O mais correto é dizer que durante o desenvolvimento do pescoço a fração de cadeias alinhadas na direção do eixo de carregamento aumenta.

Mais adiante iremos tratar mais detalhadamento o comportamento mecânico intrínseco dos polímeros, no momento basta considerarmos que o escoamento plástico dos polímeros está associado a uma transição das macromoléculas de um estado de baixa energia, em que o deslizamento relativo é dificultado, para um estado de alta energia onde o deslizamento relativo é facilitado. Evidentemente a resistência mecânica do estado de baixa energia deve ser maior que a do estado de alta energia. Assim, ao contrário dos metais<sup>3</sup>, o escoamento de polímeros é seguido de uma redução da tensão real atuante na seção que está sofrendo a deformação (um fenômeno conhecido como amolescimento por deformação ou *strain softening*). No contexto do discutido na seção anterior, portanto,  $\tau_0$  passa por um máximo antes do início do escoamento. É possível

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Onde a tensão real sempre aumenta, mesmo após o desenvolvimento da estricção

demonstrar que uma maior propensidade ao amolescimento leva a uma maior localização da deformação, o que resulta numa dificuldade maior ao desenvolvimento do pescoço. Assim, por exemplo, o poliestireno, PS, e o poli(metacrilato de metila), PMMA, apresentam comportamentos distintos em tração, com o primeiro rompendo com um baixo alongamento e sem a formação de um pescoço significativo, enquanto que o segundo pode apresentar um alongamento virtualmente infinito com um desenvolvimento significativo de pescoço. Experimentalmente o PS apresenta amolescimento por deformação mais intenso que o PMMA.

Ao contrário da estricção, o empescoçamento não leva necessáriamente à ruptura do corpo, mas sim a um aumento da sua resistência, o que leva a um processo industrial conhecido como **estiramento a frio** e que tem por objetivo aumentar a resistência de polímeros na forma de fios ou filmes (neste último caso é possível deformar o material em tração biaxial, levando ao estiramento em duas direções e consequentemente a um aumento de resistência isotrópico no plano do filme).

### 4.3.5 Escoamento descontínuo em aços carbono

A Figura 4.8 apresenta uma curva tensão - deformação esquemática típica de aços doces, onde  $\sigma_e^+$  e  $\sigma_e^-$  representam os limites de escoamento máximo e mínimo, respectivamente e  $\varepsilon_e$ representa a deformação correspondente ao escoamento descontínuo.

Apesar de o limite de escoamento mínimo ter sido representado nesta Figura como um patamar constante, ele tem, na realidade uma aspecto serrilhado, contendo potencialmente muitos máximos e mínimos locais. Cada ponto de máximo corresponde à propagação ao longo do corpo de uma instabilidade de deformação por cisalhamento conhecida como **Banda de** Lüders, que corresponde a um degrau na superfície do corpo (deletério na estampagem) orientado a 45º do eixo de tração.

O escoamento descontínuo em aços doces está associado a um mecanismo de bloqueio das discordâncias por "atmosferas" de átomos de carbono: quando as discordâncias se libertam (no ponto de máximo local) elas escorregam com pouca resistência no reticulado, provocando uma queda na carga.

O limite de escoamento máximo em aços que apresentam escoamento descontínuo é muito dependente da geometria do corpo e da rigidez do sistema máquina + corpo, portanto a quantidade relevante na engenharia é o limite de escoamento mínimo.

Se o material for incicialmente deformado além de  $\varepsilon_e$  (por exemplo, por um passe de laminação a frio de cerca de 5% de redução) ele passará a se comportar como um material



Figura 4.8: Curva  $\sigma \times \varepsilon$  esquemática de um aço doce típico.

metálico convencional. Na prática industrial isto define um processo designado por "skin pass" e é empregado em chapas de aço para estampagem. Como a difusividade do carbono na ferrita é muito elevada mesmo à temperatura ambiente os efeitos do "skin pass" desaparecem se o aço for armazenado por muito tempo antes do uso.

## 4.3.6 Escoamento serrilhado

Outros fenômenos podem levar ao surgimento de máximos na curva tensão - deformação, entre eles podemos citar o escoamento serrilhado. Este fenômeno está associado a mecanismos termicamente ativados de bloqueio de discordâncias, como no caso do chamado "efeito Portevin - LeChatelier" (ocasionado pelo bloqueio de discordâncias por átomos de soluto ou por lacunas).

A Figura 4.9 apresenta um modelo explicativo do efeito "Portevin - LeChatelier" (PLC). Segundo este modelo, materiais que apresentam PLC possuem uma dependência atípica da tensão de escoamento com a taxa de deformação. Materiais "convencionais" apresentam uma tensão de escoamento crescente com a taxa de deformação (isto é, m > 0). Materiais que apresentam PLC possuem uma região no domínio das taxas de deformação onde a tensão de escoamento é decrescente (isto é, com m < 0). Esta região, obviamente é propensao ao surgimento de uma instabilidade plástica por cisalhamento, como discutido na seção 4.3.3, já que a resistência plástica dos materiais (representada na Figura ??) passa por dois pontos onde *m* se anula. A instabilidade de deformação que se forma permite aumentar dramaticamente a taxa de deformação passando para o ramo de alta velocidade da curva da resistência plástica (região 1). O desenvolvimento desta instabilidade, entretanto, permite relaxar parcialmente a tensão, que decresce ao longo da curva 2. Novamente o material encontra-se na região de instabilidade e desta vez iria requerer um aumento da tensão aplicada para continuação da deformação plástica, entretanto a taxa de deformação local é muito alta para continuação da deformação plástica no ramo de alta velocidade da curva. A propagação da instabilidade de deformação cessa (região 3) e o material passa ao estado de deformação homogênea, correspondente ao ramo de baixa taxa de deformação, o que permite um novo incremento da tensão (ao longo da curva 4) e o ciclo recomeça.



Figura 4.9: Modelo explicativo do efeito Portevin - LeChatelier (PLC)

A conexão do efeito PLC com o travamento de discordâncias por solutos está no surgimento da região de tensões decrescentes com a taxa de deformação. De fato, o ramo de baixa velocidade corresponderia ao estado em que as discordâncias encontram-se associadas a solutos. A deformação plástica, portanto, tem que ocorrer a um taxa compatível com a difusividade do soluto, que deve acompanhar a discordância. Se a discordância se dissociar dos solutos, ela poderá, entretanto, escorregar a uma taxa muito mais alta, pois a restrição à sua movimentação desaparece. Desta forma surge o ramo de alta velocidade da curva. Este modelo permite tirar algumas conclusões a respeito do do efeito PLC:

- O efeito PLC requer que a taxa de deformação do ensaio seja compatível com a difusividade do soluto responsável pelo travamento das discordâncias. Isto requer, portanto, temperaturas relativamente altas se o soluto for substitucional e deixa de ser observado em temperaturas mais altas ainda, já que neste caso a discordância nunca se dissociará de sua atmosfera de solutos.
- O escoamento descontínuo observado em aços de baixo carbono (discutido na seção ??) é um caso particular de efeito PLC, onde o soluto é o carbono (que possui muito alta difusividade na ferrita à temperatura ambiente).
- A observação do efeito PLC dependerá da rigidez da máquina de ensaios, já que em uma máquina pouco rígida estas variações de taxa de deformação poderão ser mascaradas pela resposta de deformação da máquina.

**Exercício 4.3** Suponha que um dado material tem seu comportamento mecânico descrito pela relação constitutiva de Zerilli-Armstrong:

$$\sigma = \sigma_0 + C_1 \exp\left[-\left(C_3 - C_4 \ln \dot{\varepsilon}\right)T\right] + K\varepsilon^n + kd^{-\frac{1}{2}}$$
(4.39)

Onde  $\sigma_0$ ,  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ , K e k são constantes positivas e d representa o tamanho de grão medido em  $\mu$ m. Agora responda:

- a. Identifique na expressão 4.39 o parâmetro (ou combinação de parâmetros) correspondente ao coeficiente de sensibilidade à taxa de deformação (*m*).
- b. Deduza a condição necessária para a formação de estricção neste material.
- c. Suponha que a constante  $C_4$  seja negativa, discuta qual seria o impacto sobre o comportamento mecânico do material.

#### Solução

1. Por definição, o coeficiente m é dado pela relação:

$$\sigma \propto \dot{\varepsilon}^m \tag{4.40}$$

Analisando a equação 4.39 vemos que podemos fatorar o segundo termo do lado direito da equação como:

$$\sigma \propto \exp(-C_3 T) \times \exp(+C_4 T \ln \dot{\varepsilon}) \tag{4.41}$$

#### 4.4 Efeito Bauschinger



Figura 4.10: Representação esquemática do resultado de ensaios de tração, seguido de compressão, em material que apresenta efeito Bauschinger pronunciado.

comparando as Equações 4.40 e 4.41 vemos que  $m = C_4T$ .

2. Partindo do Ansatz da Equação 4.14 escrevemos:

$$\mathrm{d}F_1 = s_1\mathrm{d}\sigma + \sigma\mathrm{d}s_1 = \tag{4.42}$$

# 4.4 Efeito Bauschinger

Até o momento discutiu-se a deformação dos componentes em tração. Para deformação em compressão os efeitos são semelhantes e pode-se assumir que a curva tensão - deformação (real) é idêntica em tração e em compressão.

Quando o material é deformado primeiramente em tração e **em seguida** em compressão, entretanto, surge em certos materiais o chamado **efeito Bauschinger**, como esquematizado na Figura 4.10.

- Materiais que apresentam efeito Bauschinger pronunciado são ditos materiais plásticos anisotrópicos
- O efeito Bauschinger está associado ao surgimento de heterogeneidades de deformação no interior do material durante o primeiro ciclo de tração.

# 4.4 Efeito Bauschinger

O efeito Bauschinger tem um papel preponderante na Fadiga de Baixo Ciclo, como será descrito mais adiante.

# 5 PLASTICIDADE EM SOLICITAÇÕES MULTIAXIAIS: CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO E DE FALHA

Quando um sólido é sujeito a uma tensão normal ao longo do eixo  $x_1$ , a condição para escoamento plástico pode ser expressa por:

$$\sigma_{11} \ge \sigma_e \tag{5.1}$$

onde  $\sigma_e$  é o limite de escoamento do material como determinado em um ensaio de tração ou de compressão uniaxial. O que acontece, entretanto, para um estado de tensão mais complexo?

# 5.1 Tensão equivalente

# Baseado em F. A. McKilntock e A. S. Argon "Mechanical Behavior of Materials" Addisson-Wesley, 1966.

A tendência do material escoar plasticamente em um estado de tensões multiaxial será dada por uma função escalar do tensor de tensões denominada "tensão equivalente",  $\overline{\sigma}$ , e a condição será expressa por:

$$\overline{\sigma} \ge \sigma_e \tag{5.2}$$

No momento não é possível derivar uma expressão rigorosa para a tensão equivalente em termos da ativação dos modos de deformação efetivamente observados no material (para o caso de policristais, tal busca é uma linha de pesquisa muito ativa). Na prática da mecânica dos materiais utilizam-se critérios empíricos, denominados **critérios de escoamento**.

# 5.1.1 Critério de von Mises

No início do século XX, von Mises, Huber e Hencky propuseram de forma independente um critério de escoamento que pode ser expresso por meio da seguinte tensão equivalente:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)^2 + (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_3)^2 + (\boldsymbol{\sigma}_3 - \boldsymbol{\sigma}_1)^2 \right]}$$
(5.3)

Este critério, conhecido hoje em dia como **critério de von Mises**, admite três interpretações físicas, uma das quais veremos em detalhe a seguir. Antes, entretanto, precisamos introduzir alguns conceitos novos sobre tensores em geral e sobre o tensor de tensão em particular.

#### Energia elástica

Podemos calcular a energia elástica de um estado de tensão triaxial através da sua definição:

$$U_{el} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i} \sigma_{i} \varepsilon_{i}$$
  
$$= \sum_{i} \left[ \frac{(\sigma_{i})^{2}}{2E} - \sum_{j \neq i} \frac{v \sigma_{i} \sigma_{j}}{E} \right]$$
(5.4)

onde usamos aqui o fato de que o tensor pode ser diagonalizado, sendo  $\sigma_i$  e  $\varepsilon_i$  as tensões e deformações principais.

É possível demonstrar, usando a teoria matemática dos tensores, que certas combinações dos elementos de um tensor não se alteram quando o referencial é rodado (estas quantidades são, portanto, escalares). Estas combinações são chamadas de **invariantes do tensor**. Como a energia, por si só, é um escalar, ela deve, de alguma forma, estar relacionada aos invariantes do tensor de tensão.

O primeiro invariante de um tensor de segunda ordem é chamado de **traço** do tensor e corresponde à soma dos seus elementos diagonais:

$$I_1 = \mathrm{Tr}|\sigma_{ij}| \equiv \sum_i \sigma_{ii} \tag{5.5}$$

O segundo invariante corresponde à soma dos menores principais do tensor (os menores principais são os determinantes das três matrizes  $2 \times 2$  que são obtidas quando eliminamos a linha e a coluna correspondente a cada um dos elementos diagonais):

#### 5.1 Tensão equivalente

$$I_{2} = \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$
(5.6)

Usando os dois primeiros invariantes do tensor de tensão podemos escrever a energia elástica como:

$$U_{el} = \frac{1}{2E} \left[ (I_1)^2 - 2I_2 (1+\nu) \right]$$
(5.7)

Porém, lembramos duas constantes que definimos anteriormente: o módulo de volume  $B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  (sec. 2.2.2)e o módulo de cisalhamento,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  (2.1.2) e reescrevemos a expressão acima como:

$$U_{el} = \frac{(I_1)^2}{18B} + \frac{1}{6G} \left[ (I_1)^2 - 3I_2 \right]$$
(5.8)

Definimos agora a tensão média hidrostática,  $\sigma_m \equiv -P$  como:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \tag{5.9}$$

Temos, portanto que o primeiro termo de  $U_{el}$  pode ser escrito como:

$$U_P = \frac{P^2}{2B} \tag{5.10}$$

Este termo, por sua vez pode ser reescrito lembrando uma relação fundamental da termodinâmica, como:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = -V \Rightarrow U_P = -PV \tag{5.11}$$

A energia elástica pode ser, portanto, decomposta em duas parcelas:

 uma componente "hidrostática", correspondendo às forças que levam à variação do volume do corpo durante a deformação

$$U_P = -PV \tag{5.12}$$

• e uma componente chamada "reduzida", que contém toda a informação sobre as forças que levam à mudança de forma do corpo durante a deformação elástica.

$$U_D = \frac{1}{6G} \left[ (\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 \right]$$
(5.13)

#### 5.1 Tensão equivalente

A componente reduzida pode ser reescrita como:

$$U_D = \frac{1}{12G} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$
(5.14)

Calculando para o caso do escoamento em um estado de tensão uniaxial ( $\sigma_1 = \sigma_e, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) teremos que:

$$U_D = \frac{(\sigma_e)^2}{6G} \tag{5.15}$$

ou seja,

$$U_D|_{uni} \le U_D|_{tri} \Rightarrow \sigma_e \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
(5.16)

Portanto o critério de von Mises equivale a dizer que a energia reduzida no estado de tensão triaxial deve ser maior ou igual que aquela correspondente ao escoamento em um estado uniaxial de tensão.

A justificativa para o uso da energia reduzida como critério para o escoamento vem da observação experimental de que tensões hidrostáticas não são capazes de produzir deformação plástica em meios sólidos. Meyers & Chawla em "Princípios de metalurgia mecânica" mencionam um pequeno experimento envolvendo crustáceos que demonstra isto por absurdo.

# 5.1.2 Critério de Treska

Um critério mais simples que o de von Mises havia sido proposto por Treska em 1864. Este se baseia na premissa de que os materiais escoam devido a tensões de cisalhamento. Desta forma Treska propôs que o escoamento plástico em um estado triaxial de tensões se iniciaria quando a máxima tensão de cisalhamento atingisse o valor correspondente ao observado no caso uniaxial (Fig. 5.1).

$$\left|\frac{\sigma_{e}}{2}\right| \leq \left|\frac{\sigma_{1} - \sigma_{3}}{2}\right| \Rightarrow \left|\sigma_{e}\right| \leq \left|\sigma_{1} - \sigma_{3}\right| \equiv \overline{\sigma}$$
(5.17)

# 5.1.3 Representação gráfica dos critérios de escoamento

Os critérios de escoamento admitem uma representação gráfica particularmente didática. Para tanto, consideramos a aplicação do critério de von Mises ao EPT (para simplificar, adota-



Figura 5.1: Representação da equivalência de estados de tensão segundo o critério de Treska. remos  $\sigma_2 = 0$ ):

$$(\sigma_e)^2 \le \frac{1}{2} \left[ (\sigma_1)^2 - 2\sigma_1 \sigma_3 + (\sigma_3)^2 \right]$$
 (5.18)

Quando vale o sinal da igualdade esta expressão irá representar, portanto, uma elipse no plano  $\sigma_1 \times \sigma_3$ .

O critério de Treska, por sua vez, irá resultar em um polígono inserido nesta elipse (veja a Fig. 5.2).



Figura 5.2: Representação gráfica dos critérios de escoamento de Treska e von Mises para o EPT.

Pela análise da Fig. 5.2 tiramos algumas conclusões com respeito aos dois critérios:

• Os dois critérios são equivalentes em alguns pontos e prevêem tensões de escoamento

#### 5.1 Tensão equivalente

muito semelhantes.

• O critério de Treska prevê tensões equivalentes menores ou iguais ao previsto pelo critério de von Mises (ou seja, Treska é mais conservador).

Para o caso geral (ou seja, não no EPT) também é possível fazer uma representação tridimensional dos critérios na forma de um tubo oblíquo de seção circular com eixo ao longo da diagonal do primeiro octante (von Mises), contendo um prisma hexagonal em seu interior (Treska). Esta representação, entretanto, não será vista aqui.

### Encruamento isotrópico

É possível demonstrar (ver McClintock e Argon) que o aumento da tensão de escoamento em materiais isotrópicos previamente encruados tem o efeito formal de expandir a elipse de von Mises, como reproduzido na Figura 5.3.



Figura 5.3: Representação gráfica do encruamento em um material plástico isotrópico.

#### Anisotropia plástica

No caso de materiais plásticos anisotrópicos, a elipse, além de se expandir pode sofre uma translação. O caso limite em que a elipse apenas translada (sem se expandir) é chamado "encruamento cinemático" (Fig. 5.4):

#### 5.1 Tensão equivalente



Figura 5.4: Representação gráfica do encruamento cinemático em um material plástico anisotrópico.

#### Exercício 5.1

Demonstre que um material que sofre encruamento cinemático também apresenta efeito Bauschinger (vide 4.4).

#### Solução

Consideremos a Figura 5.4. Vemos que a situação onde  $\sigma_3 \equiv 0$  corresponde a um carregamento uniaxial puro. Sob a ação de um carregamento em tração, portanto, teríamos a elipse cheia se movendo para a posilção da elipse ponto-tracejada. Invertendo-se agora o sentido da deformação, vemos que o material irá se deformar no nível de tensão determinado pela elipse ponto-tracejada, que é muito menor que o esperado para a situação inicial e mais ainda em relação ao novo limite de escoamento em tração, o que define o efeito Bauschinger.

#### Critério de escoamento para materiais ortotrópicos

McClintock e Argon sugerem a seguinte tensão equivalente para o caso de materiais ortotrópicos:

$$\overline{\sigma} = \left\{ \frac{1}{H+G} \left[ (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \right] + L(\sigma_{23})^2 + M(\sigma_{31})^2 + N(\sigma_{12})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$
(5.19)

Estes autores, entretanto, advertem que, até 1966, apenas em poucos casos as cinco constantes haviam sido determinadas.

# 5.2 Teoria da deformação elasto-plástica em deformações finitas

O formalismo empregado até aqui para descrever tensões e deformações é conveniente para os casos em que a deformação é infinitesimal. Nestas condições as equações podem ser linearizadas e o princípio de superposição pode ser aplicado. Na prática isto significaria que a deformação total de um corpo ( $\varepsilon$ ) pode ser dividida em uma parcela elástica ( $\varepsilon_{el}$ ) e uma parcela plástica ( $\varepsilon_{pl}$ ):

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} \tag{5.20}$$

Quando as deformações pláticas são grandes, entretanto, surgem problemas neste tipo de decomposição. Neste caso a prória definição do tensor de deformação introduz não linearidades nas equações e a decomposição apresentada na equação 5.20 torna-se impraticável, senão impossível. Em certas condições é possível estabelecer hipóteses simplificadoras e continuar usando as deformações e tensões até aqui introduzidas. Podemos, por exemplo, assumir que as deformações elásticas são nulas e que o sólido não encrua após o escoamento. Este caso limite, chamado de **material idealmente plástico**, é comumente empregado na mecânica dos materiais. O que devemos fazer, entretanto, quando as deformações elásticas não são desprezíveis? E quando o encruamento existe? Para estes casos (incluindo o importante exemplo dos polímeros) surge a necessidade de se usar um formalismo alternativo, chamado de **teoria das deformações finitas** (*finite strain theory*). O referência a respeito deste assunto que será seguida aqui é o artigo do Prof. E. H. Lee da Universidade de Stanford ("Elastic-plastic deformation at finite strain" *Trans. ASME: J. Appl. Mech.*, **36** (1969) 1 – 6). A teoria, entretanto, é consideravelmente mais antiga e pode ser encontrada, por exemplo no livro de Hill.

Lee inicia sua discussão introduzindo a cinemática do problema da deformação de um sólido elasto-plástico. Consideremos a situação representada na Figura 5.5. A deformação do elemento de volume  $\mathbf{x}^1$  sob ação de uma força para  $\mathbf{x}_3$  é dada pela transformação (não mais afim) A. Postulamos entretanto que a deformação total pode ser decomposta em uma parcela elástica  $\mathbf{A}^e$  (que leva do estado intermediário  $\mathbf{x}^2$  ao estado final  $\mathbf{x}^3$ ) e uma parcela plástica  $\mathbf{A}^p$ (que leva do estado inicial  $\mathbf{x}^1$  a  $\mathbf{x}^2$ ).

Assumindo agora que a temperatura permanece constante e que as superfícies são livres de tração<sup>1</sup>, podemos escrever a transformação  $\mathbf{A}$  como:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Estas restrições, evidentemente, pode ser facilmente levantadas introduzindo-se as outras derivadas parciais na equação 5.21.


Figura 5.5: Representação esquemática da deformação de um elemento de volume de um corpo elasto-plástico, decomposta em uma parcela elástica e outra plástica.

$$A_{ij} = \frac{\partial x_i^3}{\partial x_j^1} \tag{5.21}$$

Da mesma forma,  $\mathbf{A}^e$  e  $\mathbf{A}^p$  são dadas por:

$$A_{ij}^e = \frac{\partial x_i^3}{\partial x_j^2} \tag{5.22}$$

e

$$A_{ij}^{p} = \frac{\partial x_{i}^{2}}{\partial x_{j}^{1}}$$
(5.23)

Pela regra da cadeia teremos então:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^p \mathbf{A}^e \tag{5.24}$$

Esta relação substitui a Equação 5.20 e é válida para qualquer tipo de deformação.

A seguir Lee deduz a expressão da taxa de acréscimo de trabalho  $\dot{W}$  dispendido<sup>2</sup> no pro-

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Como Lee ressalta, este é o trabalho envolvido no movimento do ponto material de  $x^1$  para  $x^3$  subtraído da

cesso de deformação de  $\mathbf{x}^1$  para  $\mathbf{x}^3$ :

$$\dot{W} = \int_{V^3} \sum_{ij} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i^3}{\partial x_j^3} dV^3$$
(5.25)

onde  $v^3$ e é a velocidade do ponto na configuração  $x^3$  e  $V^3$  é o volume do sólido nesta configuração. Introduzindo a seguinte notação para o tensor de tensão:

$$\mathbf{T} \Rightarrow \left| T_{ij} \right| = \left| \sigma_{ij} \right| \tag{5.26}$$

e considerando que:

$$\frac{\partial v_i^3}{\partial x_j^3} = \sum_k \frac{\partial v_i^3}{\partial x_k^1} \frac{\partial x_k^1}{\partial x_j^3} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L}$$
(5.27)

Introduzimos também uma mudança de variáveis para integrar sobre o volume da configuração  $\mathbf{x}^1$ , ou seja,  $V^1$ , obtendo:

$$\dot{W} = \int_{V^1} \operatorname{tr}(\mathbf{TL}) \operatorname{det}(\mathbf{A}) \mathrm{d}V^1$$
(5.28)

onde tr(...) e det(...) representam os operadores de tomada do traço e do determinante das matrizes contidas nos argumentos. Nota-se que detA é o Jacobiano da transformação de variáveis na integral de volume.

Usando agora a Equação 5.24 para substituir **A** na Equação 5.28 e desenvolvendo a diferencial do produto das matrizes obtemos:

$$\dot{W} = \int_{V^1} \operatorname{tr} \left[ \mathbf{T} \left( \dot{\mathbf{A}}^e \mathbf{A}^p + \mathbf{A}^e \dot{\mathbf{A}}^p \right) \mathbf{A}^{p-1} \mathbf{A}^{e-1} \right] \det \mathbf{A}^e \det \mathbf{A}^p \mathrm{d}V^1$$
(5.29)

Entretanto sabe-se que na deformação plástica o volume é constante, isto implica em det  $A^p =$ 1. A Equação 5.29 pode ser então reescrita como:

$$\dot{W} = \dot{W}^e + \dot{W}^p \tag{5.30}$$

onde

$$\dot{W}^{e} = \int_{V^{1}} \operatorname{tr} \left[ \mathbf{T} \dot{\mathbf{A}}^{e} \mathbf{A}^{e-1} \right] \det \mathbf{A}^{e} \mathrm{d}V^{1}$$
(5.31a)

parcela devida ao incremento da energia cinética.

e

$$\dot{W}^{p} = \int_{V^{1}} \operatorname{tr} \left[ \mathbf{T} \mathbf{A}^{e} \dot{\mathbf{A}}^{p} \mathbf{A}^{p-1} \mathbf{A}^{e-1} \right] \det \mathbf{A}^{e} \mathrm{d}V^{1}$$
(5.31b)

**Exercício 5.2** Escreva os tensores de forma explícita e represente a identidade entre as equações 5.25 e 5.30. A seguir escreva os elementos das matrizes correpondentes aos tensores definidos nas equações 5.31a e 5.31b.

Como Lee ressalta, é muito tentador interpretar estas duas quantidades como a taxa de armazenamento de trabalho elástico e plástico respectivamente. Ele faz a ressalva, entretanto, que no caso elasto-plástico a configuração obtida após o dascarregamento (ou seja,  $\mathbf{x}^2$ ) está sendo continuamente deformada, não correspondendo, portanto à configuração original como no caso puramente elástico. Isto implica que parte do trabalho plástico pode ser computado na parcela  $\dot{W}^e$ . Caso as propriedades elásticas do sólido não se alterem com a deformação plástica, entretanto, a identificação pode ser feita sem problemas.

Retornando agora à parcela plástica, podemos assumir sem perda de generalidade que o integrando na equação 5.31b correponde à taxa de armazenamento de energia plástica por unidade de volume não deformado:

$$\dot{w}^{e} = \operatorname{tr}\left(\mathbf{T}\mathbf{A}^{e}\dot{\mathbf{A}}^{p}\mathbf{A}^{p-1}\mathbf{A}^{e-1}\right)\operatorname{det}\mathbf{A}^{e}$$
(5.32a)

A equação acima mostra, aparentemente, que as deformações plástica e elástica estão acopladas na determinação da taxa de armazenamento do trabalho plástico. Lee, entretanto, argumenta que este acoplamento pode ser eliminado se a rotação relativa a  $\mathbf{x}^1$  embutida em  $\mathbf{x}^2$  for eliminada do problema. Definindo-se a nova configuração  $\bar{\mathbf{x}}^2$  a partir de um referencial solidário com respeito à esta rotação, Lee mostra que a Equação 5.32a pode ser reescrita como:

$$\dot{w}^{p} = \left[\mathbf{T}\dot{\mathbf{A}}^{p}\left(\bar{\mathbf{A}}^{p}\right)^{-1}\right]\det\bar{\mathbf{A}}^{e}$$
(5.32b)

Finalmente, expandindo-se os elementos dos tensores obtemos:

$$\dot{w}^e = \sum_{ij} \sigma_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j^2} \det \bar{\mathbf{A}}^e$$
(5.32c)

O segundo termo do produto representa a velocidade de deformação plástica na configuração  $\bar{x}^2$ , mas, como usual na deformação plastica, o divergente desta velocidade deve se anular. Desta

forma ela não contribui para o traço e o critério de escoamento pode ser escrito na forma:

$$\overline{\sigma}\left[\mathbf{T}\left(\det\mathbf{A}^{e}\right)\right] = \sigma_{e} \tag{5.33}$$

Onde  $\overline{\sigma}$  corresponde à função tensão equivalente, discutida anteriormente e que pode ser representada pela função de von Mises ou de Treska ou qualquer outra similar.

A seguir definimos o tensor **Q** tal que:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} \left( \det \bar{\mathbf{F}}^e \right) \tag{5.34}$$

e reescrevemos o critério de escoamento como:

$$\overline{\sigma}(\mathbf{Q}) - \sigma_e(\phi, T) \le 0 \tag{5.35}$$

onde  $\phi$  representa o funcional:

$$\phi = \int_0^t \alpha(T) \dot{w}^p \mathrm{d}\tau \tag{5.36}$$

Este funcional representa a contribuição do encruamento no aumento do limite de escoamento e, portanto,  $\alpha(T)$  é uma função crescente da temperatura, que representa o aumento da mobilidade das discordâncias com a temperatura e consequentemente, permitindo portanto um maior incremento na densidade de discordâncias com menos gasto de trabalho plástico.

Na expressão 5.35 o sinal da igualdade representa de formação plástica e a inequalidade representa um estado elásico. Para a continuação da deformação plástica, a derivação desta expressão com o sinal de igualdade leva à seguinte equação diferencial:

$$\operatorname{tr}\left(\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial Q}\dot{Q}\right) - \frac{\partial\sigma_e}{\partial\phi}\dot{\phi} - \frac{\partial\sigma_e}{\partial T}\dot{T} = 0$$
(5.37)

A seguir Lee argumenta que o encruamento resulta sempre num incremento de limite de escoamento<sup>3</sup>, e portanto:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \phi} \dot{\phi} > 0 \tag{5.38}$$

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Isto a rigor não é correto quando surgem instabilidades plásticas, mas se nos restringirmos à deformação plástica homogênea, como certamente era o escopo do trabalho de Lee, a asserção vale.

e a continuação da deformação plástica estará associada a:

$$\operatorname{tr}\left(\frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}}\right) - \frac{\partial \sigma_e}{\partial T} \dot{T} > 0 \tag{5.39}$$

que corresponde à condição de carregamento para a continuação da deformação plástica. Notamos que no caso isotérmico ela se reduz a  $\dot{\overline{\sigma}} > 0$ .

A Seguir Lee introduz o tensor de velocidade de deformação plástica,  $\bar{\mathbf{D}}^p$ , definido como:

$$\bar{\mathbf{D}}^{p} = \frac{\left[\bar{\mathbf{L}}^{p} + \left(\bar{\mathbf{L}}^{p}\right)^{\mathrm{T}}\right]}{2} = \left(\frac{\partial \bar{v}_{i}}{\partial \bar{x}_{j}^{2}} + \frac{\partial \bar{v}_{j}}{\partial \bar{x}_{i}^{2}}\right) : \frac{\bar{\mathbf{L}}^{p}}{2} = \dot{\mathbf{A}}^{p} \left(\bar{\mathbf{A}}^{p}\right)^{-1}$$
(5.40)

onde o símbolo  $(...)^T$  representa a transposta do tensor no argumento.

Lee introduz então (usando 5.32b) o potencial plástico (veja R. Hill *Mathematical Theory of Plasticity*, Cap. 3, Oxford:Oxford University Press (1950)):

$$\bar{\mathbf{D}}^{p} = k \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \mathbf{Q}} \left[ \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}} \right) - \frac{\partial \sigma_{e}}{\partial T} \dot{T} \right]$$
(5.41)

onde k é dado por:

$$k = \left(\alpha n \overline{\sigma} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \phi}\right)^{-1} \tag{5.42}$$

sendo *n* a ordem de **T** em  $\overline{\sigma}$ .

O termo entre chaves na equação 5.41 representa a taxa de carregamento e, por conta do termo  $\frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \mathbf{Q}}$  temos que a taxa de deformação é normal à superfície de escoamento. Desta forma podemos empregar um princípio de máxima taxa de dissipação de energia plástica<sup>4</sup>, que por sua vez garante a unicidade da solução.

# 5.2.1 Termodinâmica da deformação elasto-plástica

Por fim, Lee argumenta que o tratamento apresentado permite a determinação da história de deformação exceto pela variação de temperatura. Para isto o acoplamento termomecânico deve ser introduzido no problema. Para tanto ele introduz a termodinâmica do processo de deformação plástica. Primeiramente ele argumenta que os fenômenos elásticos e plásticos

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Este é um princípio popular nas teorias convencionais da plasticidade e estabelece que o caminho tomado pelo processo de deformação plástica é o que permite a maior taxa de dissipação de energia por trabalho plástico.

são apenas fracamente acoplados e que as propriedades termoelásticas dependem fundamentalmente da estrutura cristalina básica, enquanto que o fluxo plástico depende da geração e migração de discordâncias, que pouco afetam a estrutura cristalina. Ele baseia então a termodinâmica em duas interações separadas, uma termoelasticidade reversível e o trabalho plástico irreversível.

### Termoelasticidade reversível

Lee introduz a energia livre de Helmholz,  $\psi(\mathbf{C}^e, T)$ , do problema termoelástico, onde  $\mathbf{C}^e = (\mathbf{A}^e)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^e$ , a partir da qual se obtém a tensão e a entropia (*S*<sup>*e*</sup>) do sistema:

$$\mathbf{T} = 2\rho_0 \mathbf{A}^e \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}^e} (\mathbf{A}^e)^{\mathrm{T}} (\det \mathbf{A}^e)^{-1}$$
(5.43)

e

$$S^e = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \tag{5.44}$$

Na expressão 5.43  $\rho_0$  representa a densidade inicial.

### Contribuição irreversível da plasticidade

Lee introduz um termo de eficiência ( $\gamma^p$ ) do trabalho plástico que fornece a quantidade de trabalho plástico que é convertida em calor no processo de deformação<sup>5</sup>, calculando a variação de energia interna do sistema como:

$$\rho_0 \dot{U}^e = \dot{w}^e + \gamma \dot{w}^p \tag{5.45a}$$

e

$$\rho_0 \dot{U}^p = (1 - \gamma) \dot{w}^p \tag{5.45b}$$

Sendo que a segunda parcela se refere à energia armazenada (na forma de discordâncias e outros defeitos cristalinos) no sistema por conta da deformação plástica.

A produção de entropia elástica resultante do trabalho plástico é dada por:

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Tipicamente  $\gamma$  varia entre 0,9 e 1,0 no decurso da deformação plástica.

$$T\rho_0 \dot{S}^e = \gamma \dot{w}^p \tag{5.46}$$

Por fim, Lee combina todas as contribuições desenvolvidas nesta seção e determina a história termo-elasto-plástica do sistema por meio das equações 5.43 (para a deformação elástica), 5.35 e 5.41 (para o fluxo plástico) e 5.44, 5.45a e 5.46 (para o acoplamento entre estas contribuições).

# 5.3 Critérios de falha

Os critérios de escoamento discutidos anteriormente, a rigor, só se aplicam a materiais metálicos dúcteis. Para materiais metálicos frágeis e cerâmicas, que se rompem antes de atingir o limite de escoamento, eles são substituídos pelos chamados critérios de falha. Trincas, como vimos anteriormente, são os defeitos internos do material que levam à fratura do sólido e elas se propagam sob a ação de **tensões normais**. Os critérios de falha, portanto, se referem a uma tensão normal máxima suportável pelo material (ao contrário dos critérios de escoamento, que se referem a uma tensão máxima de cisalhamento).

# 5.3.1 Critério de Rankine

O primeiro critério de falha tratado aqui é o chamado "critério de Rankine"<sup>6</sup>, onde a ruptura ocorreria quando a máxima tensão normal de tração superasse o limite de resistência obtido em um ensaio de tração uniaxial, ou seja:

$$\sigma_f \le |\sigma_1| \tag{5.47}$$

### Resistência de materiais frágeis

O critério de Rankine presume tacitamente que o limite de resistência em compressão é idêntico àquele observado em tração. Tal não ocorre na prática: experimentalmente se sabe que o limite de resistência em compressão de materiais frágeis é cerca de oito vezes maior que aquele observado em tração uniaxial. Os critérios de falha mais modernos procuram incorporar esta observação experimental.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>William John Macquorn Rankine (1820 - 1874), cientista escocês mais conhecido como um dos fundadores da termodinâmica, ao lado de Sadi Carnot e J. P. Joule. Seu tratado de mecânica dos materiais, entretanto, teve um impacto tão ou mais importante que os de seus estudos de termodinâmica.

## 5.3.2 Critério de Mohr-Coulomb

O primeiro critério aqui tratado, desenvolvido por Otto Mohr, baseia-se na construção da Fig. 5.6, que, no EPT pode ser expresso como representado na Figura 5.7.



Figura 5.6: Representação gráfica da equivalência de estados de tensão segundo o critério de Mohr-Coulomb.

## 5.3.3 Critério de Griffith

Em 1925 Griffith propôs um critério de falha baseado na concentração de tensão na ponta dos defeitos característicos do material. Como vimos anteriormente (Sec. 3.2.3), tensões de compressão resultam em tensões tangenciais de tração para defeitos orientados paralelamente ao eixo de aplicação da carga. Griffith considerou portanto uma distribuição aleatória de orientações de defeitos e calculou a tensão de ruptura, presumindo que cada defeito tivesse uma resistência intrínseca  $\sigma_f$ .

O critério de Griffith pode ser expresso matematicamente pela seguinte relação:

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_f(\sigma_1 + \sigma_3) = 0 & \text{se} \quad \sigma_1 + 2\sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 = \sigma_f & \text{se} \quad \sigma_1 + 2\sigma_3 \le 0 \end{cases}$$
(5.48)

A primeira condição representa uma parábola inclinada, com seu eixo ao longo da diagonal do primeiro quadrante.

Estas relações encontram-se representadas na Figura 5.8, novamente para o caso de um EPT.

• Na Fig. 5.8 a linha marcada como "trincas aleatórias" representa o esperado para o caso



Figura 5.7: Representação gráfica do critério de falha de Mohr-Coulomb para materiais frágeis no EPT.

em que as trincas são aleatoriamente distribuídas também ao longo dos planos  $x_1x_2$  e  $x_2x_3$ , nestes casos fatalmente a tensão de compressão aplicada irá resultar em tensões tangenciais de tração acima do valor crítico nestes defeitos.

- O critério de Griffith prevê que o limite de resistência em compressão é exatamente oito vezes maior que em tração, o que é compatível com a observação experimental.
- Como já havia ocorrido na comparação dos critérios de Treska e de von Mises, o critério de Mohr-Coulomb é mais conservador que o de Griffith.

# 5.3.4 Critério de McClintock - Walsh

McClintock e Walsh introduziram um refinamento no modelo de Griffith. Este que as faces da trinca nunca se tocam e desta forma são incapazes de comunicar tensões (tanto normais quanto tangenciais). Esta hipótese é razoável quando tensões de tração agem sobre a trinca, porém, sob o domínio de tensões de compressão este efeito não pode mais ser negligenciado. Os autores então introduziram uma componente de atrito entre as faces da trinca, proprocional



Figura 5.8: Representação gráfica do critério de falha de Griffith para materiais frágeis no EPT. A linha pontilhada representa a tensão de ruptura obtida assumindo que as trincas se encontram aleatóriamente distribuídas em todas as orientações do volume e não apenas no plano da placa, como na derivação original de Griffith.

a um coeficiente de atrito ( $\mu$ ) e à tensão normal atuando sobre a trinca. Com este resultado os autores forma capazes de obter uma melhor reprodutibilidade para resultados de mecânica de rochas, onde altas pressões de confinamento (ou seja, altas tensões médias de compressão) são comuns.

**Exercício 5.3** Considere a figura 5.9, que representa um tubo de raio exterior r = 25 mm e paredes finas de espessura t = 0,5 mm submetido a um torque *T*. Suponhamos que este tubo venha a ser feito:

- I de latão 70/30, com limite de escoamento  $\sigma_e = 115$  MPa, limite de resistência  $\sigma_u = 331$ MPa, módulo de rigidez E = 100,3 GPa e coeficiente de Poisson v = 0,35 ou
- II de alumina (99,8% densa), com limite de ruptura em tração  $\sigma_r = 205$  MPa, módulo de rigidez  $E \simeq 405$  GPa.

Com base nestas informações, responda:

a. Qual critério de falha (Treska, Rankine ou von Mises) você deve usar para cada um dos dois casos? Justifique (observe que no caso do tubo de cobre, este irá falhar quando sofrer

deformação plástica, já no caso do tubo de alumina, ele irá falhar quando se fraturar).

- b. Qual o máximo valor do torque que pode ser aplicado em cada tubo sem que ele falhe (de acordo com o critério que você escolheu no ítem anterior)?
- c. Qual a máxima deformação angular que o tubo de cobre suporta sem falhar?
- d. Para qual plano (ou em quais planos) você espera que apareçam trincas no tubo de alumina?

Observação: como o tubo tem paredes finas, assuma por simplicidade que o estado de tensões é uniforme ao longo da sua espessura.



Figura 5.9: Representação de um tubo de paredes finas submetido a um torque.

### Solução

Dados:

• Equação de Coulomb para a torção (r é o raio exterior e I é o momento de inércia do tubo):

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{I} \tag{5.49}$$

• Momento de inércia da seção transversal de um tubo de raio r com parede fina de espessura t:

$$I \approx 2\pi r^3 t \tag{5.50}$$

a. No tubo de latão podemos utilizar os critérios de Treska ou o de von Mises. O critério de Treska é mais conservador, portanto é mais adequado para a determinação de um torque máximo admissível. A aplicação do critério de Treska também é mais conveniente, já que o estado de tensão na parede do tubo será de cisalhamento puro (confira o exercício 1.6), portanto a tensão determinada já é a tensão máxima de cisalhamento. No caso do tubo de alumina, que é um material frágil, devemos usar o critério de Rankine, que, dos três, é o mais adequado.

# 5.4 Critérios de escoamento em polímeros

Ao contrário dos materiais cristalinos, os polímeros apresentam uma forte dependência de suas propriedades mecânicas na pressão hidrostática. Isto se deve à existência de **volume livre** na estrutura do polímero. Este efeito causa, entre outras coisas, uma anisotropia na resistência mecânica em solicitações de tração e de compressão (o limite de escoamento em compressão é cerca de 10 a 20 % maior que em tração).

Isto pode ser incorporado ao critério de escoamento de von Mises através da introdução de uma dependência do limite de escoamento na tensão hidrostática média, por exemplo:

$$\sigma_e = \sigma_e^0 + k\sigma_m \tag{5.51}$$

Da mesma forma, critérios foram estabelecidos para levar em conta a tendência do polímero se deformar por microfibrilamento ("crazing"), já que este mecanismo de deformação só ocorre sob a ação de tensões normais de tração. Um critério que tem este objetivo é:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = A + \frac{B}{\sigma_1 + \sigma_3} \tag{5.52}$$

A Fig. 5.10 apresenta a representação gráfica dos critérios que:

### a. consideram o efeito da pressão hidrostática e

b. consideram a competição entre bandas de cisalhamento e microfibrilamento no polímero.



Figura 5.10: Representação gráfica de alguns critérios de escoamento utilizados para polímeros.

# 5.5 Critério de escoamento em materiais metálicos amorfos

Em um artigo recente (Nature Materials, vol. 2, 449-452, 2003), C. A. Schuh e A. C. Lund propuseram o uso de um critério baseado no de Mohr-Coulomb para descrever o escoamento de vidros metálicos, que apresentam uma forte anisotropia plástica. O modelo destes autores é baseado em modelos atomísticos e foi testado por meio de simulações de dinâmica molecular.

# 5.6 Aplicação: estampabilidade de chapas

A teoria desenvolvida anteriormente é essencial para a compreensão da maior parte dos processos de conformação mecânica dos materiais. Devido à sua importância tecnológica, entretanto, a estampagem de chapas metálicas será discutida nesta aula. Não se trata de uma discussão aprofundada, entretanto. Apenas apresentaremos alguns conceitos importantes para esta indústria e que estão íntimamente relacionados à deformação plástica em estados triaxiais de tensão.

Estampagem é um processo de conformação de **chapas**, que são obtidas, por sua vez, por laminação. O processo de laminação freqüentemente introduz uma distribuição preferencial de orientações cristalinas ao longo da direção de laminação e/ou uma distribuição preferencial de planos cristalinos relativamente à normal da chapa. Estas distribuições preferências formam o que se conhece como **textura**. A textura, por sua vez, introduz anisotropia nas propriedades mecânicas da chapa. No caso da estampagem o que interessa é a anisotropia do comportamento plástico do material.

Uma série de parâmetros mecânicos são utilizados para definir a qualidade de uma chapa para fins de estampagem. Dentre os que já vimos temos o coeficiente de encruamento, n (que está ligado ao alongamento uniforme por meio da relação de Considère, lembra-se?): quanto maior n, maior será a estampabilidade da chapa.

### Coeficiente de anisotropia plástica

Outro parâmetro importante é obtido do ensaio de tração em um corpo de prova padronizado retirado da chapa, este parâmetro, conhecido como **coeficiente de anisotropia plástica**, *R*, definido como:

$$R = \frac{\varepsilon_w^r}{\varepsilon_t^r} \tag{5.53}$$

onde  $\varepsilon_w^r$  e  $\varepsilon_t^r$  são respectivamente a deformação real observada na largura e na espessura do corpo de prova, respectivamente. Este parâmetro, portanto, mede a resistência ao afinamento da chapa no processo de estampagem e quanto maior seu valor, maior será a probabilidade da chapa ser estampada com sucesso.

De acordo com informações do Prof. Ronald L. Plaut e do Dr Antenor Ferreira Filho (Brasmetal-Waelholz), a prática industrial de medida da *R* corresponde a:

I - aplicar uma deformação de cerca de 15% ao corpo de prova

II - medir o alongamento ao longo do comprimento  $(\varepsilon_l^r)$  e ao longo da largura  $(\varepsilon_w^r)$  e

III - calcular R usando a conservação do volume durante a deformação plástica.

Este procedimento tem uma precisão maior que aquele sugerido pela definição anterior.

O coeficiente de anisotropia plástica é medido para diversas orientações e uma série de parâmetros é calculada em função dos valores obtidos. Apenas para exemplificar, o valor de *R* médio em relação às orientações da chapa é definido como:

$$\overline{R} = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \tag{5.54}$$

onde o sub-escrito se refere ao ângulo relativo entre a direção do comprimento do corpo de prova e a direção de laminação da chapa.

## 5.6.1 Embutimento profundo, estiramento ...

Desde cedo ficou evidente para a indústria que os parâmetros de qualidade de chapas anteriormente discutidos são insuficientes para caracterizar seu desempenho durante o processo de estampagem. Este, normalmente, envolve a conformação de uma chapa de geometria simples (por exemplo, plana) para algo mais complexo (por exemplo, uma lata de refrigerante), desta forma a deformação local é muito heterogênea, diferindo ponto-a-ponto. Desta forma desenvolveramse ensaios de estampagem que procuram simular o processo de forma mais aproximada. Estes ensaios são divididos em duas classes:

- 1. ensaios de embutimento e
- 2. ensaios de estiramento.

Os ensaios de embutimento normalmente envolvem a deformação de uma chapa fixa em uma matriz por meio de um punção, até que esta se rompa.

- Ensaios de embutimento → a chapa pode deslizar lateralmente em relação à matriz, as deformações se aproximam de um cisalhamento puro com duas deformações principais de mesmo módulo, mas sinais invertidos, a espessura da chapa não se altera significativamente (exemplos, Swift e Fukui).
- Ensaios de estiramento → a chapa fica fixa em relação à matriz, as deformações se aproximam de tração biaxial, envolvendo portanto a redução da espessura da chapa (exemplos, Erichsen e Olsen).

# 5.6.2 Curva limite de conformação (CLC)

Os ensaios de embutimento e estiramento, por si só, não são capazes de modelar corretamente o processo de estampagem. Um avanço significativo, entretanto, foi obtido por Keeler e Backofen em 1963, que descobriram que o surgimento de estricção em um ensaio de estiramento está associado a valores críticos das duas deformações principais no plano da chapa. Goodwin estendeu o conceito para a região onde uma das deformações principais é negativa (ou seja, em direção aos ensaios de embutimento profundo) e os diagramas resultantes, que relacionam os valores da deformação principais críticas para o surgimento da instabilidade se chamam **curvas limite de conformação (CLC)** (em inglês "*Forming Limit Curves, FLC*").

A CLC é determinada em um ensaio de embutimento/estiramento proposto por Hecker em 1974. Neste ensaio imprime-se sobre a chapa por um processo serigráfico uma grade de círculos. Esta chapa é deformada por um punção hemisférico, porém as condições de deformação (dimensões da chapa, condições de lubrificação) são variadas, tal que elas resultem em diferentes combinações de deformações principais críticas, que são medidas na chapa deformada. Os pontos obtidos são, então, utilizados para a construção da CLC.

As deformações críticas da chapa são medidas no ponto onde surge a instabilidade e são definidas de acordo com a Figura 5.11.

- Deformação maior  $\rightarrow e_1$
- Deformação menor  $\rightarrow e_2$



Figura 5.11: Definição das deformações maiores e menores.

## 5.6.3 Análise de grade de círculos

O último ingrediente na análise do processo de estampagem é dado pela **análise de grade de círculos** ("*Circle Grid Analysis*"). Neste procedimento uma grade de círculos (como a do ensaio de Hecker) é impressa sobre a chapa, que é usada para a estampagem da peça que se deseja fabricar. Após isto as deformações maiores e as deformações menores são registradas em todas as posições da peça, o que permite identificar regiões críticas (ou seja, as que mais se aproximam da CLC do material). Com isto pode-se proceder a correções do projeto da matriz de estampagem ou alterações no material para evitar a ocorrência de perdas em produção.

Atualmente há uma linha de pesquisa muito importante que procura simular o processo de estampagem por cálculos numéricos pelo método de elementos finitos (o Prof. Ronald trabalha nesta linha de pesquisa no nosso departamento).

**Exercício 5.4** Z. Buchar, em um artigo publicado na revista *J. Mater. Proc. Tech.* vol. **60**(1996), pp. 205-208, descreve uma aplicação interessante das CLCs e da análise por grade de círculos (AGC). Segundo este autor, durante a estampagem de paineis de porta de um automóvel não identificado observava-se freqüentemente a incidência de rupturas em uma determinada região da mesma. Ele descreve a solução do problema, baseado na AGC combinada à CLC do aço em questão. Leia o artigo original e responda:

- a. Qual era a razão da alta incidência de rupturas na região da porta em questão?
- b. Qual foi a solução do problema dada pelo autor e qual a sua relação com a CLC do aço?

# 6 PLASTICIDADE E MECÂNICA DA FRATURA: NOÇÕES DE MECÂNICA DA FRATURA ELASTO-PLÁSTICA

# 6.1 Correção para plasticidade limitada

Como vimos anteriormente, Griffith havia proposto que, para um material idealmente frágil, a condição para a fratura instável seria dada por:

$$\sigma \ge \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \tag{6.1}$$

Esta equação lançou as bases teóricas que permitiram o desenvolvimento da mecânica da fratura a partir das idéias de Irwin e do conceito do Fator Intesificador de Tensões.

Orowan e Irwin propuseram independentemente, por volta de 1950, uma generalização deste conceito, capaz de estender as fronteiras da MFLE para materiais não tão frágeis, que apresentam uma certa plasticidade (limitada) antes da ruptura. A idéia de Irwin-Orowan se baseia na interpretação do termo  $\gamma$  da equação de Griffith como um trabalho que o sistema deve realizar sobre a trinca para estendê-la em um comprimento d*a*, desta forma os autores propuseram que  $\gamma$  fosse escrito como:

$$\gamma = \gamma_S + \gamma_P \tag{6.2}$$

onde  $\gamma_S$  é o termo de tensão superficial, idêntico ao proposto por Griffith, e  $\gamma_P$  seria um termo proporcional ao trabalho de deformação plástica por unidade de área de trinca.

A proposta de Irwin-Orowan, assim como a de Griffith, é mais importante para a compreensão do fenômeno que para cálculos efetivos: o novo termo,  $\gamma_P$  necessita ser estimado para cada caso particular e, mais importante que isto, nem mesmo constante ele será, pois deverá aumentar com o incremento em K (e conseqüentemente, com o tamanho da trinca e da tensão remota). O termo  $\gamma_P$  resulta, fundamentalmente, da energia dissipada devido à deformação plástica localizada, que aumenta seu raio de curvatura e leva, portanto, a uma menor concentração de tensão à sua frente. A plasticidade localizada serve portanto como uma blindagem do campo de tensão (ou seja, de G), que é a responsável pelo incremento de tenacidade em materiais que apresentam plasticidade (mesmo que limitada), frente aos materiais idealmente frágeis.

Um avanço considerável no problema da correção para plasticidade limitada foi dada por Irwin em 1958. Este autor partiu da argumentação que a singularidade em  $r^{-\frac{1}{2}}$  do estado de tensão à frente de uma trinca é um artefato do cálculo e que, eventualmente fenômenos como elasticidade não linear e plasticidade ocorrem, impedindo que a tensão atinja os valores infinitos de tensão, como calculados.

### Estimativa de Irwin para o tamanho da zona plástica

Considerando o caso da plasticidade, podemos assumir que, à frente da trinca e nas regiões onde o estado de tensão supera um certo critério de escoamento, formar-se-á um certo volume limitado de amostra que estará deformado plasticamente. A este volume limitado de amostra dá-se o nome de **zona plástica**.

Como discutido anteriormente, a existência da zona plástica blinda o campo de tensões na frente da trinca. O processo está esquematizado na Figura 6.1.





A zona plástica age como uma perturbação no campo de tensão da trinca, que pode ser

aproximado (fora da zona plástica, Fig. 6.2) pelo campo gerado por uma trinca virtual de tamanho efetivo  $a_{ef} = a + \frac{r_e}{2}$ .



Figura 6.2: Campo "efetivo" gerado por uma trinca de comprimento  $a_{ef} = a + r_e$ .

Uma estimativa para o tamanho da zona plástica pode ser obtida assumindo-se que ela tem a forma de um cilindro que tangencia a ponta da trinca. Sendo assim, o seu diâmetro será dado pelo ponto ao longo do eixo  $x_1$  em  $\theta = 0$  para o qual a tensão atinge o valor do limite de escoamento de acordo com a equação 3.58, ou seja:

$$r_e \sim \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K}{\sigma_e}\right)^2 \tag{6.3}$$

O resultado anterior, a rigor vale apenas para o EPT. Irwin também considerou o efeito da restrição plástica no EPD e obteve, para esta condição, a seguinte estimativa:

$$r_e \sim \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K}{\sigma_e}\right)^2$$
 (EPD) (6.4)

Assim, o procedimento de Irwin para realizar a correção para plasticidade limitada ("small scale yielding") corresponde a substituir *a* por  $a_{ef}$  nas equações para o campo elástico da trinca, utilizando-se as equações válidas para os materiais elásticos lineares.

É importante ressaltar, entretanto, que a geometria da zona plástica de forma alguma se assemelha a um cilindro. Usando-se as equações deduzidas anteriormente para o estado de tensão no modo I e assumindo que vale o critério de escoamento de von Mises podemos mostrar que a geometria da ZP no plano perpendicular à linha de terminação da trinca é dada por (Fig. 6.3):



Figura 6.3: Representação mais realista (baseada na análise de Irwin) para a forma da zona plástica em torno da ponta de uma trinca.

### Modelo de Dugdale - Barenblatt

A análise de Irwin, exposta nas páginas anteriores, permite o uso do ferramental da MFEL para materiais que apresentam plasticidade limitada. Ela é, entretanto, uma análise um tanto grosseira do problema. Para precisar melhor o resultado devemos considerar resultados mais rigorosos, como por exemplo, os obtidos por Dugdale (1960) ou Barenblatt (1962).

D. S. Dugdale<sup>1</sup>, por exemplo, investigou o desenvolvimento da zona plástica em chapas de aço (portanto, no EPT) em função do incremento de carregamento. Apesar de seu trabalho ser, hoje em dia, considerado principalmente pelo modelo lá desenvolvido, é importante ressaltar que este modelo foi validado contra resultados experimentais obtidos pelo próprio autor.

O autor inicia sua análise definindo as variáveis  $\sigma_e e \sigma$  como a tensão de escoamento da chapa em condições uniaxiais e a tensão homogênea aplicada à placa, perpendicularmente a um corte de comprimento  $2\ell$  Ou seja, trata-se da tensão remota, definida anteriormente). Sob a ação desta tensão homogênea, parte da placa próxima ao corte escoa plasticamente, conforme esquematizado na figura 6.4.

A seguir ele postula que esta trinca pode ser considerada equivalente a uma trinca hipotética de comprimento 2*a* carregada elasticamente com a tensão  $\sigma$  superposta a uma tensão de tração  $\sigma_e$  distribuída conforme esquematizado na Figura 6.5.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>D. S. Dugdale, Yielding of steel sheets containing slits, J. Mech. Phys. Solids 8 (1960) pp. 100 – 104.



Figura 6.4: Representação esquemática das variáveis envolvidas no modelo de Dugdale. Neste modelo uma zona plástica (haxurada na figura) de comprimento *s* se desenvolve nas proximidades de um corte de comprimento  $2\ell$  em uma placa fina sujeita a uma tensão uniforme  $\sigma$ .



Figura 6.5: Experimento de pensamento (*Gedankenexperiment*) proposto por Dugdale para resolver o problema da determinação do comprimento da zona plástica formado na borda de um corte em uma placa sujeita a uma tensão uniforme  $\sigma$ . Esta configuração seria o equivalente elástico do problema esquematizado na Figura 6.4.

A seguir ele usa um resultado de Mushkhelishvili [M] para a função tensão correspondente ao problema de um corte em uma placa restrito por uma tensão de fechamento em parte de sua superfície. Dugdale introduz as variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  de acordo com:

$$x = a \cosh \alpha \tag{6.6a}$$

e

$$\ell = a\cos\beta \tag{6.6b}$$

Dugdale então define a variável  $\sigma_{y=0}$  como a tensão atuante nos pontos y = 0 e a expressa na forma de um série de potências de  $\alpha$  tomando o termo dominante:

$$\sigma_{y=0} = -\frac{2\sigma_e\beta}{\pi\alpha} \tag{6.7}$$

A tensão análoga para a tensão  $\sigma_{y=0}$  em função da tensão externa é:

$$\sigma_{y=0} = \frac{\sigma}{\alpha} \tag{6.8}$$

As duas tensões são superpostas e aplica-se a condição de contorno para  $\alpha = 0$  (ou seja, para x = a) de que a tensão deve permanecer finita, o que obriga o coeficiente de  $\alpha^{-1}$  na expansão a se anular, consequentemente:

$$\sigma - \frac{2\sigma_e\beta}{\pi} = 0 \tag{6.9}$$

Usando a definição de  $\beta$  (Equação 6.6b) obtemos:

$$\frac{s}{a} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sigma}{\sigma_e}\right) \tag{6.10}$$

Dugdale então expande a Equação 6.10 em série de potências de  $\frac{\sigma}{\sigma_e}$ , em torno do valor  $\frac{\sigma}{\sigma_e} = 1$ , obtendo:

$$\frac{s}{a} \simeq 1 - \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_e}\right) \tag{6.11}$$

Por fim, ele invoca o princípio de Saint-Venant, advogando que a tensão no ponto x = a

não pode depender da exata distribuição de tensões ao longo do segmento  $-\ell \le x \le \ell$  quando  $\frac{\ell}{a}$  é pequeno e aproxima esta distribuição a uma tensão compressiva constante  $-\sigma_e$  atuando ao longo de todo o segmento  $-a \le x \le a$  superposta a uma tensão trativa central concentrada de valor  $2\ell\sigma_e$ . A resultante destas tensões está representada na Figura 6.5.

Quando  $\frac{\sigma}{\sigma_e}$  é muito pequeno, ou seja, em condições de plasticidade limitada, temos que  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sigma}{\sigma_e}\right) \simeq \left(\frac{\pi}{4}\frac{\sigma}{\sigma_e}\right)$  o que leva a:

$$r_e \simeq \frac{\pi}{8} \left(\frac{K}{\sigma_e}\right)^2 \tag{6.12}$$

onde assumimos explícitamente que  $r_e \equiv s$  e usamos a definição de  $K = \sigma \sqrt{\pi a}$ .

Este resultado, consideravelmente mais preciso é muito semelhante ao resultado de Irwin, já que  $\frac{\pi}{8} \sim \frac{1}{\pi}$ .

Lembramos novamente que o trabalho de Dugdale foi validado contra dados experimentais e que a concordância obtida entre estes resultados e o modelo é muito boa.

### Efeito da geometria sobre K<sub>c</sub>

Até o momento utilizamos o termo "plasticidade limitada" sem muita preocupação de definir o que isto quer dizer. Efetivamente podemos dizer que uma determinada condição de carregamento sobre a trinca satisfaz a hipótese de plasticidade limitada quando  $r_e$ , que é a dimensão característica da zona plástica, for muito menor que as demais dimensões lineares do sistema (Fig. 6.6), como por exemplo, o tamanho da trinca, *a*, a largura do sólido, *B* ou o tamanho do ligamento (L = W - a). Chamando qualquer uma destas dimensões lineares de *X*, por simplicidade, poderemos expressar a condição de validade por:

$$2.5\left(\frac{K_c}{\sigma_e}\right)^2 > X \tag{6.13}$$

A Figura 6.7 representa esquematicamente a variação de  $K_c$  com a espessura da placa para um material dúctil. Na figura é possível identificar dois limites:

- a . para espessuras tendendo a zero temos um incremento linear de  $K_c$  com a espessura, o que é característico de um estado plano de tensões e
- b. para espessuras muito grandes temos  $K_c$  tendendo a um valor constante ( $K_{Ic}$ ) que é característico de um estado plano de deformações EPD.



Figura 6.6: Definição das dimensões de um corpo de prova que devem ser comparadas com o tamanho previsto da zona plástica para garantir a validade de um ensaio de tenacidade à fratura em deformação plana.



Figura 6.7: Representação esquemática da variação de  $K_c$  com a espessura da amostra.

Analisando-se a Figura 6.7 vemos que o valor correspondente a  $K_{Ic}$  é o menor lá representado. Isto na verdade é um fato experimentalmente observado.  $K_{Ic}$  é o menor valor possível de  $K_c$ . Isto ressalta a importância de se medir a tenacidade à fratura em deformação plana mesmo para aplicações (ou seja, componentes) onde o estado plano de deformações não possa ser realizado: Cálculos usando  $K_{Ic}$  levam a uma estimativa conservadora da tensão permissível de trabalho.

Além disto, vemos que a estimativa de transição para o EPD dada pela Equação 6.13 é vastante conservadora. A transição começa bem antes e o valor estimado é sufuciente para garantir que um ensaio foi realizado sob a dominância do EPD.

Finalmente discutimos o que fazer no caso de materiais frágeis. Vemos que a tensão correspondente a  $\sigma_e$  é muito superior à tensão de ruptura observado em um ensaio de tração. Desta forma o critério da Equação 6.13 é observado mesmo para tamanhos diminutos de corpos de prova.

# 6.2 Aplicação: Ensaio de Tenacidade à fratura no EPD

Norma ASTM E1820-08a.

A definição de  $K_{Ic}$  segundo a norma é "A propriedade  $K_{Ic}$  determinada por este método de ensaio caracteriza a resistência do material à fratura em um ambiente neutro na presença de uma trinca com pequeno raio de curvatura na ponta sobre uma restrição severa em tração, tal que o estado de tensão na ponta da trinca se aproxima do EPD, e a zona plástica na ponta da trinca é pequena em relação às dimensões da amostra na direção da restrição."

O ensaio é caracterizado por uma particularidade. A validade sua validade somente pode ser determinada após a realização do mesmo o que leva a alto custo em termos monetários e em homem/hora. Além disto o ensaio requer a nucleação de uma pré-trinca por fadiga, o que normalmente requer que se disponha de uma máquina de tração servo-controlada, que é um equipamento caro.

## 6.2.1 Características do ensaio

Utiliza corpo de prova entalhado (tipos mais comuns são  $SE(B)^2$ , flexão com entalhe em apenas um lado, e C(T), compacto em tração).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Single-edge bending

A pré-trinca é usualmente crescida por fadiga, para se tornar semelhante a uma trinca natural no corpo de prova, e seu comprimento *a* deve se situar no intervalo  $0.45W \le a \le 0.55W$ . O plano da trinca deve ser paralelo tanto à direção da espessura quanto à da largura dentro de  $10^{\circ}$  de tolerância e seu tamanho é usualmente medido após a realização do ensaio.

A norma sugere ainda realizar pelo menos três réplicas do teste.

Após a relização do ensaio, que leva a uma curva do tipo carga versus deslocamento relativo (normalmente medido por um extensômetro especial, denominado *clip gage*, que é posicionado geralmente na boca do entalhe, em posição pré-determinada. Sobre esta curva desenhamos uma reta com inclinação 5% menor que a inclinação original da curva partindo da orígem. O cálculo da carga crítica condicional ( $P_Q$ ) para três casos previstos em norma está representado na Figura 6.8.



Deslocamento

Figura 6.8: Representação das curvas típicas obtidas em um ensaio de tenacidade à fratura no EPD, admitidas na norma ASTM E1820-08a e do procedimento para determinação da carga crítica condicional,  $P_Q$ .

O procedimento para o cálculo de  $K_{Ic}$  é o seguinte:

- Calcule  $\frac{P_{MAX}}{P_Q}$ , se este valor for maior que 1,10 o ensaio não produzirá um resultado válido para  $K_{Ic}$  e deverá ser descartado.
- Calcule o valor condicional K<sub>Q</sub> correspondente a P<sub>Q</sub> usando as fórmulas tabuladas para a geometria específica do corpo de prova (por exemplo, as Equações 3.64 são usadas no caso de corpos de prova C(T)).
- Calcule 2,5  $\left(\frac{K_Q}{\sigma_e}\right)^2$ , se esta quantidade for menor que a espessura da amostra e que o comprimento inicial da pré-trinca e que o comprimento do ligamento do corpo de prova o ensaio será válido e teremos que  $K_{Ic} = K_Q$ .

• Se o espécimen falhar no último requisito será necessário usar um corpo de prova maior.

### **Exercício 6.1**

A liga de Alumínio 2024 (uma liga Al-Cu endurecível por precipitação) pode ser obtida em dois níveis de resistência (e tenacidade) diferentes por meio de tratamentos térmicos de envelhecimento. O tratamento indicado por "T3" resulta em um limite de escoamento  $\sigma_e =$ 345 MPa e tenacidade  $K_{Ic} \sim 40$  MPa.m<sup>1/2</sup>, já o tratamento designado "T851" resulta em um incremento do limite de escoamento para  $\sigma_e = 455$  MPa, porém acompanhado de uma queda de tenacidade para  $K_{Ic} = 26,4$  MPa.m<sup>1/2</sup>. Pergunta-se:

- a. Qual a máxima tensão segura de trabalho para este material no estado T3 supondo-se que a metodologia de inspeção adotada detecta defeitos superficiais acima de 3 mm de profundidade?
- b. Por motivos de economia de peso desejamos trabalhar com o material no estado T851 mantendo a relação entre tensão de trabalho e limite de escoamento inalterada. Isto seria aconselhável?
- c. Recalcule o ítem a. para os dados do tratamento T851 e comente.

# 6.3 Mecânica da Fratura Elasto-plástica

O procedimento descrito na primeira parte desta aula permite, de certa forma, ampliar o escopo da Mecânica da Fratura Linear Elástica para incluir a análise de materiais dúcteis. Para tanto basta trabalharmos em condições onde a zona plástica seja muito pequena em termos das dimensões lineares do sistema que estamos investigando. Isto vale se trabalharmos, por exemplo em tensões baixas em relação ao limite de escoamento do material, o que é, entretanto, uma condição muito restritiva para a maioria dos materiais dúcteis. Quando a zona plástica atinge dimensões consideráveis a aplicação do conceito de fator de intensificação de tensões ao problema se torna questionável.

A limitação da MFEL a materiais muito frágeis/tensões muito baixas logo frustrou a comunidade científica. Entretanto, aplicar o ferramental desenvolvido para trabalhar com projetos direcionados à tenacidade a materiais de ductilidade elevada era muito tentador e logo os pesquisadores iniciaram a busca por uma alternativa ao conceito de fator de intensificação de tensões que seja válido também para materiais elásticos não lineares e materiais plásticos. Com isto foi inaugurada a **Mecânica da Fratura Elasto-Plástica**.

## 6.3.1 COD e CTOD

Baseado em P. S. C. da Silva "Comportamento mecânico e fratura de componentes e estruturas metálicas", UFPR, 1999.

Um parâmetro importante da MFEP foi proposto em 1965 por Wells após analisar corpos de prova fraturados de aços de alta tenacidade usados em construções soldadas. Esta autor observou dois fatos:

- 1. as condições ditadas pela MFEL não se aplicavam e
- 2. as superfícies das trincas tinham se separado e a ponta da trinca havia adquirido um raio de curvatura significativo.

Estas observações levaram o autor a propor que este arredondamento fosse usado como critério de tenacidade de materiais dúcteis.

O parâmetro, denominado **CTOD** (de "crack-tip opening displacement", ou ainda abertura de ponta de trinca) tinha inicialmente um caráter empírico, porém o próprio Wells, segundo Paulo Sérgio da Silva, relacionou em seu trabalho original CTOD a *K* no limite de plasticidade limitada usando as fórmulas de Irwin, obtendo:

$$CTOD = \delta = \frac{4}{\pi} \frac{K^2}{\sigma_e E}$$
(6.14)

A equação acima é rigorosa nos limites da MFEL e neste caso a fratura ocorre quando  $K \ge K_{Ic} \Rightarrow \delta \ge \delta_{Ic}$ . Pelo uso do modelo de Dugdale-Baremblatt é possível obter uma expressão semelhante:

$$\text{CTOD} = \delta = \frac{K^2}{\sigma_e E} \tag{6.15}$$

As expressões da página anterior são determinadas assumindo EPT e um material idealmente plástico (ou seja, que não encrua). No caso mais geral teremos:

$$\delta = \frac{K^2}{\lambda \sigma_e E} \tag{6.16}$$

onde  $\lambda$  é uma constante adimensional, que é calibrada caso a caso. Para situações onde o EPT é predominante,  $\lambda \simeq 1,0$ , no caso de EPD, por outro lado,  $\lambda \simeq 2,0$ .

C. F. Shih (*J. Mech. Phys. Solids*, vol **29**, p. 305, 1981) demonstrou que existe uma relação biunívoca entre CTOD e outro parâmetro da MFEP: a integral *J* (que será vista mais adiante), confirmando desta forma a hipótese de Wells de que este parâmetro caracteriza a resistência ao crescimento de trincas em materiais dúcteis.

No início houve uma série de tentativas de se medir CTOD diretamente, que não foram bem sucedidas. O procedimento adotado atualmente envolve a medição de outra quantidade: a abertura da boca da trinca ou COD ("Crack Opening Displacement",  $\Delta$ ). O valor de CTOD é, então, estimado em funçao de COD. Para corpos de prova solicitados em flexão de três pontos (Fig. 6.9):



Figura 6.9: Representação esquemática do método para estimar CTOD a partir de medidas de COD.

por semelhança de triângulos:

$$\delta = \frac{r(W-a)\Delta}{r(W-a)+a} \qquad (0 \le r \le 1) \tag{6.17}$$

O procedimento experimental (por exemplo, o definido pelas normas do ensaio) estabelece que a fórmula da página anterior seja aplicada apenas à parcela plástica da abertura da ponta da trinca (Fig. 6.10). A relação entre COD e CTOD será, portanto, dada por:

$$\delta = \delta_{el} + \delta_{pl} = \frac{K_c}{\lambda \sigma_e E} + \frac{r_{pl} (W - a) \Delta_{pl}}{r_{pl} (W - a) + a}$$
(6.18)

O ensaio de CTOD

Norma ASTM E1820-08a



Figura 6.10: Curva carga versus deslocamento típica de um ensaio de CTOD.

A norma do ensaio define:

- $\delta_{Ic}$ : CTOD medido próximo ao início da propagação estável de trinca (ou "pop-in") definido como ocorrido a  $\Delta a_p = 0.2 \text{ mm} + 0.7 \delta_{Ic}$ , onde  $\Delta a_p$  é a parcela plástica da propagação estável da trinca medida no ensaio.
- $\delta_c$ : CTOD medido próximo ao início da propagação instável de trinca (ou "pop-in") quando esta ocorre com  $\Delta a_p < 0.2 \text{ mm} + 0.7 \delta_{Ic}$ ,
- $\delta_u$ : CTOD medido no início da propagação instável de trinca (ou "pop-in") quando o evento ocorre com  $\Delta a_p > 0.2 \text{ mm} + 0.7 \delta_{Ic}$
- A norma define ainda δ<sup>\*</sup><sub>c</sub> como o valor medido na propagação instável de trinca sem ser precedido por crescimento estável significativo.

Corpo de prova - a norma original (ASTM E 1290) admitia apenas duas geometrias:

- I Flexão de três pontos SE(B) e
- II Compacto em tração, C(T).

A nova norma (ASTM E 1820-08a) admite ainda a realização do ensaio com o formato compacto em disco (*disk-shaped compact*, DC(T)).

A pré-trinca é crescida por fadiga previamente ao ensaio e está sujeita às mesmas restrições que as devidas ao ensaio de tenacidade à fratura em deformação plana.

Uma particularidade curiosa é que existe uma separação geográfica entre as preferências quanto aos ensaios de MFEP. Os autores britânicos preferem o ensaio de CTOD (talvez porque Wells fosse inglês), enquanto que os americanos preferem o ensaio de integral J, que será discutido mais adiante.

A norma ASTM atual, por exemplo, praticamente tornou o ensaio de CTOD obsoleto, já que em todos os casos este parâmetro é calculado a partir de valores medidos para J, abandonando a idéia da rotação plástica do corpo de prova como havia sido discutido no início desta seção. Recentemente a Japan Welding Engineering Society comissionou um estudo<sup>3</sup> objetivando a comparação das diferentes metodologias propostas pelas normas americana (ASTM E1820-08a) e britânica (BS7448). Este estudo concluiu que há uma diferença significativa entre os valores de CTOD medidos pelas duas normas e que o valor definido pela norma ASTM resulta em valores inferiores aos medidos na norma BS. Este diferença depende da razão  $\frac{\sigma_u}{\sigma_e}$ , sendo que apenas para valores maiores que 0.8 deste parâmetro a diferença se torna negligível (atingindo até 60% de diferença para valores menores que 0.8).

### Discussão de CTOD

CTOD permite expandir o escopo da mecânica da fratura para casos envolvendo plasticidade ilimitada, porém nestes casos  $\delta$  **não será** uma propriedade intrínseca do material (dependerá da espessura e da geometria do sistema).

CTOD também não possuia valor como critério de projeto até a introdução do conceito de curva de desenho por CTOD (discutido em detalho por Paulo Sérgio da Silva, já citado anteriormente).

## 6.3.2 Integral J

Outro parâmetro importante da MFEP é a chamada "integral J", introduzida inicialmente por Eshelby em 1951 no contexto do estudo de discordâncias e aplicado independentemente por Cherepanov (1967) e Rice (1968) para a investigação da propagação de trincas em materiais dúcteis.

Usando o princípio da conservação de energia, Eshelby demonstrou que, para um material

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>T. Tagawa *et al.*, Investigation into the CTOD testing methodology revised in ASTM E 1290, *In:* Proceedings of the 17th European Conference on Fracture, ESIS:Brno, Rep Tcheca (2008) pp. 522 – 529.

elástico não linear, a integral de linha sobre o contorno  $\Gamma$ , definida por:

$$J = \int_{\Gamma} \left( w_{el} \mathrm{d}x_2 - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \mathrm{d}l \right)$$
(6.19)

onde  $w_{el} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$  é a densidade de energia elástica, **T** é o vetor tração normal, atuando no sentido exterior ao contorno, **u** é o vetor deslocamento (já introduzido anteriormente) e d*l* é um elemento de linha no contorno, é independente do caminho (ou seja, ela se anula se o contorno for fechado, vide Fig. 6.11).



Figura 6.11: Representação de um contorno de linha em um sólido elástico não linear, usado para demonstrar a independência do caminho da integral *J*.

A aplicação de *J* a trincas se baseia no contorno esquematizado na Fig. 6.12:

Rice e Cherepanov argumentaram que nos trechos do contorno que se situam nas faces das trincas (ou seja,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_4$ ) tanto as tensões quanto a tração devem se anular (por serem superfícies livres), desta forma:

$$J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_3} = 0 \Rightarrow J_{\Gamma_1} = J_{-\Gamma_3} \tag{6.20}$$

Como o contorno escolhido é arbitrário, entretanto, a relação obtida acima implica que J é uma constante independente do caminho, desde que este se inicie em uma face da trinca e termine na outra (o que equivale dizer, desde que ele circunde a ponta da trinca).

### Discussão da integral J

Apesar da aparente complexidade da definição de J, a integral de linha é usada, unica e exclusivamente, para obter o resultado da Equação 6.20, ou seja, que J independe do caminho



Figura 6.12: Contorno de integração utilizado na análise do uso de J como critério para propagação de trincas.

de integração. No caso de trincas é possível mostrar que *J* corresponde à diferença de energia de dois corpos sólidos contendo trincas de tamanhos *a* e a + da.

$$I \equiv \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}??\tag{6.21}$$

A última definição sugere que J é a generalização da força de extensão de trinca G para o caso elasto-plástico e que, portanto, os mesmos métodos experimentais usados para a determinação de G podem ser utilizados na determineção de J.

Como discutido anteriormente, os resultados valem para um material elástico não linear. A equivalência com o material plástico é feita supondo que ele é representado por um material não linear elástico com a mesma curva tensão  $\times$  deformação.

Esta restrição indica que J não deveria ser um parâmetro válido para os casos envolvendo carregamento cíclico (fadiga) ou quando há crescimento lento de trinca apreciável<sup>4</sup>. A prática demonstrou, entretanto, que estas restrições, se existirem, não provocam erros apreciáveis na avaliação dos resultados.

 $<sup>^{4}</sup>$ O que é uma contradição, já que os métodos experimentais para a determinação de *J* requerem que a trinca se mova de forma infinitesimal



Figura 6.13: Representação esquemática das "curvas R" de um material frágil ideal e de um material que apresenta "comportamento R".

# **6.3.3** Curva *R*

Podemos retornar agora à ideia básica de Griffith, de que a fratura instável de um corpo sólido ocorrerá quando houver o balanço entre a energia elástica liberada pelo crescimento da trinca (G, J ou mesmo  $\delta$ ) e a energia consumida para formá-la (genericamente descrita como R). Segundo Irwin:

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a} \tag{6.22}$$

Da definição de *G* temos:

$$G = \frac{K^2 (1 - v^2)}{E} = \frac{\pi \sigma^2 a (1 - v^2)}{E}$$
(6.23)

Portanto *G* corresponde a uma reta em função do tamanho da trinca, que passa pela origem e cujo coeficiente de inclinação aumenta quando  $\sigma$  aumenta.

Já a resistência ao crescimento da trinca não é conhecida *a priori*, mas esperamos que ela tenha um comportamento não linear com o tamanho da trinca, já que ela depende da formação da zona plástica, que também aumenta de forma não linear com o tamanho da trinca.

Esquematicamente podemos representar a condição de estabilidade através de um diagrama que relaciona  $G \in R$  com o tamanho da trinca. Este diagrama (Fig. 6.13) recebe o nome de **curva R**.

A curva R pode ser medida (normalmente por ensaios de CTOD ou J), e atualmente os ensaios de normalizados de determinação de J ou CTOD são, na verdade, métodos para a

determinação das curvas J - R ou  $\delta - R$ . Uma aplicação interessante das curvas Rs é no modelamento de propriedades de materiais cerâmicos avançados por meio dos mecanismos de tenacificação.

#### Relação entre as medidas de tenacidade

Em resumo, temos dois tipos de abordagens na mecânica da fratura:

- 1. análise das tensões na ponta da trinca (Inglis, $K_c$ )
- 2. análise da energia liberada durante o crescimento da trinca (Griffith,  $G_c$ )

As medidas da mecânica da fratura elasto-plástica ( $\delta_c$ ,  $J_c$ ) tem um caráter hibrido e podem ser interpretadas tanto como um parâmetro de campo de tensões, quanto pertencentes a uma abordagem energética.

Estas distinções são, obviamente, artificiais. As diferentes medidas de tenacidade à fratura são equivalentes e interrelacionadas. Estas relações podem ser expressas esquematicamente por:

$$J = G = \frac{K^2}{E'} = \lambda \sigma_e \delta \tag{6.24}$$

onde E' = E no EPT e  $\frac{E}{(1-v^2)}$  no EPD e  $1 \le \lambda \le 2$ .

As expressões acima, entretanto, somente valem rigorosamente no domínio da MFEL, para materiais elasto-plásticos uma componente "plástica" necessita ser adicionada às definições de  $J \in \delta$ .
# 7 MECANISMOS DE DEFORMAÇÃO PLÁSTICA E DE FRATURA DOS MATERIAIS

# 7.1 Deformação plástica de monocristais

Até o momento tratamos da deformação plástica e da fratura de um ponto de vista fenomenológico, ou seja, descrevemos **o que** acontece, mas não **o como**.

Os dois fenômenos, entretanto, dependem da movimentação relativa de átomos, seja de forma individual, seja de forma coletiva. O estudo da deformação plástica e da fratura do ponto de vista atômico (ou molecular, no caso de polímeros) é chamado de *atomística* e é essencial no desenvolvimento de novos materiais de engenharia com propriedades otimizadas, já que estes são projetados através do controle destes mecanismos.

## 7.1.1 Tensão de cisalhamento projetada

A figura a seguir representa esquemáticamente um monocristal cilíndrico sendo solicitado em tração ao longo de seu eixo, que corresponde à direção cristalográfica  $\vec{\ell} \equiv [u'v'w']$ . Na mesma figura encontramos representado um sistema de escorregamento que consiste de uma discordância com vetor de Burgers  $\vec{b} \propto [uvw]$  escorregando no plano cuja normal é  $\vec{n} = (hkl)$ .

Definimos (Fig. 7.1):

- O ângulo  $\phi = \hat{n\ell}$  entre a direção de carregamento e a normal do plano de escorregamento e
- O ângulo  $\lambda = \widehat{b\ell}$  entre a direção de carregamento e o vetor de Burgers da discordância.

Por meio de considerações geométricas simples é possível domonstrar que a tensão de



Figura 7.1: Definições dos ânculos usados no cálculo da tensão de cisalhamento projetada.

cisalhamento projetada na direção do vetor de Burgers e no plano de escorregamento será dada por:

$$\tau = \sigma \cos \phi \cos \lambda \tag{7.1}$$

Para reticulados de Bravais **cúbicos** é possível representar a equação acima em termos dos índices de Miller correspondentes às direções e planos cristalográficos por meio dos cossenos diretores:

$$\cos\widehat{ab} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$
(7.2)

## 7.1.2 Lei de Schmid

Em 1950 Schmid e Boas propuseram a seguinte regra, que supostamente rege a ativação de sistemas de escorregamento em monocristais:

Metais escoam plasticamente quando a tensão de cisalhamento projetada atuando sobre o sistema de escorregamento atinge o valor crítico

$$\tau_{CRSS} = M\sigma_e = \sigma_e \cos\phi \cos\lambda \tag{7.3}$$

O fator *M* recebe o nome de fator de Schmid e a regra acima é conhecida pelo nome de lei de Schmid. A constante  $\tau_{CRSS}$  é conhecida como **tensão de cisalhamento projetada crítica** ("critical resolved shear stress") e supostamente é constante para um dado sistema de escorregamento.

A lei de Schmid é experimentalmente verificada em uma série de situações, notadamente em metais hexagonais compactos que, por natureza, apresentam poucos sistemas de escorregamento. Diversos fatores, entretanto, podem provocar desvios da lei de Schmid. Entre estes podemos citar:

- a ativação de dois ou mais sistemas de escorregamento logo no início da deformação plástica,
- a ativação de maclação mecânica (que não obedece à lei de Schmid) logo no início da deformação plástica e

 núcleos de discordâncias com configurações complexas (não planas), que precisam se rearranjar para que a discordância possa deslizar (este é o caso dos metais CCC, por exemplo).

Analisando a forma da lei de Schmid, verificamos que a máxima tensão projetada será obtida quando  $\phi = \lambda = 45^{\circ}$ . Por outro lado, caso  $\phi$  ou  $\lambda = 0^{\circ}$  ou 90°, a tensão se anulará.

Exercício 7.1 Prove as afirmações do parágrafo anterior.

Desta forma é esperado que os sistemas de escorregamento que serão ativados logo no início da deformação plástica se situarão a aproximadamente 45° do eixo de aplicação da carga, o que coincide com estimativas anteriores feitas em conexão com a análise do estado de tensão do carregamento uniaxial.

Outra conseqüência da lei de Schmid é que a tensão projetada crítica será a mesma independente do sinal de  $\tau$ , desta forma a lei de Schmid não prevê a ocorrência de anisotropia plástica (efeito Bauschinger, por exemplo).

**Exercício 7.2** Considere um monocristal cilíndrico de cobre orientado com seu eixo ao longo da direção [123], que corresponde também ao eixo de carregamento. Calcule o fator de Schmid para cada um dos doze sistemas de escorregamento e o limite de escoamento do monocristal, supondo que  $\tau_{CRSS} = 50$  MPa.

Relembrando: o cobre tem a estrutura cristalina CFC com parâmetro de rede  $a_0$  e se deforma por sistemas de escorregamento do tipo:

$$\frac{a_0}{2} < 1\overline{10} > \{111\} \tag{7.4}$$

#### Geometria da deformação plástica

A lei de Schmid, a rigor, somente é válida para o início da deformação plástica de monocristais. A razão disto é que, com o progresso da deformação plástica, a orientação de monocristal em relação à força que está sendo aplicada se altera (o reticulado do cristal "roda" no espaço, em conseqüência da deformação plástica, como esquematizado na Fig. 7.2).

Esta "rotação" do reticulado explica o surgimento de **textura** em policristais deformados plasticamente. Modelos numéricos (por exemplo, o modelo de Taylor) podem ser empregados para prever qual será a **função de distribuição de orientações cristalográficas** (ODF, de "orientation distribution function") de um material policristalino sujeito a um dado nível



Figura 7.2: Representação esquemática da origem da rotação do reticulado de um monocristal durante a deformação plástica do mesmo.

de deformação. Estes modelos pressupõem, basicamente, a validade da lei de Schmid, considerando cada grão como um monocristal que está sujeito a restrições de deformação geradas pelos seus vizinhos (no modelo "clássico" de Taylor assume-se que a deformação total é homogeneamente distribuida por todos os grãos do material).

Um aspecto importante relacionado à Figura 7.2 é que a deformação plástica, em sí, não e a causa da rotação. De fato, se as garras da máquina representadas na figura pudessem se mover lateralmente seria possível em tese continuar a deformação plástica sem alterar a orientação do cristal. É a máquina de ensaios (que é muito mais rígida que o corpo de prova) que impõe a rotação ao cristal. De fato, a rotação é uma característica do processo de conformação, o que complica sobremaneira o problema.

## 7.1.3 Estágios da deformação plástica de monocristais

Um monocristal orientado de tal forma que apenas um sistema de escorregamento seja ativo no início da deformação plástica é dito **orientado para monodeslizamento** ("single slip" ou "easy glide"). Caso o monocristal esteja orientado de tal forma que mais de um sistema seja ativado já no início da deformação plástica, diz-se que está **orientado para polideslizamento** ("polyslip").

Eventualmente, em função da rotação do reticulado, outros sistemas de escorregamento passam a se tornar propícios à ativação, aumentando a probabilidade de interação de discordâncias (encruamento). Para deformações ainda maiores o nível de tensão pode aumentar tanto que mecanismos alternativos de superação de obstáculos podem ser ativados (por exemplo, deslizamento com desvio, "cross slip"). Estes fatores devem ser levados em conta na interpretação do comportamento mecânico de monocristais deformados plasticamente.

A Figura 7.3 apresenta esquematicamente a curva tensão de cisalhamento vs. deformação angular para um monocristal **de metal CFC** genérico orientado para monodeslizamento.



Figura 7.3: Representação esquemática da curva  $\tau \times \gamma$  de um monocristal CFC orientado para monodeslizamento.

A curva anterior pode ser dividida em três regiões distintas:

- Estágio I ou região de monodeslizamento, caracterizado por baixas taxas de encruamento  $(\theta_I \approx \frac{\theta_{II}}{10})$  e estrutura de deformação composta por linhas de escorregamento paralelas e regularmente espaçadas e as discordâncias são igualmente paralelas formando aglomerados predominantemente dipolares <sup>1</sup>.
- Estágio II ou região de encruamento linear, caracterizado por um aumento significativo da taxa de encruamento (θ<sub>II</sub>/G ≈ 1/300) e o início da formação de uma estrutura celular de deformação, com o tamanho de célula decrescendo conforme a deformação aumenta (a definição da estrutura celular depende da Energia de Defeito de Empilhamento EDE do material, sendo maior quanto maior for o valor de EDE).
- Estágio III ou região de encruamento parabólico, caracterizado por uma queda da taxa de encruamento. É neste estágio que fenômenos de recuperação dinâmica e o deslizamento com desvio começam a ser ativados (daí a queda da taxa de encruamento).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Na língua inglêsa usa-se o termo técnico "braids", ou tranças, para descrever estas estruturas.

O estágio I não é observado me policristais, já que sempre haverá um (ou mais de um) grão onde orientado para polideslizamento já no início da deformação plástica. Nestes casos a deformação já se inicia no estágio II e progride rapidamente para o estágio III.

O estágio II é pouco afetado pela temperatura e é muito semelhante em diferentes materiais, porém sua extensão máxima dependerá deste parâmetro (já que o escorregamento com desvio é termicamente ativado).

O estágio III é afetado, além da temperatura, pela energia de defeito de empilhamento, pois esta controla a separação das parciais de Schokley que devem se recombinar para que o deslizamento com desvio possa ocorrer (grosseiramente, quanto maior a separação entre as parciais, menor a facilidade com que a discordância poderá sofrer deslizamento com desvio).

Recentemente tornou-se corrente a identificação de um estágio IV, que corresponde a um novo estágio de encruamento linear porém com taxa de encruamento da ordem de  $\frac{G}{1000}$ . Segundo Kuhlman-Wilsdorf<sup>2</sup> este estágio pode ser observado até deformações verdadeiras da ordem de 4,0. Para deformações ainda maiores identificou-se mais recentemente um estágio V, onde a taxa de encruamento cai novamente.

## 7.2 Teorias do encruamento

Baseado em D. Kuhlmann-Willsdorf "Theory of workhardening 1934-1984" *Metall. Trans.* vol. 16A, 1985, pp. 2091-2108.

Logo após a introdução praticamente simultânea do conceito de discordância na física do estado sólido por Polanyi, Orowan e Taylor (1934) este começou a ser aplicado à plasticidade das ligas metálicas. Já de início estabeleceu-se uma dualidade na interpretação do fenômeno do encruamento:

- A interpretação dinâmica de Polanyi-Orowan e
- A interpretação estática de Taylor

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>D. Kuhlman-Wilsdorf, H. G. F. Wilsdorf, J. A. Wert, LEDS theory of workhardening stages and "planar" versus "distributed" glide, Scripta Metall. Mater. v. 31 (1994) pp. 729 – 734.

#### **Teoria de Becker (1925-1929)**

Muito antes da "invenção" do conceito de discordância, R. Becker havia proposto que a deformação plástica macroscópica em materiais cristalinos dependeria, em contraste com o escoamento viscoso de fluidos, da ativação de regiões específicas de volume V, tal que quando uma dada tensão crítica (digamos  $\sigma_{crit}$ ) fosse atingida, ocorreria um incremento unitário da deformação plástica (digamos  $\lambda$ ), provisoriamente suposta proporcional à tensão macroscópica aplicada. Incrementos macroscópicos da deformação plástica ocorreriam, portanto, a uma dada tensão  $\sigma_a$  quando, pela ação de flutuações térmicas, a energia elástica local  $\frac{V\sigma_a^2}{2E}$  ultrapassasse  $\frac{V\sigma_{crit}^2}{2E}$ .

Desta forma, a teoria de Becker associa a deformação plástica ao **fluxo viscoso** e, por isto, é uma teoria dinâmica.

## Teoria de Polanyi-Orowan

Polanyi e Orowan, independentemente, aplicaram a idéia de Becker ao "novo" conceito de discordância, identificando o evento unitário como a criação ou o escorregamento de uma discordância no volume V. As tensões normais e o módulo de rigidez são substituidos por tensões de cisalhamento,  $\tau_a$  e  $\tau_c$  e pelo módulo de cisalhamento G e  $\tau_c$  é identificado, modernamente, com  $\tau_{CRSS}$ .

Orowan supôs que a energia de ativação do evento unitário seria independente da tensão aplicada obtendo:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = C \exp\left\{-\frac{\left[V\left(\tau_c - q\tau_a\right)^2\right]}{2Gk_BT}\right\}$$
(7.5)

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e q é um fator denominado "fator de multiplicação de discordâncias", introduzido em épocas anteriores para compatibilizar a tensão teórica de cisa-lhamento de planos cristalinos com os limites de escoamento experimentalmente observados.

O grande sucesso da teoria de Polanyi-Orowan está na previsão da dependência do limite de escoamento com a temperatura, na forma:

$$\tau_e = \tau_c - B\sqrt{T} \tag{7.6}$$

onde *B* é uma constante.

Orowan também introduziu o conceito de que as discordâncias, além de serem os porta-

dores da deformação unitária, são fortes concentradores de tensão e introduzem defeitos que bloqueiam planos de escorregamento. A teoria de Polanyi-Orowan se concentra na ativação térmica da taxa de deformação como fenômeno fundamental (de acordo com a teoria de Becker). Nas palavras do próprio Orowan (*Z. Phys.* vol. 97, 1935, p. 576):

"Strain hardening is basically an unimportant side effect of plastic flow"

## Teoria de Taylor

Em contraste com a teoria de Polanyi-Orowan, Taylor propôs uma teoria "estática", baseada num arranjo regular de baixa energia formado por colunas paralelas de discordâncias retas em cunha tais que o sinal das discordâncias se invertia em colunas vizinhas. Este arranjo especial recebe o nome modernos de "reticulado de Taylor" (Figura 7.4).



Figura 7.4: Representação esquemática de um reticulado de Taylor.

Considerando um reticulado quadrado de espaçamento  $\ell$  o modelo pode ser resumindo da seguinte forma: como as discordâncias não podem se formar no interior do cristal, elas devem vir ou da superfície ou de um contorno de grão, situado a uma distância *L*. Desta forma, para proceder à deformação plástica uma discordância em média deve viajar uma distância  $\frac{L}{2}$ , produzindo uma deformação dada por:

$$\gamma = \frac{\rho bL}{2} \tag{7.7}$$

onde *b* representa o vetor de Burgers da discordância e  $\rho$  representa a densidade de discordâncias no reticulado (medida em unidades de comprimento de linha de discordância por metro cúbico de cristal), que é dada em função do espaçamento do reticulado por:

$$\rho = \frac{1}{\ell^2} \Rightarrow \gamma = \frac{bL}{2\ell^2} \tag{7.8}$$

A seguir Taylor procedeu a uma análise cuidadosa das tensões geradas pelo arranjo de discordâncias mostrando que a tensão necessária para deslizar as colunas relativamente umas as outras de forma a produzir mais deformação plástica é inversamente proporcional à separação entre as colunas:

$$\tau = \frac{C}{\ell} = \left(\frac{\sqrt{2}C}{\sqrt{bL}}\right)\sqrt{\gamma} \tag{7.9}$$

onde C é uma constante. Desta forma se obtém a famosa equação de Taylor:

$$\tau = \tau_{CRSS} + \alpha G b \sqrt{\rho} \tag{7.10}$$

onde  $\alpha$  é uma constante que assume valores tipicamente entre 0,3 e 0,6.

A equação de Taylor descreve o chamado encruamento parabólico, que nas palavras de Kuhlmann-Wilsdorf

"... has been vindicated to the fullest extent, and has turned out to be one of the most reliably robust relationships of all plastic deformation theory."

A equação de Taylor é verificada experimentalmente em metais e ligas e até mesmo para cerâmicas (acima da temperatura de transição dúctil-frágil).

## Crítica às teorias antigas

Apesar de bem sucedidas na previsão de certos aspectos da deformação plástica, as teorias de Polanyi-Orowan e Taylor **não são** efetivamente representativas do que ocorre durante a deformação plástica e, portanto, no encruamento.

Kuhlmann-Wilsdorf critica teorias baseadas nas diferenças de tensões residuais (teorias do tipo Polanyi-Orowan) geradas por concentradores de tensão (empilhamentos de discordâncias) com base no argumento simples de que a deformação plástica sempre se inicia no ponto mais

fraco (ou seja, com a tensão residual mais favorável) e portanto estas devem estar balanceadas no interior do cristal, não contribuindo de forma significativa para o encruamento.

A própria teoria de Taylor apresenta deficiências, que ficam evidentes quando verificamos que ela prevê apenas o estágio III (parabólico) da deformação plástica de monocristais. O que ocorre nos estágios I e II?

Efetivamente, conforme Kuhlmann-Wilsdorf descreve, as tentativas de unificação das interpretações dinâmica e estática levou necessariamente ao abandono de duas hipóteses básicas da teoria de Becker:

- a ativação térmica da emissão das discordâncias e
- o papel relevante dos concentradores de tensão.

Conforme os resultados que a autora discute, estas duas hipóteses são conflitantes com evidências experimentais.

## A natureza das teorias modernas

Baseado em D. Kuhlman-Wilsdorf, Q: Dislocation structures — how far from equilibrium? A: very close indeed, Mater. Sci. Eng. A315 (2001) 211 – 216.

Segundo Kuhlman-Wilsdorf, as teorias modernas do encruamento podem ser divididas em duas classes, a primeira, denominada SODS (*Self-organizing dislocation structures*), defende que as estruturas e padrões desenvolvidos na deformação plástica são uma consequência do caráter termodinâmico fortemente irreversível (lembre-se que cerca de 90% do trabalho plástico é dissipado na forma de calor). Padrões de auto-organização são freqüentemente observados na natureza e associados a um forma de maximizar a produção de entropia pelo sistema, conforme reza a teoria da termodinâmica dos processos irreversíveis (Consulte os livros de I. Prigogine para discussões a respeito deste assunto).

Kuhlman-Wilsdorf defende uma posição alternativa, denominada LEDS (*Low energy dislocation structures*, que propõe que as estruturas de discordâncias formadas seriam aquelas mais próximas possíveis do equilíbrio termodinâmico. Argumentos favoráveis listados por esta autora para justificar a teoria LEDS são:

• As estruturas de discordâncias se formam de maneira praticamente instantânea mesmo a taxa de deformação tão baixas quanto  $10^{-6}$  s<sup>-1</sup> (portanto independente do fluxo de trabalho aplicado).

- Assim que a deformação é suspensa a temperaturas baixas ou moderadas (ou seja, quando fenômenos de recuperação são raramente observados) as estruturas de deformação permanecem praticamente inalteradas por um período indefinido.
- Finalmente se a deformação é interrompida sob carga e a temperatura é aumentada continuamente as poucas alterações da microestrutura de deformação se restringem à eliminação de resíduos de discordâncias, até que a recristalização (eventualmente dinâmica) se processa.

Segundo esta autora as evidências experimentais apontam para uma relação um-a-um entre a máxima tensão previamente aplicada no material e a microestrutura de deformação desenvolvida.

Não cabe aqui uma descrição detalhada da teoria LEDS, porém é fácil notar que a dualidade "teoria dinâmica" (Becker-Orowan-Polaniy) versus "teoria estática" (Taylor) é mantida nas teorias modernas.

## Exercício 7.3

Você compareceu a uma festa onde encontrou um colega do curso de Engenharia Mecânica (suposto entendedor de engenharia dos materiais) "botando banca" para uma roda de amigos leigos no assunto, contando os rudimentos da teoria de Orowan-Polanyi para o encruamento. Você, sabendo que esta teoria está ultrapassada, resolve dar uma lição ao dito cujo, enumerando as falhas da teoria e as bases das teorias modernas (como a teoria do comprimento de malha, *mesh length theory*, por exemplo), que se baseiam na formação de estruturas estáveis de discordâncias e no princípio da auto-similaridade.

- a. Descreva os fundamentos das abordagens alternativas propostas por Polanyi-Orowan e por Taylor para explicar o encruamento.
- b. Existe uma razão muito simples, vinculada à deformação de monocristais, que demonstra que ambas as abordagens são inadequadas, que razão é esta?
- c. De acordo com a teoria do comprimento de malha, o que ocorre no estágio de encruamento linear? Quando se dá a transição para o estágio de encruamento parabólico?

# 7.3 Microestruturas de deformação

Baseado em D. Kuhlman-Wilsdorf, H. G. F. Wilsdorf, J. A. Wert, LEDS theory of workhardening stages and "planar" versus "distributed" glide, Scripta Metall. Mater. v. 31 (1994) pp. 729 – 734.

Segundo Kuhlman-Wildsdorf, os materiais metálicos podem ser divididos em duas categorias dependendo das microestruturas de deformação que se formam durante a deformação plástica:

- Metais puros CFC e HC, bem como metais e ligas CCC em geral apresentam escorregamento "distribuído" (também conhecido como "wavy" glide, devido à forma ondulada das bandas de escorregamento).
- Ligas CFC e HC apresentam escorregamento "planar".

Estas diferenças estão associadas às microestruturas de deformação desenvolvidas nestes materiais. Metais com escorregamento distribuído desenvolvem uma estrutura celular, já materiais com escorregamento planar desenvolvem uma estrutura de deformação mais homogênea, semelhante a um reticulado de Taylor.

As estruturas celulares correspondem a coleções de contornos de rotação (*i.e.* paredes de discordâncias que separam regiões volumétricas mutuamente relacionadas por um dado ângulo de rotação) e constituem uma estrutura tipo mosaico de blocos desorientados. A presença de desorientação através da parede evidencia a existência de uma certa predominância de discordâncias de um dado sinal, apesar disto praticamente todas as demais discordâncias encontramse combinadas formando dipolos ou multipolos de maior ordem.

Os reticulados de Taylor (cuja forma mais simples, contendo apenas um vetor de Burgers, é apresentada na Figura 7.4) corresponde a um arranjo quase regular de discordâncias sem que haja predominância de um dado sinal, de tal forma que as tensões geradas por uma dada discordância seja compensada pela visinha de sinal inverso e as tensões de longo alcance (ou seja, acima da distância de primeiros visinhos no reticulado de Taylor) se cancelam.

A preferência da natureza por estruturas dipolares ou multipolares de discordância pode ser explicada considerando-se que cerca de 90% da energia de linha de uma discordância está associada ao campo elástico de longo alcance gerado por ela. Cancelar o campo de longo alcance, portanto reduz a energia efetiva de linha da discordância, tornando esta estrutura mais estável. Esta é a base da teoria LEDS, ou seja, entre todas as possíveis estruturas de deformação que possivelmente se formariam sob as restrições de geometria de deformação e mobilidade das discordâncias dadas, aquela que resulta na mais baixa energia é a escolhida.

Segundo Kuhlman-Wilsdorf, os estágios da deformação plástica podem ser compreendidos face a transformações das estruturas de baixa energia formadas no cristal. Assim:

- No estágio I formar-se-íam configurações de dipolo de discordâncias isoladas, tal que o campo elástico mútuo seja blindado, ou seja, a microestrutura de deformação se assemelha a um reticulado de Taylor.
- Na transição do estágio I para o II as tensões residuais de tração ou de compressão permitem ativar outros sistemmas de escorregamento, mesmo quando a tensão projetada é inferior à crítica para este segundo sistema. A estrutura nesta fase é denominada estrutura de tapete (*"carpet"*) por Kuhlman-Wilsdorf e segundo esta autora ela consiste de paredes de rotação (*tilt walls*) de discordâncias com ângulo alternado, formando um reticulado de Taylor rodado. Segundo a autora o emaranhamento de discordâncias em materiais com escorregamento distribuído obscurece a estrutura em tapete.
- Durante o estágio II a formação da estrutura em tapete continua e o reticulado de Taylor se densifica, segundo o princípio da auto-similaridade<sup>3</sup>.
- A transição do estágio II para o III corresponde à conversão do reticulado de Taylor em uma estrutura composta por células equiaxiais, o que exige a mobilidade tridimensional das discordâncias, ou seja, deslizamento cruzado, ascensão e ativação de outros sistemas de escorregamento. Desta forma o estágio III é retardado ou mesmo suprimido em materiais com deslizamento planar.
- No estágio III a auto-similaridade leva a uma redução do diâmetro de célula e a um aumento da desorientação entre células, enquanto isto a taxa de aprisionamento de discordâncias nas paredes de células diminui (levando a uma diminuição da taxa de encruamento).
- A transição do estágio III para o IV ocorre por incompatibilidade entre a energia devida à desorientação nas paredes de célula, que cresce mais rápido do que a energia de linha das discordâncias decresce.
- No estágio IV a incompatibilidade acima mencionada leva a uma alteração da forma das células, que deixam de ser equiaxiais assumindo formas alongadas, achatadas ou outras, que dependem da geometria imposta na deformação (por exemplo, em trafilação as células tornam-se alongadas, na laminação elas se tornam achatadas e assim por diante).

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Auto-similaridade se refere a um processo onde uma dada estrutura geométrica permanece inalterada exceto pela sua escala. Uma transformação auto-similar, portanto, mantém a estrutura básica inalterada, reduzindo ou aumentando continuamente a escala da mesma.

À época da redação do artigo acima mencionado o estágio V ainda não havia sido identificado, mas ele está associado a uma nova transformação da estrutura de discordâncias onde a desorientação entre células cresce tanto que os contornos de célula se transformam em contornos de alto ângulo. A estrutura de deformação no estágio V, portanto, corresponde a uma estrutura de grão equiaxiais (vide seção 7.3.1).

## 7.3.1 Aplicação: Equal-Channel Angular Pressing (ECAP)

Baseado em R. Z. Valiev, T. G. Langdon "Principles of equal-channel angular pressing as a processing tool for grain refinement" *Progr. Mater. Sci.* **51** (2006) 881–981.

O processo conhecido como "Equal-channel angular pressing" (ECAP) tem recebido muita atenção nos últimos anos dada a sua capacidade de produzir microestruturas de deformação altamente desenvolvidas, correspondendo a deformações verdadeiras altíssimas. Uma das características deste processo está na possibilidade de se obter microestruturas com grãos equiaxiais sub-micrométricos (ou até mesmo nanométricos), o que tem um óbvio impacto na tecnologia.

A capacidade de produzir amostras altamente deformadas, entretanto, tem sido empregada por diversos pesquisadores com o intuito de investigar o desenvolvimento da microestrutura de deformação nestes limites de altissimo encruamento. Neste livro iremos nos concentrar principalmente nesta característica do ECAP.

A Figura 7.5 apresenta os princípios básicos do ECAP e algumas definições importantes.



Figura 7.5: Princípios do processo de ECAP.

No processo de ECAP um tarugo é prensado através de uma matriz que apresente seção transversal constante, mas que contém uma brusca variação angular no interior. A capacidade do ECAP de produzir deformações elevadíssimas sem variação da seção transversal do tarugo é uma das suas principais vantagens.

Na Figura 7.5 estão representadas também as definições dos planos X, Y e Z, que serão usados na discussão que se segue.

A Figura 7.6 apresenta esquematicamente a deformação imposta a um tarugo em uma matriz com ângulo interno de 90° após um passe de ECAP. Nota-se que a deformação imposta é uma deformação angular da ordem de  $\gamma = 1.0$ .



Figura 7.6: Representação da deformação impressa em um tarugo processado por ECAP durante um passe em uma matriz com ângulo interno de 90°.

O processamento por ECAP não precisa, obviamente, se limitar a apenas um passe através da matriz. Na aplicação de diversos passes pode-se definir quatro rotas de processamento, que são descritas a seguir:

- Rota A (nenhuma rotação)
- Rota  $B_A$  ( $\pm 90^\circ$  em torno de X)
- Rota  $B_C$  (+90° em torno de X)
- Rota C (180° em torno de X)

A Figura 7.7 apresenta uma representação esquemática da deformação imposta ao tarugo em função do número de passes e da rota escolhida. Nota-se que as rotas  $B_C$  e C são as que permitem uma melhor homogeneidade da deformação imposta. De fato, estas são as rotas que produzem as microestruturas mais homogêneas, como será visto posteriormente.

Route	Plane	Number of pressings								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	x			-		-	-	-	(a <del>-</del> 6)	-
	Y		$\square$	0		-	-			
	z									
B <sub>A</sub>	x			0	0	1	1	1	1	1
	Y		$\square$	0	0	0				-
	z			0	0	/	~		~~~	
Bc	x		0	0	D			0		
	Y		Δ	$\square$			0	0		
	z			0	0			0	0	
с	x									
	Y		0		0		0		D	
	z									
		-			_					

Figura 7.7: Representação esquemática da deformação aplicada a um tarugo processado por ECAP ao longo das quatro rotas clássicas.

Dentre os parâmetros de processamento que mais afetam a microestrutura e as propriedades mecânicas do tarugo porcessado por ECAP temos a composição, a temperatura de prensagem e os ângulos da matriz. A composição do tarugo afeta, por exemplo, o tamanho de grão final, de tal forma que ligas possuem em geral tamanhos de grão mais finos para as mesmas condições de processamento. Assim, por exemplo, alumínio puro processado por ECAP possui tamanhos de grão finais da ordem de 1  $\mu$ m, enquanto que ligas de alumínio contendo 3% Mg possuem tamanhos de grão finais cerca de uma ordem de grandeza menor.

A temperatura afeta o tamanho de grão final, de tal forma que quanto menor ela for, tanto menor será o tamanho de grão final.

Por fim, os ângulos da matriz afetam as propriedades do tarugo atravéz da deformação total imposta e de sua concentração. Figura 7.8 apresenta quatro matrizes de ECAP com ângulos variáveis. Os ângulos a que nos referimos são denominados "ângulo externo" (o ângulo obtuso)

e "interno" (o ângulo agudo). Nota-se que quanto menor for o ângumo externo maior será a deformação total imposta no tarugo. Já um menor ângulo interno implica na concentração desta deformação em uma região menor. Naturalmente existe uma balanço entre os ângulos internos possíveis para um dado valor de ângulo externo em matrizes reais.



Figura 7.8: Quatro matrizes de ECAP com ângulos internos e externos variáveis.

A Figura 7.9 mostra a microestrutura desenvolvida em um tarugo de alumínio puro após 4, 6, 9 e 19 passes de ECAP (deformação total acumulada da ordem de 4,0) segundo a rota  $B_C$ usando as matrizes apresentadas na Figura **??**. Nota-se que não apenas a matriz com ângulo externo de 90° produz a microestrutura mais homogênea como também esta é composta de grãos microcristalinos (como evidenciado pela presença de anéis no padrão de difração de área selecionada, o que prova que os contornos lá visíveis são de alto ângulo). Já a matriz de 157,5° produz uma microestrutura composta por subgrãos, consideravelmente mais heterogênea (a presença de pontos isolados no padrão de área selecionada correspondente mostra que a desorientação entre as regiões desta microestrutura é baixa, o que só pode ser compatível com a presença de contornos de baixo ângulo nesta microestrutura).

A Figura 7.10 mostra a microestrutura desenvolvida em uma amostra de alumínio policristalino após um passe em ECAP mostrando o caráter altamente anisotrópico da deformação produzida. Os grão no plano Y estão claramente deformados, assim como os do plano X, mas os grão do plano Z aparentemente não mudam de forma.

Após dois passes, a variação de rota de processamento passa a ser possível. A Figura 7.11 mostra as microestruturas desenvolvidas por meio das rotas A, B (com dois passes as rotas  $B_A$  e  $B_C$  são equivalentes) e C. Aparentemente a microestrutura desenvolvida na rota C é mais homogênea.

Valiev e Langdon relatam resultados obtidos no processamento por ECAP de monocris-



Figura 7.9: Microestruturas produzidas em um tarugo de alumínio puro processada com 4, 6, 9 e 19 passes de ECAP (resultando em uma deformação total acumulada da ordem de 4,0) segundo a rota  $B_C$  usando as matrizes mostradas na Figura 7.8.



Figura 7.10: Aspecto da microestrutura desenvolvida em uma amostra de alumínio policristalino após um passe em ECAP.



Figura 7.11: Microestruturas desenvolvidas após dois passes de ECAP segundo as rotas A (a), B (b) e C (c).

tais de alumínio de alta puresa. Estes resultados, apesar de pouco relevantes do ponto de vista tecnológico, permitem obter informações valiosas sobre os mecanismos de deformação envolvidos em ECAP, pois é possível orientar o monocristal de forma a impor um dado sistema de escorregamento ativo no plano de máximo cisalhamento. A Figura 7.12 apresenta as condições geoméricas e o resultado de uma destas experiências, onde o cristal foi deformado em um passe de ECAP com um ângulo de entrada cerca de  $20^{\circ}$  fora da orientação ideal. A microestrutura desenvolvida nesta amostra é formada por uma grande quantidade de contornos de baixo ângulo (vide a figura de difração em área selecionada no detalhe) alongados aproximadamente a  $60^{\circ}$  em relação ao eixo X, consistente com a direção de máximo cisalhamento esperada para esta orientação.



Figura 7.12: Relações geométrias entre o sistema de escorregamento e a matriz de ECAP em experiências envolvendo monocristais CFC (a) e o resultado de uma destas experiências, com um monocristal de alumínio de alta pureza após um passe de ECAP com um ângulo de entrada cerca de 20° fora da orientação ideal (b).

A investiação do desenvolvimento da microestrutura em materiais policristalinos é mais desenvolvida e, obviamente, mais relevante do ponto de vista tecnológico. A microestrutura desenvolvida em Alumínio puro policristalino após um passe de ECAP é apresentada na Figura 7.13. Observa-se nesta figura que, apesar de todas as microestruturas serem consistentes com distribuições de contornos de grão de baixo ângulo (como no caso do alumínio monocristalino), o plano Y começa a apresentar uma maior dispersão na desorientação etra grãos.



Figura 7.13: Microestrutura desenvolvida em alimínio policristalino após um passe de ECAP.

A mesma amostra, processada em dois passes de ECAP encontra-se reproduzida na Figura 7.14. É evidente que diferenças tanto no tamanho médio de sub-grão, quanto na dispersão de desorientações são observadas em função da orientação (do plano de observação) quanto da rota de processamento. As amostras processadas segundo a rota B apresentam maiores desorientações, particularmente nos planos X e Z.

Finalmente após 4 passes de ECAP 7.15 as diferenças passam a ser mais evidentes, com as microestruturas mais homogêneas sendo produzidas pelas rotas  $B_C$  e C. As figuras de difração de área selecionada também mostram que a desorientação condiz com uma distribuição aleatória de direções de grão, ou seja, os contornos observados na figura são majoritariamente de alto ângulo.

A Figura 7.16 mostra a variação da fração volumétrica de contornos de alto ângulo em



Figura 7.14: Aspecto das microestruturas desenvolvidas após 2 passes de ECAP em alumínio policristalino segundo as rotas de processamento A (a), B (b) e C (c).



Figura 7.15: Microestruturas desenvolvidas após quatro passes por ECAp em alumínio policristalino.

função do número de passes aplicados segundo a rota  $B_C$  para o alumínio puro. Esta fração se aproxima de um ponto de saturação em torno de 80% para um número de passes superior a 6, denotando o carater refinador de grão do processo.



Figura 7.16: Fração volumétrica de contornos de alto ângulo em função do número de passes aplicados segundo a rota  $B_C$  para alumínio puro.

Recentemente Mishra *et al.*<sup>4</sup> publicaram resultados experimentais na caracterização da evolução microestrutural de cobre sujeito a ECAP segundo a rota  $B_C$  e propuzeram um modelo capaz de explicar o surgimento da microestrutura composta por grãos sub-microcristalinos. O modelo, mostrado na Figura 7.17, prevê a evolução da microestrutura em cinco etapas: partindose de uma distribuição homogênea de discordâncias formam-se células alongadas separadas por sub-contornos, que bloqueiam o deslizamento de outras discordâncias. Eventualmente as células alongadas fragmentam-se e os contornos se reorientam transformando-se em contornos de alto ângulo.

Este modelo, apesar de atrativo, deve ser validado por medidas independentes por outros grupos e em outros metais. É interessante notar que as microestruturas produzidas por ECAP são muito semelhantes àquelas observadas no interior de bandas de cisalhamento nos mesmos metais. De fato o processo de ECAP pode ser interpretado como a propagação controlada de uma banda de cisalhamento por todo o comprimento do tarugo e esta semelhança aparentemente é justificável.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>A. Mishra, B. K. Kad, F. Gregori, M. A. Meyers, Microstructural evolution in Copper subjected to severe plastic deformation: Experiments and Analysis, Acta Mater. v. 55 (2007) 13–28.



Figura 7.17: Modelo proposto por Mishra *et al.* para explicar a evolução microestrutural do cobre sujeito a ECAP, gerando a estrutura sub-microcristalina. (a) Distribuição homogênea de discordâncias, (b) Formação de células alongadas, (c) Bloqueio do escorregamento de discordâncias por sub-contornos, (d) Fragmentação das células alongadas e (e) Reorientação dos sub-contornos para produzir contornos de alto ângulo.

## 7.3.2 Heterogeneidades microestruturais de deformação

Baseado em B. Bay, N. Hansen, D. A. Hughes, D. Kuhlman-Wilsdorf, Evolution of FCC deformation structures in polyslip, Acta Metall. Mater. 40 (1992) 205 – 219.

A descrição da evolução microestrutural de materiais metálicos plasticamente deformados feita até aqui ignora as heterogeneidades espaciais que se desenvolvem no interior dos grãos. Mesmo antes do consenso sobre o papel das discordâncias na deformação plástica a consciência do surgimento de heterogeneidades de deformação era corrente. Assim estruturas conhecidas como bandas de deformação, bandas de transição e bandas de rotação eram identificadas, principalmente por meio de metalografia óptica.

Com o advento do microscópio eletrônico de transmissão tornou-se evidente, entretanto, que a estrutura de discordâncias inerente a materiais com escorregamento distribuído é celular. A conexão entre esta estrutura "microscópica" com as heterogeneidades na escala dos grão passou a ser um problema contundente.

Bay *et al.* publicaram em 1992 um artigo de revisão que se propôs a unificar a terminologia e descrever com detalhes esta conexão. Estes autores se restringiram a metais CFC caracterizados por escorregamento distribuído (ou seja, com alta energia de defeito de empilhamento, EDE). Este modelo será descrito a seguir.

Desde os princípios da teoria da plasticidade surgiu o consenso de que para que a deformação plástica de policristais seja contínua, há a necessidade de se ativar pelo menos cinco sistemas de escorregamento independentes em cada grão<sup>5</sup>. Esta é a base, por exemplo, do modelo de Taylor para a deformação plástica de policristais, onde se assume que a deformação é homogêneamente distribuida no interior de cada grão, com a ativação dos cinco sistemas de escorregamento que minimizam o trabalho de deformação.

Com o advento do microscópio eletrônico de transmissão tornou-se evidente que esta imagem de deformação plástica em policristais é incompleta. Quando o uma região do interior de um grão deformado plasticamente é observada, nota-se que um número menor que cinco (tipicamente três) de sistemas de escorregamento está ativo naquela região. Quando o grão inteiro é observado, nota-se que outrs regiões deformaram segundo outros sistemas de escorregamento, de forma que globalmente os cinco sistemas de escorregamento previstos pela teoria de Taylor

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Esta restrição é puramente geométrica. A deformação de cada parte do cristal como um corpo rígido eventual iria requerer seis graus de liberdade, sendo estes as três componentes de um vetor mais três ângulos para descrever a sua rotação, na deformação plástica um dos graus de liberdade é eliminado dada a observação experimental que que ela se processa a volume constante (o que impõe uma restrição ao movimento do elemento de volume), assim são necessários cinco graus de liberdade na deformação plástica, que são supridos por cinco sistemas de escorregamento independentes.

são ativados no grão, mas não simultaneamente.

Bay *et al.* denominam estas regiões de "Blocos de Células" (*Cell Blocks*, CB). No interior dos CBs forma-se uma estrutura celular, com células equiaxiais, onde as paredes de células são formadas a partir dos vetores de Burgers dos sistemas ativos naquela região. Como o número de sistemas ativos em cada CB é inferior a cinco, obviamente a deformação mútua de dois CBs visinhos não pode ser, por sí só, compatível. CBs visinhos devem ser, portanto, separados por estruturas diferentes. Os autores denominam estas estruturas de "Paredes Densas de Discordâncias" (*Dense Dislocation Walls*, DDWs) e sua estrutura de discordâncias é formada pela combinação de vetores de Burgers dos dois CBs visinhos.

Para deformações verdadeiras da ordem de 5% a 10% as DDWs se subdividem em duas paredes, denominadas por Bay *et al.* de "Paredes Duplas" (*Double Walls*, DWs). A região situada entre as DWs é denominada por estes autores de "Microbandas de primeira geração" (MB-I). As DWs e as células no interior das MB-I são inicialmente formadas pelas discordâncias que compõem a DDW pré-existente, porém logo elas desenvolvem sua própria combinação de sistemas de escorregamento. A formação de uma MB-I é, portanto, é um mecanismo de nucleação de um novo CB, que permite compatibilizar a rotação de diferentes partes do grão original. MB-I formam-se de forma gradual a partir das DDWs e não se observa o surgimento de deformação angular quando se atravessa as fronteiras da MB-I ou na intersecção de uma MB-I com um contorno de grão (deformação angular em MB-I pré-existentes pode se desenvolver com a continuação da deformação plástica).

Segundo Bay *et al.* tanto as DDWs quanto as MB-I não apresentam uma relação de orientação específica com o grão matriz, podendo se alinhar tanto com um plano de alto índice ou com um plano de escorregamento. Esta distinção e a ausência de deformação angular através da interface é importante para diferenciar as MB-I das "Microbandas de segunda geração" (MB-II), que se formam em Níquel e Cobre laminados (mas não são observadas em Alumínio). As MB-II, portanto, formam-se com uma relação de orientação fixa com o grão matriz e apresentam uma deformação angular significativa através da interface.

Os autores ainda descrevem resultados de observação de estruturas de deformação em ligas Al-Mg (que apresenta escorregamento distribuído), que forma reticulados de Taylor e não células de discordâncias. Neste caso não há sentido em se referir a CBs, mas os autores denominam as regiões de atividade de sistemas de escorregamento específicos de "Domínios" e as interfaces de "contornos de domínio". Os autores identificam ainda "Microbandas" com as características semelhantes as MB-I observadas nos materiais com escorregamento distribuído.

# 7.4 Mecanismos de fratura dúctil

De acordo com George Dieter (Mechanical Metallurgy, McGraw-Hill, 2ed., 1976, p. 247):

"Fratura é a separação ou fragmentação de um corpo sólido em duas ou mais partes sob a ação de tensão."

Segundo esta definição, o processo de fratura envolve necessariamente a propagação de uma ou mais trincas no corpo sólido, sendo que estas trincas podem ser pré-existentes (como no caso dos materiais frágeis) ou serem nucleadas durante o carregamento do sólido.

Fratura em geral é caracterizada como:

- Dúctil, quando a propagação da trinca é acompanhada de extensa deformação plástica macroscópica e
- Frágil, quando a propagação da trinca ocorre sem o desenvolvimento de uma zona plástica extensa.

Um caso especial ocorre durante solicitações cíclicas: a **fratura por fadiga**, que será discutida no Capítulo 12.

## Fratura dúctil de monocristais

A fratura dúctil de monocristais com baixo teor de defeitos ocorre pela ação sucessiva de discordâncias (ou seja, por heterogeneidade de deformação) em um ou mais de um sistema de escorregamento.

Monocristais orientados para monodeslizamento (principalmente em estruturas onde a transição para o polideslizamento pode ser significativamente atrasada, como os materiais HCP) fraturam por cisalhamento, um exemplo deste comportamento é mostrado na Figura 7.18. Quando há a ativação de mais de um sistema de escorregamento a fratura procede da formação da estricção, neste caso a seção da amostra vai sendo continuamente reduzida até tornar-se praticamente um ponto (Fig. 7.19).

McClintock e Argon denominam este processo de **ruptura** ("rupture"), para diferenciálo da fratura dúctil por coalescimento de microcavidades (que será vista mais adiante), uma designação alternativa seria **colapso plástico**, já que a separação se dá pela ausência de seção resistênte no corpo de prova.



Figura 7.18: Exemplo de ruptura por cisalhamento de um corpo de prova monocristalino de alumínio



Figura 7.19: (a) Representação esquemática da formação de um "pescoço" em monocristal orientado para polideslizamento: processo que eventualmente levará à ruptura por colapso plástico, (b) exemplo de colapso plástico em um monocristal de ferro deformado a -196°C (à esquerda). O mesmo material, orientado diferentemente, mas deformado sob as mesmas condições rompe por clivagem (à direita).

Apesar de fortemente intuitivos, a fratura por cisalhamento e o colapso plástico são fenômenos raros, pois materiais normais apresentam barreiras à movimentação de discordâncias (contornos de grão, partículas de precipitados ou inclusões). Estes provocam concentrações de tensão em uma região localizada e, portanto, podem promover a nucleação da trinca antes do desenvolvimento completo do colapso plástico, levando à fratura prematura do material.

## Fratura por coalescimento de microcavidades ("dimples")

Um mecanismo possível de nucleação de trinca dúctil em material policristalino ou monocristalino contendo defeitos ocorre pela ação de empilhamentos de discordâncias contra barreiras ("dislocation pile-ups") que geram as chamadas trincas de Zener-Stroh (Fig. 7.20).



Figura 7.20: Representação esquemática do mecanismo de Zener-Stroh para nucleação de trincas pelo colapso de empilhamentos de discordâncias.

Outro mecanismo possível de nucleação de trincas em materiais dúcteis é pela rotação do reticulado (Fig. 7.21) produzida por:

- contornos de sub-grão ou
- por maclas mecânicas.



Figura 7.21: Representação esquemática dos mecanismos de nucleação de trincas por rotação de reticulado.

Os mecanismos anteriores são viáveis e explicam como surgem trincas em materiais dúcteis mesmo na ausência de partículas de segunda fase, porém os principais mecanismos de nucleação de trincas em materiais dúcteis envolvem precipitados ou inclusões (Fig. 7.22):

- por meio da fratura da partícula friável ou
- pela decoesão da interface.



Banda de deslizamento

Figura 7.22: Representação esquemática dos mecanismos de nucleação de trincas pela ação de precipitados.

Seja qual for a origem (trinca de Zener-Stroh, trinca por rotação de reticulado ou trinca mediada por precipitado), após nucleada a trinca produz um concentrador de tensão no interior do material. Por ação da tensão remota surge uma zona plástica ao redor deste concentrador que tende a arredondar a sua superfície (ou seja, aumentar o raio de curvatura) para contrabalançar o incremento da tensão reduzindo a severidade do entalhe,  $K_t$ . A **micro-cavidade** assim formada adquire logo um formato esférico (ou elipsoidal, dependendo do estado de tensão) e, com o aumento da tensão real remota, seu raio começa a aumentar.

As micro-cavidades assim formadas, também conhecidas pelo termo em inglês "dimples", crescem com o incremento da tensão real até que as superfícies de duas cavidades vizinhas se toquem, gerando uma cavidade de dimensões maiores. Note que o crescimento das micro-cavidades provoca um aumento da concentração de tensão local e o processo se retro-alimenta. Este processo de propagação de trincas é conhecido como **fratura por coealescimento de micro-cavidades** ou simplesmente **fratura por dimples** (Fig. 7.23).

A seqüência de eventos que levam à fratura por coalescimento de micro-cavidades é:

- Nucleação da micro-cavidade
  - por fratura do precipitado

- por decoesão da interface matriz-precipitado
- Crescimento da micro-cavidade
- Coalescimento das micro-cavidades
- Fratura final
  - por propagação instável de trinca (se *K*<sub>*Ic*</sub> for ultrapassado)
  - por colapso plástico localizado





A superfície de fratura por coalescimento de micro-cavidades é rugosa e tem uma aparência acinzentada pois as cavidades espalham a luz em diversas direções.

Freqüentemente encontra-se no centro de algumas cavidades a partícula que deu origem à mesma. Isto obviamente depende do cuidado com que se preserva a superfície de fratura após o ensaio. Vibração, dano mecânico e contamização da superfície de fratura pode causar a perda das partículas remanescentes. Deve-se lembrar ainda que, estatísticamente, apenas aproximadamente metade das cavidades irá conter as partículas originais, já que a outra metade deverá estar na outra superfície de fratura.

No momento em que duas micro-cavidades se tocam a seção resistente local desaparece, portanto a borda de uma cavidade corresponde ao local onde houve colapso plástico localizado. Em imagens de elétrons secundários obtidas em Microscópio Eletrônico de Varredura (MEV) as bordas das cavidades ficam iluminadas por um efeito de borda, que aumenta a concentração eletrônica no local.

## Modelo de McClintock para a fratura por coalescimento de microcavidades

Baseado em F. A. McClintock, On the mechanics of fracture from inclusions, *in:* "Ductility" Cap. 9, ASM, 1968, pp. 255-277

McClintock propôs um modelo simplificado para a fratura dúctil por coalescimento de micro-cavidades geradas a partir de inclusões. Este modelo permite estimar o alongamento de um material em termos de diversos parâmetros mecânicos e microestruturais que fornece indícios significativos sobre a dependência da ductilidade de um material com respeito a estes (especialmente com relação ao efeito da triaxialidade do estado de tensão). Iremos agora descrever este modelo simplificado em detalhe.

Consideremos uma distribuição de micro-cavidades cilíndricas com eixo ao longo da direção  $x_3$  (que corresponde ao eixo de carregamento) e seção transversal elíptica, com semi-eixos de dimensões *a* e *b*, separadas por distâncias  $l_a$  e  $l_b$ , conforme esquematizado na Fig. 7.24. Definimos os fatores de crescimento relativos,  $F_{za}$  e  $F_{zb}$  como:



Figura 7.24: Representação do reticulado de precipitados usado na construção do modelo de McClintock.

$$F_{za} = \frac{\frac{a}{l_a}}{\frac{a^i}{l_a^i}} \quad \text{e} \quad F_{zb} = \frac{\frac{b}{l_b}}{\frac{b^i}{l_b^i}} \tag{7.11}$$

onde o sobre-escrito i se refere aos valores iniciais destas variáveis.

A fratura irá ocorrer quando um dos semi-eixos (digamos *b*) atinjir a dimensão  $b^f$  tal que as cavidades se toquem, ou seja:

## 7.4 Mecanismos de fratura dúctil

$$b^{f} = \frac{l_{b}^{f}}{2} \Rightarrow F_{zb}^{f} \le \frac{l_{b}^{i}}{2b^{i}}$$
(7.12)

A seguir o autor representa os semi-eixos em termos do raio médio, R e da excentricidade, m da elipse, definidas como:

$$R = \frac{(a+b)}{2}$$
 e  $m = \frac{(a-b)}{(a+b)}$  (7.13)

e define a distância entre cavidades em termos da deformações plásticas nominais ( $\varepsilon_a \in \varepsilon_b$ ao longo dos eixos *a* e *b*):

$$\begin{cases} l_a = l_a^i \exp(\varepsilon_a) \\ l_b = l_b^i \exp(\varepsilon_b) \end{cases}$$
(7.14)

Em termos destas novas variáveis as equações 7.11 podem ser reescritas como:

$$\begin{cases}
F_{za} = \frac{R}{R^{i}} \frac{1-m}{1-m^{i}} \exp\left(-\varepsilon_{a}\right) \\
F_{zb} = \frac{R}{R^{i}} \frac{1-m}{1-m^{i}} \exp\left(-\varepsilon_{b}\right)
\end{cases}$$
(7.15)

Por outro lado, a evolução do raio médio e da excentricidade são dadas em termos da deformação plástica equivalente,  $\bar{\varepsilon}$  e das componentes transversais principais do tensor de tensão,  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  por:

$$\ln \frac{R}{R^{i}} = \frac{\bar{\varepsilon}\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh\left[\frac{\sqrt{3}(1-n)}{2}\frac{\sigma_{a}+\sigma_{b}}{\overline{\sigma}}\right] + \frac{\varepsilon_{a}+\varepsilon_{b}}{2}$$

$$m = \frac{\sigma_{a}-\sigma_{b}}{\sigma_{a}+\sigma_{b}} + \left(m^{i}-\frac{\sigma_{a}-\sigma_{b}}{\sigma_{a}+\sigma_{b}}\right) \exp\left\{-\frac{\sqrt{3}\bar{\varepsilon}}{(1-n)}\sinh\left[\frac{\sqrt{3}(1-n)}{2}\frac{\sigma_{a}+\sigma_{b}}{\overline{\sigma}}\right]\right\}$$
(7.16)

Segundo McClintock estas equações devem ser integradas incrementalmente de forma que as tensões e o expoente n sejam aproximadamente constantes em cada passo. Para grandes razões de crescimento relativo e assumindo que a razão das tensões não varia significativamente durante a integração as equações podem ser resolvidas para a deformação limite e se aproximam de:

$$\varepsilon_f \simeq \frac{(1-n)\ln\frac{l_b^i}{2b^i}}{\sinh\left[(1-n)\beta\right]} \tag{7.17a}$$

## 7.4 Mecanismos de fratura dúctil

onde

$$\beta = \frac{\sqrt{3}\left(\sigma_a + \sigma_b\right)}{2\overline{\sigma}} \tag{7.17b}$$

mede aproximadamente o grau de triaxialidade do estado de tensão, tal que quanto maior for seu valor, maior será a componente hidrostática de tração do estado de tensão.

A equação derivada por McClintock não resulta em uma boa concordância quantitativa com dados experimentais (mas seu comportamento qualitativo concorda com estes dados), superestimando largamente o alongamento. Ela permite entretanto intuir o efeito de diversos parâmetros sobre a ductilidade do material.

Um aumento da fração volumétrica de precipitados pode ser acomodado por um aumento de  $b^i$  ou um decréscimo de  $l_b^i$ , ou mesmo por ambos (um argumento equivalente pode ser aplicado para *a*), isto vale independente da forma dos precipitados. Materiais mais "limpos" (ou seja, com menor fração volumétrica de inclusões), portanto, apresentam ductilidades maiores (via de regra).

Com relação ao coeficiente de encruamento, a expressão de McClintock prevê que quanto maior o parâmetro *n*, maior será a ductilidade (isto está relacionado ao seno hiperbólico no denominador, pois ele tende a zero mais rapidamente que o numerador quando o argumento tende a zero).

Por fim, quanto mais "triaxial" for o estado de tensão (ou seja, quanto maior a componente hidrostática de tração) menos dúctil será o material. Isto permite prever o fato experimentalmente verificado de que a aplicação de uma pressão externa sobre o material tem o efeito de aumentar a sua ductilidade.

## Fratura taça-cone

O desenvolvimento da fratura dúctil em um material, por exemplo, num corpo de prova de tração, envolve duas etapas:

- uma etapa inicial, onde a fratura se propaga em um plano perpendicular ao eixo de aplicação da tensão e
- uma etapa final, onde a fratura se propaga a 45° do eixo de aplicação da tensão.

Esta etapa final é conseqüência da formação de uma heterogeneidade de deformação característica do estado plano de tensão, denominada **banda de cisalhamento** e gera, em corpos de prova de tração, a morfologia conhecida como fratura taça-cone.

- A presença da fratura a 45° permite identificar em uma fratografia qual foi o ponto de término da trinca.
- A fratura a 45° também está presente em corpos de prova de tenacidade à fratura em uma morfologia conhecida como "shear lip", que é indicativa de dominância do estado plano de tensão durante a fratura do corpo de prova.
- McClintock (citado anteriormente) discute 2 critérios aproximados para a transição da fratura plana à fratura a 45°, que apesar de aproximados permitem identificar os principais parâmetros que controlam a transição.

# 7.5 Bandas de cisalhamento

Bandas de cisalhamento correspondem à heterogeneidade de deformação mais comum observada em praticamente todas as classes de materiais. Elas são encontradas em:

- Materiais metálicos policristalinos.
- Materiais metálicos monocristalinos.
- Materiais metálicos amorfos (vidros metálicos).
- Materiais cerâmicos cristalinos.
- Materiais cerâmicos amorfos.
- Materiais poliméricos amorfos.
- Sistemas granulares.

#### Baseado em M. A. Meyers et al. Mater. Sci. Engng. A vol. 317 (2001) 204-225.

Bandas de cisalhamento correspondem a regiões de acúmulo de deformação angular no interior de um material, caracterizadas por se localizarem em orientações aproximadamente a 45° da máxima tensão normal (o ângulo entretanto pode variar). Um exemplo de banda de deformação em material metálico pode ser visto na Figura 7.25. Bandas de cisalhamento não interagem fortemente com defeitos microestruturais (por exemplo, elas são praticamente

#### 7.5 Bandas de cisalhamento



Figura 7.25: Exemplo de formação de bandas de cisalhamento em tântalo (CCC) deformado em compressão com  $\varepsilon = -0, 6$  a uma taxa de deformação elevada ( $\dot{\varepsilon} = 5500 \text{ s}^{-1}$ ). Fonte: M. A. Meyers et al. *Mater. Sci. Engng. A*, vol. **322** (2002), pp. 194-216.

insensíveis a contornos de grão em materiais cristalinos), formando-se sem orientações preferenciais com a matriz cristalina (porém apresentam forte dependência da geometria de carregamento).

A nucleação e o crescimento de bandas de cisalhamento é o principal mecanismo deformação plástica de materiais amorfos inorgânicos (metálicos, cerâmicos) e um dos principais mecanismos de deformação de polímeros amorfos (ao lado de microfibrilamento, ou *crazing*, sendo que este último é observado apenas quando a componente hidrostática do tensor de tensão for positiva). Esta preponderância no caso dos materiais amorfos, entretanto, não diminui a importância das bandas de cisalhamento no caso dos materiais cristalinos.

Ainda não se compreende totalmente qual é o mecanismo de formação de bandas de cisalhamento, porém especula-se que ele esteja ligado a um efeito sinergético entre a deformação plástica e o aquecimento localizado gerado por esta. Existem evidências relacionadas a cerâmicas (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> e SiC) e sistemas granulares de que a temperatura local pode atingir valores da ordem da temperatura de fusão do material (Típicamente acima de 2000 °C !). Seja qual for o mecanismo, a generalidade do fenômeno indica que ele é um aspecto fundamental da deformação plástica na natureza.

#### Modelo de Argon-Bulatov

Em 1994 Argon e Bulatov propuseram um modelo bidimensional estocástico para o estudo da deformação plástica de sólidos contínuos, baseado na subdivisão do meio em unidades de simetria hexagonal que podem se deformar independentemente. Segundo os resultados obtidos os autores puderam identificar que o evento unitário da deformação plástica nestes materiais é o cisalhamento de pequenas regiões que se desenvolvem homogeneamente em altas temperaturas, mas que se concentram em regiões de cisalhamento intenso ("bandas de cisalhamento") em baixas temperaturas. Este modelo permite intuir a origem da localização plástica em materiais
amorfos, principalmente nos inorgânicos. Os resultados encontram-se reproduzidos na Figura 7.26:



Figura 7.26: Resultados de simulações da deformação plástica em 2D de materiais isotrópicos contínuos segundo o modelo de Argon-Bulatov. Regiões de cisalhamento intenso com geometria aproximadamente elipsoidal (a) se formam ainda no regime elástico e crescem, organizando-se em padrões característicos das bandas de cisalhamento (b) e (c). Fonte: Adaptado de V. V. Bulatov and A. S. Argon *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.* vol. **2** (1994) 167–184.

## Teoria das zonas de transformação por cisalhamento de Falk e Langer

Em 1998 M. L. Falk e J. S. Langer (*Phys. Rev. E*, vol. **57**, 1998, pp. 7192 – 7205) publicaram resultados preliminares de simulações por dinâmica molecular da deformação plástica de sólidos amorfos usando um modelo bidimensional simplificado, onde as "moléculas" interagem por meio de um potencial de van der Waals. Com base nestes resultados os autores propuseram que:

... a dynamically complete description of the macroscopic state of this deforming body requires specifying, in addition to stress and strain, certain average features of what we shall call "shear transformation zones." These zones are small regions, perhaps consisting of only five to ten molecules, in special configurations

#### 7.5 Bandas de cisalhamento

that are particularly susceptible to inelastic rearrangements in response to shear stresses.

Segundo os autores o modelo proposto permite reproduzir várias características da deformação plástica de sólidos amorfos, como por exemplo:

- deformações elásticas reversíveis a baixas tensões,
- deformações irreversíveis (plásticas) a altas tensões,
- a existência de um limite de tensão acima do qual deformação plástica extensa é observada e
- a forte dependência do estado do sistema na história das deformações passadas.

As zonas de transformação por cisalhamento (STZ, *shear transformation zones*) formam o principal ingrediente de uma teoria que se propõe não apenas a descrever a deformação plástica de sólidos amorfos, mas sim de todos os materiais (por exemplo, o deslizamento de uma discordância por um vetor de Burgers seria nada mais, nada menos que a formação de uma STZ na região do núcleo da mesma).

A teoria das STZs promete trazer muita novidade no campo da mecanística da deformação plástica no futuro próximo. Recomenda-se, portanto, que o leitor interessado no assunto matenhase em contato com as publicações de M. S. Falk.

#### Bandas de cisalhamento em cerâmicas e sistemas granulares

Shih et al. (*J. Appl. Phys.* vol. **83**, 1998, p. 4660f) propuseram uma explicação para justificar a localização do cisalhamento em cerâmicas e sistemas granulares sujeitos a uma tensão de confinamento. Segundo estes autores, a localização surge para evitar a dilatação na direção perpendicular ao esforço de cisalhamento e pode ocorrer por:

- i . cominuição das partículas, formando uma camada de detritos que age como lubrificante e auxilia na localização da deformação (partículas de dimensões superiores a um dado tamanho crítico  $a_c$ ) e
- ii . deformação plástica localizada, que aumenta a temperatura no local a tal ponto que o material chega a fundir e solidificar (partículas de dimensões inferiores a um dado tamnho crítico  $a_c$ ).

# 7.6 Deformação e fratura de polímeros

A deformação plástica de polímeros envolve o deslizamento (ou seja, o cisalhamento relativo) de macromoléculas. A deformação plástica de polímeros amorfos ocorre por meio de dois mecanismos competitivos:

- por microfibrilamento (MFB ou "crazing") e
- por bandas de cisalhamento ("shear bands").

Já no caso de polímeros semi-cristalinos, a deformação plástica envolve o rearranjo das macromoléculas que se encontram originalmente organizadas na forma de esferulitos, resultando no alinhamento das cadeias poliméricas na direção de aplicação da tensão (processo conhecido como **estiramento a frio** ("cold drawing").

Microfibrilamento é um mecanismo de deformação mais característico de polímeros frágeis, desta forma ele será discutido em conexão com a fratura de materiais amorfos frágeis (na próxima seção).

Alguns aspectos importantes:

- Crazes são regiões compostas por cadeias alinhadas (as fibrilas) e porosidade em dimensões moleculares, já bandas de cisalhamento são regiões localizadas de cadeias alinhadas na direção de máxima tensão de cisalhamento.
- Ambos os mecanismos apresentam sensibilidade à tensão hidrostática aplicada, sendo que o microfibrilamento requer uma componente de dilatação no estado de tensão, ou seja, bandas de cisalhamento são privilegiadas pela ação de tensões hidrostáticas compressivas.
- Microfibrilas não são trincas, elas podem transferir tensão ao longo de sua espessura, porém elas são sítios privilegiados para a nucleação de trinca.
- Microfibrilas formam-se no plano perpendicular à máxima tensão normal de tração, sem qualquer contração lateral apreciável.

## 7.6.1 Nucleação de MFBs

A Figura 7.27 representa esquematicamente os eventos que ocorrem durante a nucleação de MFBs em um polímero incialmente coeso.



Figura 7.27: Representação esquemática dos eventos que potencialmente levam à nucleação de uma MFB a partir de um polímero inicialmente coeso. Fonte: Peres, F. M., *Diss. mestrado*, Dept<sup>o</sup>. Eng<sup>a</sup>. Metalúrgica e de Materiais, Escola Politécnica da USP, 2005. Disponível em http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3133/tde-08112005-092736.

#### Modelamento micromecânico de MFBs

O modelamento micromecânico de MFBs é essencial para a quantificação da tenacidade à fratura em polímeros frágeis, como discutido anteriormente. Infelizmente, entretanto, a nossa compreensão do fenômeno ainda é escassa. Apenas como um exemplo, cito dois trabalhos recentes sobre o assunto:

- R. Marisen, *Polymer*, vol. 41, 2000, pp. 1119-1129 e
- M. G. J. Thijsen et al. Int. J. Solids Struct. vol. 37, 2000, pp. 7307-7327.

O primeiro autor discute a estrutura de uma MFB e aplica os resultados clássicos da mecânica da fratura para analisar a taxa de crescimento da MFB em função do carregamento em função de *K*, considerando a MFB como uma trinca com faces ancoradas (pelas fibrilas). Os resultados são aplicados ao crescimento de MFBs em PMMA. O autor postula em seu modelo que as fibrilas não sofrem ruptura, concluindo que neste caso há uma desaceleração na taxa de crescimento. Ele argumenta, entretanto, que este efeito deixa de ser válido caso as fibrilas se rompam (aumentando o valor de *K* efetivo atuando sobre a ponta da MFB).

Os autores do segundo trabalho utilizam uma abordagem diferente da adotada por Marisen, considerando a MFB como uma trinca de Dugdale-Baremblatt, governada por uma lei coesiva superficial (ou seja, uma relação tensão - deformação hipotética que reproduz as propriedades de carregamento da MFB). Os resultados foram aplicados a simulações por elementos finitos e os autores concluem que grades muito refinadas são necessárias para o modelamento correto do comportamento das MFBs em polímeros amorfos.

## Fratura em polímeros semi-cristalinos

A Fratura de polímeros semi-cristalinos pode ser mais complexa que a observada para os polímeros amorfos já que uma nova variável interfere com o caminho da trinca: a microestrutura. Como um exemplo, temos estudos detalhados sobre a fratura de polipropileno isotático, i-PP (que se caracteriza por cristalinidades elevadíssimas, superiores a 99%). Estes estudos mostram que:

- A fratura em i-PP pode ocorrer em quatro caminhos microestruturais diferentes, podendo ser inter ou intra ou trans-esferulítica (Figura Hertzberg).
- Geralmente há uma transição entre a fratura inter-esferulítica (observada a baixas velocidades de propagação da trinca) para totalmente trans-esferulítica com o aumento da velocidade de propagação.
- O caráter inter-, intra- ou trans-esferulítico pode ficar obscurecido caso ocorra deformação plástica significativa previamente à fratura.

Apesar de a tentação ser grande, não devemos generalizar estas observações para outros polímeros semicristalinos. Como um exemplo, F. M. Peres<sup>6</sup> mostrou que as superfícies de fratura de corpos de prova de tração de polietileno de média densidade (que também se caracterizam por cristalinidades elevadas), não apresemtam nenhum sinal de iteração com a microestrutura.

# 7.7 Maclação mecânica

Maclação mecânica, após escorregamento de discordâncias, é o segundo mecanismo de deformação de materiais cristalinos em importância. Em alguns casos (estruturas cristalinas

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Peres, F. M., *Diss. mestrado*, Dept<sup>o</sup>. Eng<sup>a</sup>. Metalúrgica e de Materiais, Escola Politécnica da USP, 2005. Disponível em http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3133/tde-08112005-092736.

complexas) chega a ser o mais importante. Efeitos indiretos devidos à maclação, entretanto, são observados mesmo em materiais que apresentam deformação por escorregamento de discordâncias, entre estes podemos citar:

- Aumento da taxa de encruamento
- Aparecimento de escoamento serrilhado
- Nucleação de trincas de clivagem

A Figura 7.28 apresenta os deslocamentos atômicos aobservados na interface matriz-macla em um cristal bi-dimensional retangular centrado hipotético.



Figura 7.28: Macla (21) em cristal bi-dimensional retangular centrado. Os átomos representados em vermelho tracejado correspondem às posições esperadas para o cristal perfeito (caso a macla não existisse).

- Uma macla é caracterizada por dois planos que permanecem não distorcidos nos dois lados da interfece (um deles é o plano de hábito).
- Uma macla produz o cisalhamento relativo de duas porções do cristal, sendo que o vetor deslocamento tem magnitude proporcional à distância do plano de hábito.
- Maclas podem ser interpretadas como rotações ou inversões do reticulado relativamente ao plano de hábito (para estruturas cristalinas simples, como a representada na figura anterior, as operações de rotação e inversão podem ser equivalentes).

## Representação geométrica

Consideremos uma esfera unitária de um cristal e promovamos a formação de uma macla no hemisfério superior (sendo o plano equatorial o plano de hábito da macla). As coordenadas da esfera estarão relacionadas às coordenadas originais por (X' = X, Z' = Z e Y' = Y + SZ,onde *S* é a magnitude da deformação angular produzida pela macla). A geometria da porção distorcida da esfera será dada por:

$$X^{\prime 2} + Y^{\prime 2} + Z^{\prime 2} = 1 \Rightarrow X^{2} + Y^{2} + 2SZY + Z^{2} \left(S^{2} + 1\right) = 1$$
(7.18)

A equação do lado direito corresponde a uma forma quadrática que representa um elipsóide com eixo maior situado a um ângulo  $\phi$  do plano de hábito. Graficamente podemos representar as transformações descritas acima comforme apresentado na Fig. 7.29.

- Iniciamos o processo com a esfera original, orientada de tal forma a ter seu plano equatorial equivalente ao plano de hábito da futura macla  $(K_1)$ .
- Formamos a seguir a macla no hemisfério superior. O deslocamento do polo ao longo da direção de maclação (η<sub>1</sub>) corresponderá a S.
- Fica evidente que alguns planos serão comprimidos (por exemplo, em A, as distâncias na metada maclada são menores que na esfera original).
- Já outros planos serão expandidos (por exemplo, em B, as distâncias são maiores na metade maclada que na esfera original).
- É importante ressaltar que há um plano ( $C \rightarrow C'$ ) que permanece invariante na transformação.

## 7.7.1 A tensão de maclação ( $\sigma_M$ )

#### Leitura recomendada: M. A. Meyers et al. Acta Mater. 49 (2001) 4025-4039.

Maclação e escorregamento de discordâncias são mecanismos competitivos de deformação plástica, portanto aquele que ocorrer a uma tensão menor irá dominar os estágios iniciais da deformação plástica.

A tensão necessária à nucleação da macla ( $\sigma_M$ ) é cerca de cinco vezes maior que a necessária para seu crescimento logo a maclação é controlada por nucleação.

#### 7.7 Maclação mecânica



Figura 7.29: Representação geométrica do cisalhamento produzido por uma macla no hemisfério superior de uma esfera unitária.

Aparentemente  $\sigma_M$  é independente (ou tem uma dependência muito fraca) da temperatura, entrentanto  $\tau_{CRSS}$  tem uma forte dependência decrescente com a temperatura, desta forma a diminuição da temperatura favorece o aparecimento de maclação (idem para a taxa de deformação).

Mesmo em metais que deformam por escorregamento de discordâncias, maclação é possível se o nível de tensão ultrapassar  $\sigma_M$ , causando um aumento do coeficiente de encruamento do material.

Outros fatores que afetam  $\sigma_M$ :

 Tamanho de grão (d): a tensão de maclação obedece à relação de Hall-Petch (Eq. 7.19), assim como a deformação por escorregamento de discordâncias, porém com um coeficiente de proporcionalidade muito maior (de três a seis vezes, logo a diminuição do tamanho de grão favorece a deformação por escorregamento de discordâncias em detrimento à maclação.

$$\sigma_M = \sigma_M^0 + \frac{k_M}{\sqrt{d}} \tag{7.19}$$

 Energia de defeitos de empilhamento (γ<sub>EDE</sub>), um resultado clássico (Venables, 1961) em metais CFC estabelece que:

$$\sigma_M \propto \sqrt{\frac{\gamma_{EDE}}{Gb}} \tag{7.20}$$

aparentemente há uma tendência semelhante para metais CCC e HCP.

 Estado de tensão: aparentemente há uma leve expansão do reticulado nas proximidades do plano de hábito, isto indica que a componente hidrostática do estado de tensão deve afetar a tensão de maclação, entretanto, este efeito deve ser muito reduzido, já que não há diferença apreciável de densidade entre a matriz e a macla.

## 7.8 Mecanismos de fratura frágil

Fratura frágil é definida como aquela que ocorre com baixa energia absorvida, isto implica em pouca deformação plástica macroscópica. Dois mecanismos são identificados em materiais cristalinos:

- I. Clivagem  $\rightarrow$  ruptura das ligações em um dado plano cristalino, fratura transgranular.
- II . Fratura intergranular  $\rightarrow$  contornos de grão fragilizados, a trinca caminha ao longo dos contornos de grão.

## 7.8.1 Clivagem

Clivagem é o nome dado à fratura transgranular em materiais cristalinos (não apenas metálicos). Este modo de fratura apresenta como característica morfológica principal a presença de facetas correspondentes aos planos cristalográficos nos quais a trinca se propaga. Apesar das facetas, a morfologia de fratura muitas vezes contém estruturas características, denominadas "marcas de rio" ("river marks"). Esta morfologia ocorre quando a trinca principal se propaga em planos paralelos, formando degraus entre eles. Estes degraus coalescem com o avanço da trinca, gerando uma morfologia semelhante à de um rio recebendo seus tributários (daí o seu nome).

A Figura 7.30 apresenta o modelo atualmente aceito para a formação dos degraus no plano de clivagem. Uma trinca de clivagem propagando-se da esquerda para a direita incide sobre uma discordância em hélice com direção de linha perpendicular a este plano. Como conseqüência um lado do plano se torna mais elevado que o outro produzindo um degrau de magnitude equivalente ao vetor de Burgers da discordância.

Naturalmente discordâncias isoladas não são capazes de gerar os degraus de tamanho da ordem de 1  $\mu$ m ou mais, observados experimentalmente. Desta forma diversas discordâncias devem estar envolvidas na formação destes degraus, agindo coletivamente. Discordâncias em hélice são particularmente freqüentes nos chamados contornos de rotação (*twist boundaries*)



Figura 7.30: Modelo explicativo para a formação de degraus em planos de clivagem.

que são contornos de baixo ângulo formados por arranjos de discordâncias em hélice <sup>7</sup>. A Figura 7.31 mostra um exemplo deste fenômeno. Esta figura mostra uma faceta de clivagem em Fluoreto de Lítio que se propagou aproximadamente da parte superior da foto em direção à parte inferior. Aproximadamente no centro da foto a trinca de clivagem encontra um contorno de rotação aproximadamente perpendicular à direção de propagação. Nota-se a profusa nucleação de degraus quando a trinca ultrapassa este contorno. Posteriormente os degraus coalescem pelo encontro fortuito de dois degraus diferentes, gerando o padrão clássico de "marcas de rio".

Um outro exemplo é mostrado na Figura 7.32. Esta figura apresenta a superfície de fratura de um aço ao silício (liga Fe-3%Si) que fraturou por clivagem, como evidenciado pelas "marcas de rio". Esta trinca encontrou um contorno de inclinação (*tilt boundary*)<sup>8</sup> localizado aproximadamente na diagonal da foto que vai do canto superior direito ao canto inferior esquerdo. Nota-se que apesar dos degraus pré-existentes terem se desviado por um dado ângulo quando a trinca atravessou este contorno, não há a nucleação de novos degraus.

Os degraus de clivagem tem um papel importante no cômputo da energia de fratura. A decoesão do plano principal é um processo de baixa energia, porém no encontro de dois degraus ocorre a ruptura do ligamento, que requer deformação plástica, um processo de alta energia. Este processo está esquematizado na Figura 7.33 ilustra este processo.

## 7.8.2 Fratura intergranular

A fratura intergranular ocorre quando a interface entre os grãos é menos coesa que o seu interior, isto pode ocorrer se algum processo diminuir a coesão no contorno (por exemplo, por

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Este nome advém do fato que estes contornos separam duas porções do cristal relacionadas por uma rotação perpendicular ao plano do contorno.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Que é formado predominantemente por discordâncias em cunha.



Figura 7.31: Demonstração da formação de degraus na faceta de uma trinca de clivagem se propagando na direção vertical, no sentido do lado inferior da figura, quando esta encontra um contorno de rotação (*twist boundary*) localizada aproximadamente no centro da imagem. Posteriormente os degraus coalescem, gerando o padrão clássico de "marcas de rio". O material é um cristal de Fluoreto de Lítio (LiF).



Figura 7.32: Superfície de clivagem em aço silício (3% Si) com a trinca se propagando verticalmente no sentido da parte inferior da figura. Nota-se que o encontro com um contorno de inclinação (linha mais clara, na diagonal que vai do canto superior direito ao canto inferior esquerdo) não produz a nucleação de novos degraus.



Figura 7.33: Modelo ilustrativo do papel da deformação plástica na ruptura do ligamento quando do encontro de planos de clivagem paralelos (a) formando um degrau (b). A ruptura do ligamento em (c) envolve a dissipação de energia por deformação plástica, se ela for possível no material.

segregação de elementos como enxofre e antimônio para o contorno de grão no aço ou então pelo ataque por metal líquido, por exemplo no caso de gálio em alumínio) ou então quando o contorno é intrínsecamente menos coeso que o interior do grão, o que é o caso de estruturas cristalinas mais complexas, onde a estrutura do contorno contém mais espaço livre (por exemplo, nos aluminetos de ferro ou de níquel, para alto teor de alumínio).

A fratura intergranular é facilmente distingüível por técnicas de fratografia: ela se caracteriza por evidenciar a morfologia tridimensional dos grãos.

É importante ressaltar que a identificação da forma tridimensional dos grãos não implica necessariamente na ocorrência do mecanismo de fratura intergranular. Isto pode ser observado na sequência de fractografias apresentada na Figura 7.34.

Estas figuras<sup>9</sup> apresentam a superfície de fratura de um corpo de prova de tração extraído de um tubo fundido por centrifugação de liga 20Cr32Ni+Nb (ASTM A351 grau CT15C) no estado bruto de fusão, observadas em microscópio eletrônico de varredura (com imagens de elétrons secundários). Vê-se que em baixas magnificações (Fig. 7.34a) a microestrutura dendrítica característica deste material fundido (uma zona equiaxial na parte superior e uma zona colunar na parte inferior), sugerindo que esta fratura ocorreu por um mecanismo de fratura intergranular (ou no presente caso, interdendrítica). Esta conclusão é corroborada pela imagem na magnificação intermediária (Fig. 7.34b), onde se observam nitidamente os braços primários e secundários das dendritas, nota-se, entretanto que a superfície das dendritas é rugosa. Em magnificação elevada, entretanto, vemos microcavidades (*dimples*) que atestam que a fratura ocorreu por um mecanismo essencialmente dúctil na escala microscópica. A propósito esta amostra rompeu com um alongamento total de 50,8%, o que, definitivamente, não é característico de um material frágil.

#### Fratura frágil em materiais amorfos

Segundo Argon e McClintock a velocidade de propagação de trincas em sólidos frágeis é limitada superiormente pela velocidade de Rayleigh, que corresponde a 0,92 a 0,95 (para materiais com coeficiente de Poisson  $0,25 \le v \le 0,5$ ) da velocidade de ondas elásticas de cisalhamento no sólido, definida como:

$$v_{\gamma} = \left(\frac{G}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.21}$$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Fonte: L. S. Monobe "Caracterização do envelhecimento da liga 20Cr32Ni+Nb fundida por centrifucação e do seu efeito sobre o comportamento mecânico a frio" *Dissertação de Mestrado*, São Paulo: EPUSP, 2007.



Figura 7.34: Seqüência de fractografias de um corpo de prova de tração de aço resistente ao calor ASTM A351 Grau CT15C (20Cr32Ni1Nb) fundida por centrifugação: (a) magnificação baixa, (b) magnificação intermediária e (c) magnificação alta.

onde G é o módulo de cisalhamento e  $\rho$  a densidade do material.

Para velocidades menores ( $\approx 0, 66v_{\gamma}$ ), entretanto, a trinca sofre **bifurcação**. A velocidade de propagação das trincas tmabém é afetada pela composição do vidro (experimentos de Schardin em 1959 sugerem que a adição de PbO ao vidros de sílica pode reduzir em cerca de 50% a velocidade de propagação das trincas).

A superfície de fratura em materiais amorfos frágeis (como vidros ou polímeros termorígidos, por exemplo) apresenta uma série de características morfológicas específicas que auxiliam o observador a deduzir as características da propagação da trinca durante a fratura do material:

- Três zonas principais:
  - Zona especular ("mirror") ← início da propagação da trinca.
  - Zona difusa ("mist") ← aceleração da trinca e preparação para a bifurcação.
  - Zona rugosa ("hackle") ← propagação a velocidade constante, flutuação da frente da trinca devida à interação com ondas elásticas ou devido à bifurcação.
- Além destas marcas, podem-se observar outras características morfológicas, como "rib marks" e linhas de Wallner.

As características acima, na verdade, também são válidas para a fratura instável transgranular (por clivagem) em materiais cristalinos. Nesta caso, porém os aspectos podem interferir com a microestrutura (por exemplo, com contornos de grão ou se sub-grão) tornando mais complexa sua análise.

## Exercício 7.4

A Figura 7.35 apresenta a fratografia da superfície de fratura de um corpo de prova de flexão em três pontos de uma amostra de junta metal(aço)-cerâmica(TiN/Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>) brazada com liga ativa CuTiSiNi retirada da literatura (G. Blugan et al. *Acta Mater.* **52**, pp. 4579-4588, 2002). A fratura em questão ocorreu na cerâmica próximo à junta brazada e a imagem apresenta as duas metades do corpo de prova fraturado, vistas de topo, justapostas de tal forma que o ponto de iniciação da trinca se situa no centro da imagem. Com base nesta Figura:

- a. Descreva as características morfológicas desta superfície de fratura.
- b. Os autores indicam o ponto de origem da fratura na região circundada pelo círculo tracejado.
   Como os autores chegaram a esta conclusão?



Figura 7.35: Superfície de fratura de corpo de prova de flexão de três-pontos de uma junta metal-cerâmica brazada, fraturado na metade cerâmica do mesmo, próximo à junta. Vista de topo das duas metades do corpo de prova. O ponto de origem da fratura encontra-se circundado pelo círculo tracejado. As linhas tracejadas indicam as fronteiras aproximadas da região onde a fratura foi perturbada pelas tensões de compressão do corpo de prova de flexão de três-pontos.

## Fratura em polímeros amorfos

A fratura de polímeros amorfos vítreos (como por exemplo o poliestireno) também é caracterizada pelas três zonas (mirror, mist e hackle), porém a origem é diversa (envolvendo microfibrilamento e a ruptura das fibrilas).

É possível observar-se a formação de cavidades parabólicas na zona difusa, que são evidência da nucleação de microcavidades à frente da trinca. A parábola é orientada com seu eixo na direção da propagação da trinca.

# 7.9 Aplicação: Ensaios de impacto

A resposta de um material a um esforço mecânico geralmente depende da forma como a carga é aplicada sobre o mesmo. Desta forma os ensaios mecânicos, desenhados para quantificar estes comportamentos, devem necessariamente reproduzir estas curvas de carregamento da forma mais fiel possível. Podemos dividir os ensaios mecânicos em duas classes principais:

• Ensaios estáticos, onde a carga é crescente e aplicada de tal forma a resultar em baixas taxas de deformação (exemplos: ensaios de tração, dureza, flexão, etc...)

• Ensaios dinâmicos, onde a carga varia rapidamente com o tempo, podendo ser crescente ou de amplitude variável (exemplos: ensaios de impacto, ensaios de fadiga)

Nesta seção discutiremos os ensaios de impacto e os ensaios empregados para caracterizar o comportamento mecânico de materiais frágeis.

Os ensaios de impacto são caracterizados por simplicidade e pela simulação realista das condições de deformação dinâmicas, que ocorrem na prática (esforços de impacto).

Normas: ASTM-E23 (D256 para polímeros), ABNT MB-1116, DIN 50115.

## 7.9.1 Ensaios de pêndulo de impacto

A Figura 7.36 representa esquematicamente um pêndulo de impacto e as veriáveis utilizadas no cálculo da energia absorvida na fratura.



Figura 7.36: Representação esquemática de um pêndulo de impacto e das variáveis utilizadas no cálculo da energia absorvida na fratura.

Alta taxa de deformação, estado triaxial de tensões (na ponta do entalhe), concentração de tensões na ponta do entalhe levam ao favorecimento da fratura frágil.

$$E_f = mg(h_0 - h_1) \tag{7.22}$$

Onde *m* é a massa do martelo, *g* é a aceleração da gravidade,  $h_0$  e  $h_1$  são respectivamente as alturas inicial e final do martelo.

A norma admite duas geometrias de corpos de prova:

- Charpy, usado predominantemente em materiais metálicos (Fig. 7.37)
- Izod, usado predominantemente em materiais poliméricos (Fig. 7.38)



Figura 7.37: Geometria do corpo de prova Charpy, de acordo com a norma ASTM E23.

Nota-se que apesar de materiais metálicos serem predominantemente ensaiados usando corpos de prova Charpy, a norma admite o uso de corpos de prova Izod.

## Ensaio de resistência ao impacto em polímeros

Norma ASTM D256-90b:

A norma admite a utilização de corpos de prova Charpy ou Izod, porém Izod é mais comum para polímeros.

O corpo de prova deve ser extraído de material moldado por compressão para evitar que orientações moleculares (texturas) características dos outros processos de conformação de polímeros interfiram no resultado do ensaio. Neste caso A direção de compressão deve ser paralela à raiz do entalhe no corpo de prova usinado.

## Análise do ensaio de impacto

Apesar de ser amplamente utilizada como uma medida da energia absorvida na fratura, a variável  $E_f$  na verdade contém contribuições:



Figura 7.38: Geometria do corpo de prova Izod, segundo a norma ASTM D256-90b.

- i. do trabalho de fratura propriamente dito
- ii . do trabalho de deformação plástica do corpo de prova
- iii . do momento linear transferido à amostra quando esta é expelida da máquina (!)

A velocidade do pêndulo no momento do impacto pode ser estimada como:

$$v = \sqrt{2gh_0} \tag{7.23}$$

Supondo  $h_0 = 1$  m teríamos  $v \approx 4,5$  m/s. Assumindo que o comprimento característico no qual o corpo de prova sofre deformação plástica é de aproximadamente 5 mm, teremos que a taxa de deformação típica de um ensaio de impacto será da ordem de:

$$\dot{\varepsilon} \approx 10^3 \, \left[ \mathrm{s}^{-1} \right] \tag{7.24}$$

Corroborando a idéia de que o ensaio de pêndulo de impacto caracteríza esforços dinâmicos em alta taxa de deformação.

## 7.9.2 Transição dúctil-frágil

Em geral temos que para qualquer material:

$$E_f = f(T) \tag{7.25}$$

Vamos exemplificar com os resultados para um aço para vaso de pressão de reator nuclear (Fig 7.39).



Figura 7.39: Exemplo de curva de energia de fratura no ensaio Charpy em função da temperatura para aço usado na construção de vasos de pressão de reatores nucleares, apresentando transição dúctil-frágil. Fonte: http://www.mpmtechnologies.com/CharpyFit.htm (acesso: 30/4/2004).

Observamos nesta figura:

- uma região de alta energia absorvida, onde o corpo de prova apresenta uma fratura fibrosa, contração lateral na raiz do entalhe e superfície de fratura de aspecto acinzentado, que são tomados como característicos da fratura dúctil e
- uma região de baixa energia absorvida, onde o corpo de prova apresenta uma Fratura plana com pouca ou nenhuma contração lateral na raiz do entalhe e aspecto brilhante brilhante, que são tomados como característios da fratura frágil.

Estas características são gerais para materiais metálicos com estuturas CCC e HC (mas não CFC), em particular este efeito é crítico em aços ferríticos pois a transição ocorre em temperaturas próximas da ambiente (na qual estes aços são utilizados).



Figura 7.40: Exemplos de geometrias de corpos-de-prova Charpy e de superfície de fratura obtidos em ensaios de impacto na regão frágil (acima) e na região dúctil (abaixo). Fonte: http://www.ameceng.com.au/metmech/charpy\_impact\_testing.htm (acesso: 29/4/2004)

## Temperatura crítica da transição dúctil-frágil (T<sub>c</sub>)

Com base nos resultados fenomenológicos anteriores podemos postular a existência de uma **temperatura crítica da transição dúctil-frágil**,  $T_c$ , que seria característica da transição. Como vimos no exemplo da Figura 7.39, entretanto, a transição ocorre em uma ampla faixa de temperaturas. Isto se reflete na existência de diversos critérios para a definição de  $T_c$ , como por exemplo:

Critérios empíricos:

- Temperatura correspondente à média entre a energia do patamar dúctil e a energia do patamar frágil
- Temperatura correspondente a 15 J de energia absorvida
- Temperatura correspondente a 50% de fratura fibrosa
- Temperatura correspondente a existência de 1% de contração lateral na raiz do entalhe.

Obviamente apenas em casos fortuítos ou em transições particularmente bruscas estas diferentes definições coincidirão.

A temperatura de transição dúctil-frágil é afetada por: Composição química, Tratamento térmico, Processamento, Microestrutura e **Geometria do entalhe**. Esta última característica

mostra que  $T_c$  depende da geometria da amostra, o que reduz a sua transferibilidade para situações reais.

A diminuição do tamanho de grão resulta em um aumento da resistência (relação de Hall-Petch) e numa diminuição da temperatura de transição dúctil-frágil. Desta forma justifica-se a afirmação de que a redução do tamanho de grão é o único mecanismo de endurecimento que também aumenta a tenacidade. A redução da temperatura crítica pode ser quantificada por:

$$\frac{\mathrm{d}T_c}{\mathrm{d}d^{0,5}} = -\frac{1}{\beta} \tag{7.26}$$

Onde  $\beta$  é uma constante e *d* é o tamanho de grão do material.

## 7.9.3 Ensaio de queda de peso "Drop-weight test"

Norma: ASTM E208 (placas de aço)

Aplica-se um cordão de solda de material frágil a uma das faces da placa, a seguir usina-se um entalhe neste cordão de solda, cuja geometria não precisa ser sériamente controlada, já que a função do material frágil é somente nuclear um trinca que incidirá sobre a placa.

A outra face da placa recebe o impacto de um peso em queda livre a partir de uma determinada altura e o resultado obtido é qualitativo ("quebra" ou "não quebra") onde a ruptura significa que uma trinca propagou-se no lado tracionado da placa.

O ensaio de queda de peso, portanto, indica a habilidade que o material apresenta de parar uma trinca pré-nucleada (no cordão de solda);

O ensaio de queda de peso permite definir uma temperatura de transição conhecida como **Temperatura de transição para ductilidade nula** (NDT, "Nil ductility temperature"), que apresenta as seguintes propriedades:

- a NDT é maior que  $T_c$ , portanto o ensaio é mais severo no que tange à fratura frágil,
- a NDT correlaciona melhor com o conceito de tenacidade à fratura (*K<sub>Ic</sub>*) e, portanto, com o projeto de engenharia e
- e a NDT depende também da geometria da placa e do tamanho da pré-trinca (largura do cordão de solda), porém o ensaio pode ser aplicado ao produto acabado, o que reduz a relevância do problema.

**Exercício 7.5** Catástrofe! O Zézinho<sup>10</sup> descobriu que você estava estudando para a P2 de PMT2405! Ele chegou justamente no momento em que você lia um texto sobre mecanismos de fratura em aços inoxidáveis ferríticos. Como não poderia deixar de ser, logo veio a enxurrada de perguntas:

a. (Z) O que é fratura?

Em seguida ele aponta um gráfico que representa o resultado de ensaios de impacto Charpy realizados em corpos de prova de um aço inoxidável ferrítico típico na região da transição dúctil-frágil e pergunta:

b. (Z) O que é que este gráfico quer dizer?

Para seu azar o texto continha também uma discussão sobre a transição entre fratura transgranular de baixa temperatura para fratura intergranular em alta temperatura, e sobre o conceito de temperatura equicoesiva, o Zezinho então, sem ao menos respirar pergunta:

- c. (Z) O que é fratura transgranular? Qual é a diferença entre as duas?
  Pouco antes de você perder a paciência e começar a pensar em assassinato, e depois da sua última resposta, o Zésinho pergunta:
- d. (Z) Por quê o tipo (ele não sabe direito o que é que significa mecanismo) de fratura muda quando a temperatura aumenta?A seguir, para seu alívio, o Zezinho perde o interesse em você e vai torrar a paciência de outra pessoa.

Dica — lembre-se que você está explicando a matéria para uma criança de 10 anos, que não sabe o que é tensão, deformação etc...

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Zézinho é um personagem mítico que eu criei, ele representa aquele pré-adolecente chato, típicamente de 10 anos de idade, que está sempre perguntando coisas (pense em seu irmão, irmã, primo, prima, ou mesmo no filho ou na filha da vizinha).

# 8 VISCOELASTICIDADE E FLUÊNCIA DE POLÍMEROS

## 8.1 Comportamento viscoso

Baseado em F. A. McClintock e A. S. Argon "Mechanical Behavior of Materials" Addison-Wesley Pub. Co., Reading-MA (EEUU), 1966.

Até o momento consideramos  $\varepsilon = f(\sigma, T, \dot{\varepsilon})$ , onde " $\sigma$ " representa esquematicamente o estado de tensão ao qual o corpo está sujeito, T representa a temperatura (absoluta) e  $\dot{\varepsilon}$  representa a taxa de deformação aplicada sobre o corpo. Esta relação implicitamente assume a hipótese de que a deformação ocorre instantaneamente (ou seja, que não depende do tempo, t). Em certas condições entretanto (notadamente a temperaturas elevadas) esta hipotese é flagrantemente violada. Desta forma precisamos incluir este efeito do tempo nos nossos modelos mecânicos.

Definimos a temperatura homóloga ( $\tau_H$ ) como:

$$\tau_H = \frac{T}{T_f} \tag{8.1}$$

onde T é a temperatura (absoluta) do sistema e  $T_f$  é a temperatura (absoluta) de fusão do material.

A justificativa para o uso da temperatura homóloga se baseia no fato de que as energias de ativação dos processos termicamente ativados escalam (isto é, são proporcionais) com a energia de coesão dos átomos e intensidade das interações moleculares no sólido. A temperatura de fusão, por sua vez, também escala com esta mesma propriedade. Sendo assim a temperatura homóloga permite abstrair as diferenças de intensidade na interação entre os átomos nas diferentes classes de sólidos.

Em alguns sólidos amorfos (por exemplo, em polímeros termorígidos) não podemos definir uma temperatura de fusão. Nestes casos substituimos a temperatura de fusão pela temperatura da transição vítrea,  $T_g$ , e assumimos que  $T_g \Rightarrow \tau_H \simeq 0, 6$ .

## 8.1.1 Procedimentos experimentais idealizados

No estudo de fenômenos associados ao comportamento viscoso em sólidos é comum nos referirmos a dois tipos de ensaios idealizados:

- O ensaio de fluência ("creep")
- O ensaio de relaxação de tensão ("stress relaxation")

Ensaio de fluência (Fig. 8.1):

Uma tensão constante é aplicada em um determinado intervalo de tempo e posteriormente retirada. Registra-se a deformação observada em função do tempo.



Figura 8.1: Representação esquemática do ensaio de fluência idealizado.

Ensaio de relaxação de tensão (Fig. 8.2):

Uma deformação constante é aplicada em um determinado intervalo de tempo e posteriormente retirada. Registra-se a tensão observada em função do tempo.

A Figura 8.3 apresenta a definição dos comportamentos ideais dos materiais sob solicitações de fluência.

## Viscosidade

Definimos a **viscosidade** ( $\eta$ ) como a constante que relaciona a tensão de cisalhamento aplicada sobre um fluido e a taxa de deformação angular produzida por esta tensão. Para fluidos genéricos teremos:



Figura 8.2: Representação esquemática do ensaio de relaxação de tensão.



Figura 8.3: Comportamentos ideais sob solicitações de fluência.

#### 8.1 Comportamento viscoso

$$\tau = \eta \left( \dot{\gamma} \right)^n \tag{8.2}$$

A equação acima engloba os casos especiais:

- $n = 0 \rightarrow$  Comportamento elástico ideal
- $n = 1 \rightarrow$  Fluidos newtonianos (viscosidade linear)

## Viscosidade linear

Fluidos newtonianos são governados pela relação constitutiva:

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \tag{8.3}$$

Neste caso a viscosidade tem dimensão [Pa.s] e pode ser expressa também por uma unidade própria, o *Poise* (P), sendo que 1 [P] =  $10^{-1}$  Pa.s.

O fluxo viscoso é termicamente controlado, portanto podemos escrever:

$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{\Delta H}{k_B T}\right) \tag{8.4}$$

onde  $\eta_0 e \Delta H$  são constantes características do material (fator pré-exponencial e energia de ativação, respectivamente) e  $k_B = 8,3145 \text{ J.mol}^{-1} \text{.K}^{-1}$  é a constante de Boltzmann.

## 8.1.2 Modelos simplificados

O comportamento viscoelástico pode ser abstraído a partir da combinação de "dispositivos" idealizados (Fig. 8.4), com respostas puramente linear elástica (mola) ou puramente linear viscosa (amortecedor)

$$\tau = G\gamma \qquad \qquad \tau = \eta \dot{\gamma} \tag{8.5}$$

Com base nos dois dispositivos definidos anteriormente, podemos construir dois modelos de comportamento viscoelástico (Fig. 8.5):



Figura 8.4: Dispositivos ideais utilizados no modelamento do comportamento visco-elástico.



Figura 8.5: Definição dos modelos de Maxwell e de Voigt com base nos dispositivos ideais.

#### Modelo de Maxwell

Como a mola e o amortecedor estão em série, podemos assumir que a tensão atuante sobre os dois dispositivos será a mesma ( $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ ) e a deformação total será dada pela soma das deformações em cada dispositivo ( $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ). Podemos agora escrever para os dois componentes:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = G\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} \quad \mathrm{e} \quad \tau = \eta \frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}t} \tag{8.6}$$

combinando teremos:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} + \frac{\tau}{\eta}$$
(8.7)

A equação diferencial da página anterior é linear de primeira ordem e pode ser resolvida pelos métodos usuais. Estas soluções dependem das chamadas condições de contorno, ou seja, valores para  $\tau$ ,  $\gamma$  ou para suas derivadas temporais em determinados instantes.

Por exemplo, as condições de contorno correspondentes ao ensaio de fluência podem ser expressas por:

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 \\ \frac{d\tau}{dt} = 0 \end{cases} \quad (t_0 \le t < t_1)$$
(8.8)

Substituindo na equação diferencial teremos:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\tau_0}{\eta} \Rightarrow \gamma = \frac{\tau_0 t}{\eta} \tag{8.9}$$

O modelo de Maxwell prevê, portanto, um incremento linear da deformação com o tempo, mediado pela viscosidade. Ora, isto nada mais é que a solução para o comportamento de um líquido newtoniano sujeito a uma tensão de cisalhamento! Esta solução, portanto, **não** descreve adequadamente o comportamento viscoelástico de polímeros no **ensaio de fluência**, como desejamos.

Já no ensaio de relaxação de tensão deveriamos utilizar as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_0 \\ \frac{d\gamma}{dt} = 0 \end{cases} \quad (t_0 \le t < t_1) \tag{8.10}$$

#### 8.1 Comportamento viscoso

A equação a ser resolvida, portanto, é:

$$\dot{\tau} + \frac{G}{\eta}\tau = 0 \tag{8.11}$$

cuja solução é da forma:

$$\tau = \tau_0 \exp\left[-\frac{G}{\eta} \left(t - t_0\right)\right] \tag{8.12}$$

A constante  $\tau_0 = G\gamma_0$  é determinada pela condição inicial (a  $t = t_0$ ).

Por análise dimensional verificamos que a constante  $t_r = \frac{\eta}{G}$  tem unidade de tempo. Esta constante define, portanto, uma escala de tempo para o material que está sendo modelado e recebe desta forma o nome de **tempo de relaxação**.

O resultado do modelo de Maxwell para o ensaio de relaxação de tensão (Fig. 8.6) pode ser reescrito, portanto, como:



$$\tau = \tau_0 \exp\left[-\frac{(t-t_0)}{t_r}\right] \tag{8.13}$$

Figura 8.6: Resultado típico do ensaio de relaxação de tensão de acordo com o modelo de Maxwell.

## Modelo de Voigt

Para o modelo de Voigt teremos a mola em paralelo com o amortecedor, desta forma a deformação permanece a mesma nos dois dispositivos ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ) e a tensão será dada pela soma das tensões nos dispositivos ( $\tau = \tau_1 + \tau_2$ ), teremos portanto:

$$\tau = \eta \,\dot{\gamma} + G\gamma \tag{8.14}$$

que corresponde à equação diferencial (novamente linear de primeira ordem) a ser resolvida.

Usando as condições de contorno para o ensaio de fluência teremos:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \frac{G}{\eta}\gamma = \frac{\tau_0}{\eta} \tag{8.15}$$

cuja solução é dada por:

$$\gamma = \gamma_{\infty} \left[ 1 - \exp\left(\frac{t - t_0}{t_r}\right) \right]$$
(8.16)

onde  $\gamma_{\infty} = \frac{\tau_0}{G}$  é determinada pela condição inicial e corresponde ao valor assintótico da deformação em no limite tempo tendendo a infinito.

O resultado de um ensaio de fluência de acordo com o modelo de Voigt está representado na Figura 8.7.

Considerando agora as condições de contorno para o ensaio de relaxação de tensão, teremos para o modelo de Voigt:

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G} \tag{8.17}$$

Portanto o modelo de Voigt prevê que o material irá se comportar como um material elástico linear em um ensaio de relaxação de tensão, o que também não é razoável (assim como no caso do ensaio de fluência usando o modelo de Maxwell).

## 8.1.3 Módulos dinâmicos

Podemos agora definir as seguintes funções:



Figura 8.7: Resultado típico do ensaio de fluência de acordo com o modelo de Voigt.

• Módulo de relaxação ("relaxation modulus")

$$G(t) = \frac{\tau(t)}{\gamma_0} \tag{8.18}$$

• Módulo de flexibilidade em fluência ("creep compliance")

$$T(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0} \tag{8.19}$$

Estes são os chamados **módulos dinâmicos**, que caracterizam a resposta mecânica de um material viscoelástico.

#### Modelos mais sofisticados

Os resultados dos modelos de Maxwell e de Voigt representam certos aspectos do comportamento viscoelástico sujeito a condições de carregamento simplificadas. Eles, entretanto, são insuficientes para descrever a resposta de um sistema viscoelástico em uma situação mais complexa de carregamento, para tanto é necessário avançar para modelos mais sofisticados, ainda utilizando os análogos mecânnicos da mola e do amortecedor. Hertzberg, por exemplo, cita o que chama de modelo de quatro elementos, esquematizado na Figura 8.8.



Figura 8.8: Um modelo de quatro elementos ideais, capaz de reproduzir o comportamento visco-elástico tanto em fluência quanto em relaxação de tensão.

$$\gamma(t) = \frac{\tau(t)}{G_1} + \frac{\tau(t)}{G_2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{t_r}\right) \right] + \frac{\tau(t)}{\eta_3}$$
(8.20)

McClintock e Argon demonstram que, qualquer que seja a combinação dos elementos básicos, a equação diferencial que governa a resposta de um material viscoelástico será da forma:

$$p_1 \ddot{\tau} + p_2 \dot{\tau} + p_0 \tau = q_2 \ddot{\gamma} + q_1 \dot{\gamma} \tag{8.21}$$

onde  $p_i$  e  $q_i$  são coeficientes constantes.

Apesar de complexa, esta equação diferencial é linear, o que significa que vale o princípio da superposição, ou seja, a solução da equação pode ser obtida pela soma das soluções parciais devidas às configurações simplificadas que compõem o modelo.

# 8.2 Comportamento mecânico de polímeros

A resposta de um polímero a esforços mecânicos será fortemente marcada por comportamentos viscosos ou viscoelásticos mesmo à temperatura ambiente, já que suas temperaturas de fusão estão normalmente por volta de 300 °C. Desta forma é comum descrever suas propriedades em termos do módulo de relaxação ou do módulo de flexibilidade em fluência. Mais importante que isto, como vimos nos modelos de Maxwell e Voigt, as respostas serão caracterizadas por um parâmetro, denominado tempo de relaxação, que por sua vez depende do módulo de rigidez e da viscosidade do material.

Estas duas constantes, por sua vez dependem de variáveis estruturais do polímero, a saber, do peso molecular e da taxa de ligações cruzadas. O módulo de rigidez pode ser considerado constante com a temperatura, em uma razoável aproximação. Já a viscosidade é termicamente ativada (como vimos anteriormente). Estas considerações levam ao chamado **princípio da superposição termo-temporal** e ao conceito de **curva mestre**.

## 8.2.1 Curva mestre

Experimentalmente observa-se que os resultados de ensaios de fluência ou de relaxação em diferentes temperaturas são relacionados na forma de um deslocamento do eixo dos tempos, como esquematizado na Figura 8.9 (ou, alternativamente, consulte a figura 6.23 do livro de McClintock e Argon).



Figura 8.9: Curva mestre característica de polímeros e o princípio da superposição termotemporal. A seta dupla indica o intervalo de tempo no qual as medidas experimentais são possíveis.

Este resultado sugere que o comportamento mecânico de um polímero a qualquer temperatura passa a ser conhecido se ele puder ser medido em uma única temperatura de referência. Este corresponde ao conceito de **curva mestre** ou "*master curve*", que é uma curva medida a uma dada temperatura de referência e que pode ser usada para representar o comportamento do material a qualquer temperatura.

Williams, Landel e Ferry propuseram em 1955 uma relação semi-empírica para determinar o fator de deslocamento temporal ( $a_T$ , "time shift factor") de um polímero:

$$\log a_T = \log \frac{t_T}{t_{T_0}} = \frac{C_1 \left(T - T_0\right)}{C_2 + T - T_0} \tag{8.22}$$

onde  $T_0$  é uma temperatura de referência arbitrariamente escolhida,  $t_T$  e  $t_{T_0}$  são os tempos necessários para que o módulo de relaxamento (ou o módulo de flexibilidade em fluência) atinjam o mesmo valor nas temperaturas T e  $T_0$  e  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que dependem únicamente da escolha da temperatura de referência. Williams, Landel e Ferry fornecem os valores de  $C_1$  e  $C_2$  para duas temperaturas de referência comumente utilizadas (Tab. 8.1).

Tabela 8.1: Parâmetros do modelo de Williams-Landel-Ferry considerando duas temperaturas de referência diferentes.

Temp. referência	$C_1$	<i>C</i> <sub>2</sub>
$T_g$	-17,44	51,6
$T_g + 50 \text{ K}$	-8,86	101,6

## Exercício 8.1

G. E. Dieter, em seu livro (Mechanical Metallurgy, 2<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill, 1976), apresenta um gráfico semelhante ao reproduzido abaixo, que representa o módulo isócrono do Poliestireno em função de parâmetros estruturais da cadeia polimérica. O módulo isócrono é definido da seguinte forma:

"E(t) é um módulo dependente do tempo. Ele é medido aplicando-se uma dada deformação inicial à amostra ( $\varepsilon_0$ ) e então permitindo-se que a tensão relaxe. A tensão após um dado tempo de relaxação (no caso, t = 10 s) é medida. Se uma seqüência de espécimens for deformada a diferentes níveis de deformação inicial, então a curva  $\sigma(t = 10s) \times \varepsilon_0$  pode ser construida, o coeficiente angular desta curva é E(t)" (Dieter)

Esta curva é equivalente a uma curva-mestre para o polímero e pode ser analisada da mesma forma. Responda:

a. Analise o comportamento viscoelástico esperado para as quatro formas de poliestireno por



Figura 8.10: Representação esquemática do módulo isócrono do Poliestireno.

volta de 125 °C.

b. Discuta a relação entre a estrutura da cadeia polimérica e o comportamento mecânico do poliestireno com base nas curvas apresentadas.

# 8.3 Módulos complexos

Uma forma alternativa de caracterizar o comportamento viscoelástico de um material corresponde a submetê-lo a uma deformação cíclica senoidal (ou alternativamente, a uma tensão senoidal). Como esquematizado na Figura 8.11 a resposta será caracterizada por uma defasagem de um certo ângulo  $\delta$  que dependerá das propriedades viscoelásticas do material:

Em um ensaio de controle de tensão, esta será descrita por:

$$\tau(t) = \exp[i\omega t] \tag{8.23}$$

A resposta (deformação) será dada por:

$$\gamma(t) = A \exp[i\omega t + \delta] \tag{8.24}$$

onde A é uma constante, que no momento permanecerá anônima.


Figura 8.11: Princípio da análise do comportamento visco-elástico por meio de uma deformação cíclica senoidal.

Definimos os **módulos de armazenamento e de perda** "*storage and loss moduli*" respectivamente como:

$$G' = A\cos\delta$$
 e  $G'' = A\sin\delta$  (8.25)

de forma analoga definimos o módulo complexo e a tangente delta:

$$G^* = G' + iG'' \quad \text{e} \quad \tan \delta = \frac{G'}{G''} \tag{8.26}$$

Com o auxílio do módulo complexo podemos escrever a resposta mecânica do material como:

$$\tau(t) = G^* \gamma(t) \tag{8.27}$$

A resposta dinâmica de um polímero a um esforço oscilatório pode ser completamente definido se as constantes  $G^*$  e tan $\delta$  (ou alternativamente G' e G'') forem expressas em termos da freqüência da onda senoidal. Esta decomposição espectral das propriedades mecânicas do polímero tem caráter semelhante ao das "curvas mestras" estáticas, definidas anteriorment. Da mesma forma este comportamento pode ser medido em função da temperatura para uma freqüência fixa: este é o princípio de funcionamento do ensaio termo-mecânico diferencial (*"differential thermo-mechanical analysis"*, DTMA). Na prática todas estas abordagens do tipo "curva mestra" seriam equivalentes, dado o princípio de superposição termo-temporal, mas a conversão de dados entre um formalismo e o outro pode ser muito complexa.

# 8.4 Relações constitutivas em polímeros

Contrariamente aos materiais metálicos, que apresentam relações constitutivas onde a curva tensão real *versus* deformação real é sempre crescente, materiais poliméricos termoplásticos apresentam amolescimento por deformação (*strain softening*), como esquematizado na Figura 8.12. Isto se deve às particularidades da estrutura molecular destes materiais.



Figura 8.12: Representação esquemática da variação da tensão real em função da deformaçção real em um polímero termoplástico típico.

As propriedades elásticas, assim como o escoamento, em polímeros termoplásticos são controlados pela resistência ao escorregamento mútuo das cadeiais e portanto se devem às ligações secundárias (Van der Waals ou pontes de hidrogênio). Em repouso cadeias vizinhas se rearranjam por difusão de curto alcance de forma a maximisar a eficiência destas ligações. Trechos das cadeias migram na direção do fundo de poços de potencial gerado por estes ligações e as moléculas adquirem uma geometria irregular, introduzindo pontos de ancoramento que devem ser vencidos para produzir o deslizamento mútuo.

Sob a ação da tensão estes trechos inicialmente respondem de forma elástica, mas no escoamento eles migram e as cadeias assumem configurações mais retas, eliminando os pontos de ancoramento. Desta forma a eficiência das ligações secundárias diminui, produzindo o amolescimento por deformação. Do ponto de vista da viscosidade, os polímeros apresentam comportamento instrinsecamente não-newtoniano, com a viscosidade diminuindo com a taxa de deformação.

Para grandes deformações, entretanto, as propriedades mecânicas do polímero são ditadas pela reorientação das cadeias e portanto são vinculadas às ligações primarias intercadeias. Neste regime observa-se que os polímeros apresentam uma deformação máxima admissível, que é relacionado ao comprimento livre de cadeia entre dois pontos de emaranhamento (que assumem o papel das ligações cruzadas nos termorrígidos). Estes pontos de emaranhamento, que são pontos onde as cadeias estão organizadas de tal forma que o deslizamento mútuo fica restrito por razões topológicas. Haward e Thacray<sup>1</sup> citam experimentos onde se demonstra que as grandes deformações aparentemente plásticas observaddas em polímeros são em grande parte reversíveis quando o material é reaquecido, fornecendo energia térmica suficiente para que o material retorne ao equilíbrio estático ditado pelo conjunto de pontos de emaranhamento.

## 8.4.1 O modelo de Haward e Thackray

Haward e Thackray, anteriormente citados, propuseram um modelo constitutivo para a deformação de polímeros termoplásticos amorfos que hoje em dia serve de base para a maioria dos modelos modernos. Este modelo é representado pelo diagrama apresentado na Figura 8.13.





A resposta elástica inicial deste modelo é dada pela mola Hookeana e tem como objetivo descrever o comportamento do sistema até o escoamento. A resposta após o escoamento, e principalmente o amolecimento por deformação são dados pelo amortecedor de Eyring, que

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>R. N. Haward, G Thackray, The use of a mathematical model to describe isothermal stress-strain curves in glassy thermoplastics, Proc. Roy. Soc. A, 302 (1968) 453–472.

possui uma lei de viscosidade não linear, decrescente com a taxa de deformação. Por fim, o comportamento para grandes deformações é dado pela mola de Langevin, que se caracteriza por uma deformação limitada pelo emaranhamento das cadeias poliméricas.

A resposta da mola Hookeana, como já definido anteriomente, é dada por

$$\varepsilon^r = E\,\sigma^r \tag{8.28}$$

A lei de viscosidade do amortecedor de Eyring dada por:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta} = K \sinh\left(\frac{V\tau}{2k_BT}\right) \tag{8.29}$$

Onde *K* e *V* são constantes, sendo que *V* é chamado de "volume de Eyring" e representa o volume do segmento de cadeia que tem que se mover por inteiro a fim de ocorrer escoamento.

A seguir Haward e Thackray impõem ao sistema uma lei linear de deformação com o tempo (correspondente por exemplo a um ensaio de tração em controle de deformação):

$$\varepsilon = K_1 t \tag{8.30}$$

De acordo com o modelo da Figura ?? eles dividem então a deformação total na deformação da mola Hookeana ( $\varepsilon_H$ ) e uma deformação plástica recuperável ( $\varepsilon_A$ ):

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_A \tag{8.31}$$

Em seguida eles assumem que a deformação elástica é sempre muito pequena e desconsideram efeitos que podem afetar a resposta elástica em altas deformações (como variações de Módulo de Young ou do quociente de Poisson) e escrevem:

$$\varepsilon = \frac{\sigma \left(1 + \varepsilon\right)}{E} + \varepsilon_A \tag{8.32}$$

A seguir eles assumem que  $\varepsilon_A$  é um fluxo viscoso escrevendo:

$$\dot{\varepsilon_A} = \frac{\tau}{\eta} \left( 1 + \varepsilon \right) \tag{8.33}$$

Supondo agora que  $\varepsilon_A \gg \varepsilon_H$  podemos aproximar 8.33 como:

$$\dot{\varepsilon_A} = \frac{\tau}{\eta} \left( 1 + \varepsilon_A \right) \tag{8.34}$$

Ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}\ln\left(1+\varepsilon_{A}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\tau}{\eta} \tag{8.35}$$

Considerando que  $\tau = \frac{1}{2}\sigma(1+\varepsilon)$  e usando 8.29 escrevemos:

$$\frac{\mathrm{d}\ln\left(1+\varepsilon_{A}\right)}{\mathrm{d}t} = K\left\{\exp\left[+\frac{V\sigma\left(1+\varepsilon_{A}\right)}{4k_{B}T}\right] - \exp\left[-\frac{V\sigma\left(1+\varepsilon_{A}\right)}{4k_{B}T}\right]\right\}$$
(8.36)

Por fim, a tensão de engenharia atuando na mola de Langevin ( $\sigma^R$ ) é dada por:

$$\sigma^{R} = \frac{Nk_{B}T}{3}\sqrt{n} \left[ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1+\varepsilon_{A}}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{1}{\left(1+\varepsilon_{A}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1+\varepsilon_{A}}}\right) \right]$$
(8.37)

Onde  $\sqrt{n} - 1$  corresponde à deformação limite da rede de cadeias e  $\mathcal{L}^{-1}$  é a inversa da função de Langevin, definida como:

$$\mathscr{L}(\beta) = \coth\beta - \frac{1}{\beta}$$
(8.38)

Finalmente o modelo resulta na seguinte equação diferencial não linear:

$$\frac{\mathrm{d}\ln\left(1+\varepsilon_{A}\right)}{\mathrm{d}t} = K \left\{ \exp\left[+\frac{V\left(\sigma-\sigma^{R}\right)\left(1+\varepsilon_{A}\right)}{4k_{B}T}\right] - \exp\left[-\frac{V\left(\sigma-\sigma^{R}\right)\left(1+\varepsilon_{A}\right)}{4k_{B}T}\right] \right\}$$
(8.39)

Com  $\sigma^R$  definido pela Equação 8.37.

A solução de 8.39 deve ser determinada por métodos numéricos devido à forte não linearidade da equação diferencial.

O mérito do modelo de Haward e Thackray foi o de, pela primeira vez, fornecer uma descrição matemática, baseada em parâmetros derivados da estrutura molecular, do comportamento mecânico macroscópico dos polímeros. A estrutura básica do modelo, apresentado na Figura 8.13 também é reproduzida em todos os modelos constitutivos modernos, mesmo que em alguns casos hajam pequenas modificações. Ela sofre, entretanto, de algumas limitações, sendo as principais:

- É um modelo baseado em deformação infinitesimal, que, por princípio, não deveria ser conveniente para o tratamento de polímeros.
- É um modelo unidimensional, sendo incapaz, portanto, de descrever a anisotropia de propriedades, que é característica destes materiais.

Uma descrição baseada na teoria da deformação finita de Lee (Seção 5.2) parece ser mais apropriada para o presente caso. Uma destas descrições será vista em seguida.

# 8.4.2 O modelo de Arruda e Boyce

Ellen Arruda e Mary Boyce<sup>2</sup> foram as primeiras pesquisadoras a aplicar a teoria de Lee ao desenvolvimento de modelos constitutivos para polímeros.

Elas se baseiam nos mesmos elementos básicos representados na Figura 8.13, mas agora as forças e os deslocamentos atuantes nestes elementos são representados os tensores definidos na Seção 5.2. O modelo pode ser representado pela figura 8.14.



Figura 8.14: Adaptação do modelo de Haward e Thackray feita por Arruda e Boyce para incluir efeitos de anisotropia na a relação constitutiva em polímeros termoplásticos amorfos.

 $<sup>^{2}</sup>$ E. M. Arruda, M. C. Boyce, Evolution of plastic anisotropy in amorphous polymers during finite straining, Int. J. Plasticity, vol. 9 (1993) 697 – 720.

No modelo de Arruda e Boyce a tensão e a deformação unidimensionais assumidas por Haward e Thackray são substituidas por tensores. A mola linear está sujeita, por exemplo ao estado de tensão definido pelo tensor **T**, já introduzido anteriormente (equação 5.26). Esta mola segue uma relação constitutiva com o tensor de deformação real através do tensor das constantes elásticas  $C_e$  (de posto 4):

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathscr{C}_e \left[ \ln \mathbf{U}_e \right] \tag{8.40}$$

O tensor  $\mathbf{U}_e$  é obtido a partir de  $\mathbf{A}_e$  usando o teorema da decomposição polar (vide Apêndice A). Ele é conhecido como o tensor de extensão direito (*right stretch tensor*) e é definido por:

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e \tag{8.41}$$

Onde  $\mathbf{R}_e$  é um tensor ortogonal que representa a rotação característica do processo de deformação. Assumindo-se que o tensor  $\mathscr{C}_e$  é característico de um sólido isotrópico podemos assumir que a rotação no estado elástico é nula e portanto  $\mathbf{U}_e = \mathbf{A}_e$ . Finalmente  $J = \det[\mathbf{U}_e]$ .

O elemento viscoso representa a equação escalar de Argon para a taxa de deformação angular plástica,  $\dot{\gamma}^{P}$ , que surge após as barreiras que se opõem ao deslizamento e à rotação dos segmentos decadeia sejam superadas:

$$\dot{\gamma}^{P} = \dot{\gamma}_{0} \exp\left\{-\frac{As}{k_{B}T} \left[1 - \left(\frac{\tau}{s}\right)^{\frac{5}{6}}\right]\right\}$$
(8.42)

Na equação acima, o termo pré-exponencial  $\dot{\gamma}_0$  representa um termo de freqüência de tentativas, *As* é uma energia de ativação à tensão nula,  $s = 0.077 \frac{\mu}{(1-\nu)}$  é a resistência atérmica ao escoamento e finalmente  $\tau$  é a tensão de escoamento equivalente. Podemos agora resolver a equação 8.42 para  $\tau$  obtendo:

$$\tau = s \left[ 1 - \frac{k_B T}{As} \ln \left( \frac{\dot{\gamma}^P}{\dot{\gamma}_0} \right)^{\frac{6}{5}} \right]$$
(8.43)

O amolescimento por deformação é modelado fazendo-se s evoluir com o tempo na forma:

$$\dot{s} = h \left[ 1 - \frac{s}{s_{ss}} \right] \dot{\gamma}^P \tag{8.44}$$

onde h representa a inclinação inicial e sss um valor de estado estacionário correspondente

a um estado "móvel" das cadeias.

Por fim, o tensor  $\mathbf{T}^*$  é obtido da diferença tensorial emtre  $\mathbf{T}$  e a contratensão atuante sobre a mola não linear:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T} - \frac{1}{J} \mathbf{A}_e \mathbf{B} \mathbf{A}_e^T \tag{8.45a}$$

de onde se obtém a tensão equivalente efetiva de cisalhamento:

$$\tau = \left[\frac{\mathbf{T}^{*\prime} \cdot \mathbf{T}^{*\prime}}{2}\right] \tag{8.45b}$$

onde  $T^{*'}$  representa a parcela reduzida (*deviatoric*) de  $T^*$ .

Finalmente o tensor  $\mathbf{D}^{P}$  é definido a partir de  $\mathbf{T}^{*}$  de tal forma a possuir módulo  $\dot{\gamma}^{P}$  e a direção tensorial definida por  $\mathbf{T}^{*'}$ :

$$\mathbf{D}^{P} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{P} \mathbf{N} \tag{8.46}$$

onde N é o tensor normalizado definido como:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \mathbf{T}^{*\prime} \tag{8.47}$$

A última contribuição ao modelo é baseada em um tratamento mecânico-estatístico desenvolvido pelas autoras para a relação constitutiva da elasticidade não linear de elastômeros.

Neste modelo a razão de estiramento individual das cadeias,  $\lambda_{cadeia}$ , definida em função do seu comprimento  $\ell_{cadeia}$  e do seu comprimento em repouso  $\ell_0$  como:

$$\lambda_{\text{cadeia}} = \frac{\ell_{\text{cadeia}}}{\ell_0} \tag{8.48}$$

Esta quentidade, por sua vez, se vincula aos estiramentos macroscópicos principais aplicados,  $\lambda_{ij}$ , por:

$$\lambda_{\text{cadeia}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \text{tr} \lambda_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$$
(8.49)

A relação constitutiva individual das cadeias é dada por:

$$\sigma_{\text{cadeia}} = \lambda_{\text{cadeia}} k_B T \mathscr{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda_{\text{cadeia}}}{\sqrt{N}} \right\}$$
(8.50)

onde  $\mathscr{L}^{-1}$  é a função de Langevin inversa, já introduzida anteriormente, e N é definido como o número médio de pontos de ligação cruzada<sup>3</sup> da cadeia, sendo que  $\sqrt{N}$  neste caso representa a razão entre a máxima extensão da cadeia e a extensão em repouso da mesma.

A resposta da cadeia a estiramentos macorscópicos aplicados é dada em termos da diferença entre duas tensões principais, para eliminar a dependência da pressão hidrostática:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{nk_BT}{3}\sqrt{N}\mathscr{L}^{-1} \left[\frac{\lambda_{\text{cadeia}}}{\sqrt{N}}\right] \frac{\left(\lambda_1^2 - \lambda_3^2\right)}{\lambda_{\text{cadeia}}}$$
(8.51)

onde *n* é o número médio de cadeias por unidade de volume.

As componentes principais do tensor reduzido de contratensão da mola não linear,  $B_i$ , serão dadas por:

$$B_{i} = \frac{nk_{b}T}{3}\sqrt{N}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\Lambda_{\text{cadeia}}^{P}}{\sqrt{N}}\right\}\frac{\Lambda_{i}^{P2} - \frac{\text{tr}(\Lambda_{i}^{P})}{3}}{\Lambda_{\text{cadeia}}^{P}}$$
(8.52)

onde  $\Lambda_i^P$  e  $\Lambda_{cadeia}^P$  são os equivalentes plásticos de  $\lambda_i$  e  $\lambda_{cadeia}$ .

Os tensores **B** e  $\mathbf{V}^P$  são coaxiais. Ocorre que *mathb*  $fV^P$  geralmente não se encontra diagonalizado devido às grandes rotações que acompanham o processo de deformação finita. Neste caso deve-se diagonalizar  $\mathbf{V}^P$ , determinar **B** e rodar **B** ao referencial não diagonalizado.

O modelo desenvolvido por Arruda e Boyce é consideravelmente mais complexo que o de Haward e Thackray. Esta complexidade se deve não apenas ao fato de se descrever o caráter tridimensional das deformações, mas também da fundamentação mais sólida dos modelos usados na descrição da parcela não-linear da deformação elástica.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>No contexto de polímeros em geral, pontos de emaranhamento.

# 9 FLUÊNCIA EM MATERIAIS CRISTALINOS

Escorregamento de discordâncias, deslizamento com desvio, ascensão de discordâncias, recuperação e recristalização são fenômenos termicamente ativados, portanto quanto maior a temperatura, maior a probabilidade de eles irão ocorrer espontaneamente no interior do cristal.

Além disto, com o aumento da temperatura aumenta também a fração de lacunas em equilíbrio em um reticulado, assim como sua mobilidade, ambos (formação e migração de lacunas) também são eventos termicamente ativados. Lacunas, entretanto, geram um campo de tensão próprio no interior do sólido, o que sugere a possibilidade de que este interaja com o campo de tensão aplicado no corpo.

Por fim, com o aumento da temperatura, mecanismos de deformação e de fratura ligados à movimentação relativa de contornos de grão passam a se fazer notar durante a deformação plástica dos materiais cristalinos.

De forma empírica pode-se dizer que fenômenos associados à fluência em materiais cristalinos se tornarão perceptíveis para

$$\tau_H \ge 0,4 \tag{9.1}$$

Deve-se observar, entretanto, que fenômenos associados à fluência ocorrem potencialmente a qualquer temperatura na escala microscópica. A regra empírica acima é somente um guia para analisar a necessidade de se considerar efeitos macroscópicos associados à fluência.

Tipicamente um material cristalino irá apresentar três estágios da fluência (Fig. 9.1):

- I. transiente ou primário: redução progressiva da taxa de deformação, duração limitada.
- II. estacionário ou secundário: taxa de deformação constante (mínima), corresponde ao maior período de vida de um material em solicitações de fluência.

### 9.1 Ensaio de fluência



Figura 9.1: Curva típica resultante de um ensaio de fluência em material metálico, incluindo a definição dos parâmetros  $\dot{\varepsilon}_{min}$  e  $t_r$ .

III. terciário: taxa de deformação volta a aumentar, precede a fratura.

# 9.1 Ensaio de fluência

### Baseado em G. E. Dieter Mechanical Metallurgy, 2ªed., McGraw-Hill, 1976.

O ensaio de fluência normalmente é realizado em condições isotérmicas, em condições de carga ou tensão real constante. Costuma ser de muito longa duração (tipicamente, entre 2000 até 10000h), o que exige uma bateria de máquinas de ensaio no laboratório operadas "em paralelo".

Os ensaios realizados a carga constante são voltados à caracterização de propriedades tecnológicas, necessárias à realização de projeto de engenharia, já os ensaios a tensão real constante normalmente se dedicam à investigação científica dos materiais.

É comum também a investigação de fenômenos relacionados à fluência em componentes que estiveram em serviço por um longo tempo e foram descartados (observação *post mortem*).

A Figura 9.2 apresenta um típico laboratório de fluência, contendo um grande número de máquinas de ensaio de fluência que operam em paralelo.

## Parâmetros da curva de fluência

A partir de uma curva típica obtida em um ensaio de fluência definem-se dois parâmetros que caracterizam a resistência do material:

### 9.1 Ensaio de fluência



Figura 9.2: Exemplo de laboratório de ensaios de fluência. Este pertence ao CTA. Fonte: <http://www.sismetra.cta.br/labs/labfluencia.html>, acesso em 10/5/2004.

- Tempo de ruptura em fluência (t<sub>r</sub>) medida no ensaio de ruptura por fluência, que é um ensaio de curta duração (até 1000h) aplicável a materiais que necessitam sobreviver por um tempo limitado em temperaturas elevadas (palhetas de turbina em aviões a jato militares, por exemplo).
- taxa mínima de fluência (*ɛ̇<sub>min</sub>*) medida no ensaio de fluência, ensaio de longa duração (de 2000 a 10000h), desenhado para investigar detalhadamente o estágio II, raramente é levado até a ruptura aplicável a materiais que irão trabalhar por longos tempos (décadas) em temperaturas elevadas (por exemplo, reatores nucleares e tubulações instalações de craqueamento e reforma em indústrias petroquímicas).

# 9.1.1 Relações empíricas

Uma série de expressões empíricas tem sido propostas ao longo da história da engenharia com o objetivo de descrever a deformação por fluência dos materiaistecnológicos. A primeira foi proposta por E. N. da C. Andrade em 1910 e é expressa por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left( 1 + \beta t^{\frac{1}{3}} \right) e^{\kappa t}$$
(9.2)

onde  $\beta$  e  $\kappa$  são constantes e  $\varepsilon_0$  é a deformação (elástica) instantânea.

Até hoje a dependência em  $t^{\frac{1}{3}}$  da deformação em fluência é conhecida como **lei de Andrade**. Uma proposta mais recente foi feita por Garofalo em 1960 e corresponde à equação:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_t \left( 1 - e^{-rt} \right) + \dot{\varepsilon}_{min} t \tag{9.3}$$

As equações de Andrade e Garofalo, obviamente, são incapazaes de descrever o estágio terciário da fluência.

Outra relação empírica importante foi obtida por Monkman e Grant em 1956 e relaciona o tempo para ruptura à taxa mínima de fluência:

$$\log_{10} t_r + m \log_{10} \dot{\varepsilon}_{min} = B \tag{9.4}$$

onde 0,77 < *m* < 0,93 e 0,48 < *B* < 1,3, tipicamente.

Vemos, portanto, que o tempo de ruptura decresce quando a taxa mínima de fluência aumenta, como esperado.

Cottrell (1952) sugeriu que o comportamento sob fluência em baixas temperaturas ( $\tau_H \leq 0, 5$ ), onde predomina o regime transiente ou primário, pode ser descrito por uma lei genérica do tipo:

$$\dot{\varepsilon} = At^{-n'} \tag{9.5}$$

onde  $A \in n'$  são constantes.

A lei de Cottrell permite descrever diversos casos especiais:

- quando n' = 0 temos a taxa de deformação constante e portanto o estado estacionário,
- quando n' = 1 temos que ε ∝ lnt, dependência esta que é observada na fluência em temperaturas e tensões muito baixas, onde a recuperação não ocorre (por exemplo, no cobre abaixo de 200K) e
- quando  $n' = \frac{2}{3}$  temos que  $\varepsilon \propto t^{\frac{1}{3}}$ , que é a lei de Andrade para o estágio transiente.

# 9.1.2 Energia de ativação para a fluência

Em temperaturas por volta de  $\tau_H = 0,5$  o estágio estacionário passa a dominar o processo de fluência. Como a fluência é baseada em processos termicamente ativados é interessante determinar a forma com que a taxa mínima de fluência é afetada pela temperatura.

#### 9.1 Ensaio de fluência

Assumindo que  $\dot{\varepsilon}_{min}$  seja expressa por uma relação de Arhenius, teremos:

$$\dot{\varepsilon}_{min} = A \exp\left[-\frac{\Delta H}{k_B T}\right] \tag{9.6}$$

onde *A* e  $\Delta H$  são constantes para determinados domínios de temperatura e tensão (o fator pré-exponencial e a entalpia de ativação do processo controlador) e  $k_B = 8,3145 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1} = 1,987 \text{ cal.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$  é a constante de Boltzmann.

Sherby, Dorn e Orr (1954), por meio de uma correlação extensa de dados de fluência e constantes de auto-difusão em metais puros, mostraram que a energia de ativação para a fluência é, no regime de altas temperatura, igual à energia de ativação para a auto-difusão. Como a energia de ativação para auto-difusão é a soma das entalpias de formação e de migração de lacunas, este resultado mostra que o processo controlador da fluência envolve necessariamente a formação e migração de lacunas. Um mecanismo de deformação que se torna imediatamente candidato a processo controlador da fluência é, portanto, a ascensão de discordâncias ("dislocation climb").

Dorn propôs um método simples para a determinação da energia de ativação para fluência pela comparação de resultados obtidos a duas temperaturas próximas,  $T_1 e T_2$ . Nestas condições é razoável supor que as constantes  $A e \Delta H$  sejam independentes da temperatura e teremos então:

$$\dot{\varepsilon}_{1} \exp\left[\frac{\Delta H}{k_{B}T_{1}}\right] = A = \dot{\varepsilon}_{2} \exp\left[\frac{\Delta H}{k_{B}T_{2}}\right] \Rightarrow$$
  
$$\Delta H = k_{B} \left(\ln\frac{\dot{\varepsilon}_{1}}{\dot{\varepsilon}_{2}}\right) \left(\frac{T_{1}T_{2}}{T_{1}-T_{2}}\right)$$
(9.7)

Dorn observou também que os dados de fluência poderiam ser correlacionados em uma escala de tempos efetivos, compensados pela variação da temperatura:

$$\theta = t \exp\left[\frac{\Delta H}{k_B T}\right] \tag{9.8}$$

Em uma escala de temperaturas mais ampla, entretanto, a energia de ativação para fluência poderá variar. Geralmente esta energia de ativação pode ser correlacionada com algum processo de formação e migração de lacunas, mas em alguns casos o processo controlador poderá ser outro.

### Critérios de projeto

Na prática a taxa mínima de fluência é o principal parâmetro de desenho em projetos voltados a solicitações de fluência. Dieter cita dois critérios comumente adotados nos EEUU na década dos 1970:

- a tensão necessária para produzir  $\dot{\epsilon}_{min} = 0,000001h^{-1}$  (1 % em 10000h) usado no projeto de turbinas de avião a jato e
- a tensão necessária para produzir  $\dot{\varepsilon}_{min} = 0,0000001h^{-1}$  (1 % em 100000h, cerca de 11 anos e meio) usado no projeto de turbinas em usinas termo-elétricas e equipamentos similares.

# 9.2 Métodos de extrapolação

Frequentemente, ao projetar dispositivos, desejamos prever o comportamento de seus componentes sob solicitações de fluência a longo prazo (com vidas-úteis previstas em décadas). Muitas vezes, entretanto, o próprio material de que é feito o componente foi inventado há menos tempo do que a especificação solicita. Nestes casos, obviamente, é impraticável ensaiar o material nas condições de uso e devemos extrapolar o comportamento sob serviço a partir de dados obtidos em ensaios de fluência de menor duração realizados em laboratório. Isto é feito com o emprego de um certo número de fórmulas empíricas ou semi-empiricas conhecidas como **métodos de extrapolação**.

Segundo proposta de Grant e Buckling (1950), o conceito de podemos escrever:

$$\log_{10} t = \log_{10} \theta + \frac{M}{k_B} \frac{\Delta H}{T}$$
(9.9)

onde  $M = \log_{10} e = 0,434$ , supondo que  $\theta$  e  $\frac{\Delta H}{k_B}$  sejam funções unicamente da tensão, então a equação acima será linear em  $\log_{10} t$  e  $T^{-1}$ .

# 9.2.1 Método de Larson-Miller

Larson e Miller (1969) adotaram a sugestão de Grant e Buckling e graficaram um grande número de dados de tempo de ruptura em fluência a temperaturas e tensões diferentes, mostrando que os dados do logaritmo do tempo de ruptura para cada nível de tensão são realmente lineares com o inverso da temperatura e que, quando comparados os dados obtidos a diferentes níveis de tensão, todas as retas convergem para um determinado ponto (negativo) no eixo das ordenadas (Fig. 9.3). Isto permite concluir que:

### 9.2 Métodos de extrapolação

- 1. O coeficiente angular das retas, ou seja a energia de ativação, depende unicamente da tensão aplicada.
- 2. O ponto de intersecção corresponde a  $\log_{10} \theta$  e é independente da tensão.



Figura 9.3: Representação esquemática da fundamentação do método de Larson-Miller.

O método de Larson-Miller pode ser expresso em termos do tempo de ruptura por meio da equação:

$$T\left(\log_{10} t_r + C_1\right) = P_1 \tag{9.10}$$

ou alternativamente, em termos da taxa mínima de fluência:

$$T\left(C_1 - \dot{\varepsilon}_{min}\right) = P_1 \tag{9.11}$$

onde P<sub>1</sub> é conhecido por Parâmetro de Larson-Miller.

Conforme a discussão anterior, vê-se que  $P_1$  é uma função da tensão aplicada (unicamente), enquanto que  $C_1$  é constante (independente da tensão e da temperatura), podemos então determinar  $P_1$  por meio de ensaios a temperaturas diferentes, ao longo de um intervalo de tensão conhecido. Estes pontos deverão seguir uma curva em princípio desconhecida, mas bem definida (a função da tensão procurada). Como esta função é **única** (isto é válido desde que o mecanismo controlador não mude no intervalo de temperatura e tensão invesitigado) ela pode ser usada para determinar o valor de  $P_1$  para uma tensão não investigada (em outras palavras, ela é uma **curva mestre** para a liga).

# 9.2.2 Método de Dorn

O parâmetro de Larson-Miller é o mais popularmente utilizado no projeto voltado a altas temperaturas, entretanto, outros parâmetros tem sido propostos e utilizados com o mesmo fim. Entre estes é conveniente citar o método de Dorn, baseado diretamente no conceito de temperatura efetiva compensada. Este parâmetro, entretanto, não apresenta boa correlação para materiais resistentes a altas temperaturas.

# 9.2.3 Método de Manson-Haferd

Em alguns casos, os dados experimentais obtidos para um dado material podem não produzir uma boa curva mestre para o método de Larson-Miller, neste caso pode-se utilizar o método de Manson-Haferd (1953), baseado na equação:

$$\frac{T - T_a}{\log_{10} t_r - \log_{10} t_a} = P_2 \tag{9.12}$$

onde  $T_a$  e  $\log_{10} t_a$  são constantes (independentes da tensão e da temperatura) derivadas a partir dos dados experimentais (Fig. 9.4).

O maior poder de descrição do método de Manson-Haferd vem exclusivamente do fato de que este método usa um parâmetro a mais que o método de Larson-Miller. Do ponto de vista formal, o método de Larson-Miller é mais fundamental, já que se baseia na idéia de que a fluência é um processo termicamente ativado.

### Discussão dos métodos de extrapolação

Dos três métodos de extrapolação apresentados, MH é o mais preciso, LM é o mais popular e D tem fundamentação mais rigorosa (mas falha em descrever propriedades de ligas complexas).

A temperatura usada nos métodos de extrapolação costuma ser expressa em graus Rankine (°R), o equivalente ao Kelvin quando a temperatura é expressa na escala Fahrenheit °F, para converter em Kelvin:



Figura 9.4: Representação gráfica esquemática da fundamentação do método de Manson-Haferd.

Tabela 9.1: Composições das ligas investigadas na dissertação de mestrado do Eng<sup>o</sup>. Alexandre Sokolowski em 1993.

Liga	С	Cr	Ni	Nb	Ti
А	0,41%	25,3%	20,5%	_	_
В	0,42%	23,4%	25,2%	0,61%	0,09%

$$[K] = \frac{5}{9} ([^{o}F] + 460)$$
(9.13)

### **Exercício 9.1**

O engenheiro Alexandre Sokolowski defendeu em 1993 uma dissertação de mestrado intitulada "Efeito da adição de nióbio e titânio e alterações nos teores de cromo e níquel sobre a microestrutura e propriedades mecânicas da liga ASTM A608 grau HK" perante banca constituida no departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Escola Politécnica da USP. Nesta dissertação o engenheiro Sokolowski publicou uma tabela sumarizando os resultados obtidos em ensaios de ruptura em fluência em duas ligas resistentes ao calor baseadas no aço ASTM HK40, que são usadas na forma de tubos centrifugados em fornos de pirólise e reforma em indústrias petroquímicas. As composições destas ligas são dadas na tabela 9.1:

Os resultados em questão obtidos para duas temperaturas encontram-se na tabela 9.2:

Com base nestes dados responda:

Liga	$T(^{o}C)$	σ (MPa)	$t_r$ (h)	$\dot{\varepsilon}_{min}$ (h <sup>-1</sup> )
Α	982	35	131	$3,8 \times 10^{-4}$
Α	982	40	67	$1,15 \times 10^{-3}$
Α	982	46	37	$3,5 \times 10^{-3}$
Α	982	50	19	$6,91 \times 10^{-3}$
Α	1050	17	611	
Α	1050	20	245	
Α	1050	24	113	
Α	1050	30	35	
Α	1050	35	21	
В	982	35	848	$1,75 \times 10^{-4}$
В	982	40	352	$4,4 \times 10^{-4}$
В	982	46	133	$1,15 \times 10^{-3}$
В	982	50	78	$2,06 \times 10^{-3}$
В	1050	17	2083	
В	1050	20	815	
В	1050	24	367	
В	1050	30	114	
В	1050	35	57	

Tabela 9.2: Resultados obtidos pelo Eng<sup>o</sup>. Alexandre Sokolowski em 1993 referentes à resistência à fluência das duas ligas com composições listadas na tabela 9.1.

- a. Qual o expoente *n* (expoente de tensão em fluência) das ligas A e B a T = 982 °C ?
- b. Em sua opinião, há mudança de mecanismo de fluência a T = 982 °C devido à alteração na composição relativa às duas ligas? Justifique sua resposta.
- c. Construa o gráfico da relação de Monkman-Grant para T = 982 °C. Quais são os seus parâmetros?
- d. Um novo ensaio de fluência (obs.: **não é** ensaio de ruptura em fluência) foi realizado para a liga A a 982 °C a um nível de tensão que resultou em uma taxa mínima de fluência  $\dot{\epsilon}_{min} = 2.5 \times 10^{-3} [h^{-1}]$ , qual será o tempo de ruptura previsto pela relação de Monkman-Grant que você determinou na questão anterior? Um ensaio de ruptura em fluência seria factível nestas condições? Justifique.
- e. Grafique nas folhas distribuidas pelo docente os dados referentes ao parâmetro de Larson-Miller para as duas ligas (considere C = 20 em ambos os casos), obtendo portanto as suas curvas-mestre. Qual liga apresenta maior resistência à fluência? Justifique sua resposta?
- f . Extrapole o tempo de ruptura em fluência das duas ligas para um nível de tensão de 5 MPa a 982 °C e a 800 °C .
- g. A principal diferença microestrutural entre as ligas A e B está no aumento da fração em massa de carbonetos para esta última, que resulta principalmente da precipitação de carboneto (Nb,Ti)C, que é mais estável e tem dimensões menores que os carbonetos (Fe,Cr,Ni)<sub>23</sub>C<sub>6</sub> (que também estão presentes na liga A). Você pode imaginar uma uma razão que justifique o aumento da resistência à fluência na liga B? Discuta.

# 9.3 Fluência em estados triaxiais de tensão

O formalismo desenvolvido para a fluência geralmente se baseia na resposta do material a estados uniaxiais de tensão, como estabelecido nos ensaios de fluência usuais. Na aplicação prática, entretanto, estados uniaxiais são raros, dois exemplos de aplicação onde fluência sob estados triaxiais é importante são:

- 1. tubulações de paredes grossas submetidas a pressões hidrostáticas internas e
- 2. tubulações submetidas à tração biaxial

Este problema foi inicialmente tratado por Soderberg em 1936 e a exposição que se segue é baseada neste texto.

Baseado em C. R. Soderberg Trans. ASME, 58, p. 733, 1936.

Soderberg parte de quatro hipóteses fundamentais para desenvolver o formalismo necessário:

- I as direções principais dos tensores de tensão e de deformação coincidem,
- II o volume se conserva durante a deformação plástica,
- III as máximas deformações angulares são proporcionais às máximas tensões de cisalhamento e
- IV o escoamento obedece à regra de von Mises.

A primeira hipótese pode ser expressa matematicamente como:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \tag{9.14}$$

já a segunda resulta em:

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = C$$
(9.15)

Combinando as equações e substituindo  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  teremos para  $\varepsilon_1$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{2C}{3} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} \left( \sigma_2 + \sigma_3 \right) \right]$$
(9.16)

por analogia podemos obter as expressões para  $\varepsilon_2$ 

$$\varepsilon_2 = \frac{2C}{3} \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2} \left( \sigma_1 + \sigma_3 \right) \right] \tag{9.17}$$

 $e \varepsilon_3$ :

$$\varepsilon_3 = \frac{2C}{3} \left[ \sigma_3 - \frac{1}{2} \left( \sigma_1 + \sigma_2 \right) \right] \tag{9.18}$$

Lembrando a definição de  $\overline{\sigma}$ :

$$\overline{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
(9.19)

### 9.3 Fluência em estados triaxiais de tensão

Soderberg então nota que:

$$\frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \sigma_1} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{2\overline{\sigma}} \tag{9.20}$$

Comparando com as equações da página anterior, temos:

$$\varepsilon_1 = \frac{2C}{3}\overline{\sigma}\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma_1} \tag{9.21}$$

Vamos agora assumir implicitamente que em um estado triaxial de tensões a deformação efetiva ( $\overline{\epsilon}$ ) definida como:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
(9.22)

de onde se obtém,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{2}{3}C\overline{\sigma} \tag{9.23}$$

e

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \sigma_1} \overline{\varepsilon} \tag{9.24}$$

Assumindo-se agora que a taxa de deformação mínima em um estado de tensão uniaxial seja conhecida na forma de uma função de  $\sigma$  e *T*:

$$\dot{\varepsilon}_{min} = \dot{\varepsilon}_{min} \left( \sigma_1, T \right) \tag{9.25}$$

e derivando-se no tempo (mantendo a tensão constante), teremos

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \sigma_1} \dot{\varepsilon}_{min}(\sigma_1, T) \tag{9.26}$$

A relação acima permite, portanto, calcular as taxas de deformação principais em termos da taxa mínima de deformação obtida em um ensaio uniaxial. As hipóteses de Soderberg são suficientemente gerais de forma permitir uma boa confiabilidade para esta expressão. Os dados de fluência em estados de tensão triaxiais, de acordo com Soderberg, correlacionam muito bem quando plotados em termos da tensão e da taxa de deformação equivalentes.

# 9.4 Relaxação de tensão

Relaxação de tensão também é um problema importante em materiais cristalinos:

- relaxação da tensão em juntas parafusadas,
- relaxação da tensão em juntas montadas por interferência,
- relaxação de tensões residuais.

Considere um componente sujeito a uma deformação total constante  $\varepsilon_t$ :

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{pl} \tag{9.27}$$

onde  $\varepsilon_{el}$  é a componente elástica da deformação e  $\varepsilon_{pl}$  é a componente plástica (de fluência). Quando o componente aumenta de comprimento (devido à fluência), a única forma da deformação total permanecer constante será diminuindo a parcela elástica:

$$\dot{\varepsilon}_{el} = -\dot{\varepsilon}_{min}(\sigma, T) \tag{9.28}$$

Temos portanto que:

$$\frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -\dot{\varepsilon}_{min}(\sigma, T) \tag{9.29}$$

que é a equação diferencial a ser resolvida.

Como  $\dot{\varepsilon}_{min}$  é uma função crescente da tensão, a equação acima resulta numa queda contínua da tensão conforme o tempo passa, que é mais intensa para os pontos de concentração de tensões no interior do componente, o que corresponde ao fenômeno da relaxação de tensão.

# 10 MECANISMOS DEFORMAÇÃO E DE FRATURA EM FLUÊNCIA

A análise feita no capítulonaterior permite executar uma tarefa de grande importância na indústria: desenvolver projetos de engenharia em situações onde a deformação por fluência é relevante.

A compreensão do fenômeno, entretanto, é fundamental para o desenvolvimento de materiais resistentes à fluência e para o aumento da confiabilidade dos modelos empregados na descrição do fenômeno.

Desta forma faz-se necessário desenvolver modelos baseados em **mecanismos de deformação** e fratura em solicitações de fluência.

# 10.1 Equação MBD

Baseado em: A. K. Mukherjee "An examination of the constitutive equation for elevated temperature plasticity" *Mater. Sci. Engng. A*, **322** (2002), 1-22.

Em uma série de artigos publicados entre 1968 e 1969 o grupo de pesquisadores em torno de J. E. Bird, J. E. Dorn e A. K. Mukherjee propôs a seguinte equação que, hoje em dia, é conhecida como equação de Mukherjee-Bird-Dorn (MBD):

$$\dot{\varepsilon}_{min} = \frac{ADGb}{k_BT} \left(\frac{\sigma}{G}\right)^n \left(\frac{b}{d}\right)^p \tag{10.1}$$

onde *D* é a difusividade (característica do mecanismo controlador da deformação plástica), *G* é o módulo de cisalhamento, *b* é o módulo do vetor de Burgers (das discordâncias responsáveis pela deformação plástica),  $\sigma$  é a tensão remota aplicada, *d* é o tamanho de grão do material e *A*, *p* e *n* são constantes características do material e do mecanismo controlador da fluência (independentes de *T*,  $\sigma$  e *d*).

#### 10.1 Equação MBD

A equação MBD permite sistematizar uma série de observações experimentais referentes ao estágio II da fluência e classificar modelos de mecanismos controladores, a saber:

- os efeitos da temperatura, da tensão e do tamanho de grão são separáveis, isto é um não interfere com o outro (desde que o mecanismo controlador seja o mesmo, é claro),
- o efeito da temperatura é basicamente incorporado na variação da difusividade, que por sua vez é termicamente ativada,
- os efeitos da tensão e do tamanho de grão são do tipo "lei de potência" (*power-law*), portanto as constantes p e n podem ser determinadas em gráficos bilogarítmicos envolvendo a taxa mínima de fluência e uma destas duas variáveis e, por fim,
- os mecanismos controladores de fluência podem ser identificados pelas constantes A, p e
   n.

Podemos dividir os mecanismos de fluência em quatro classes, a saber:

- a. mecanismos difusionais,
- b. mecanismos baseados na superação de barreiras por ascensão de discordâncias (dislocation creep),
- c. mecanismos baseados em escorregamento de discordâncias (dislocation glide),
- d. mecanismos baseados em deslizamento de contornos de grão.

# 10.1.1 Mecanismos difusionais

O fluxo de difusão pode interagir com o campo de tensão (Fig. 10.1), provocando uma deformação que tende a diminuir a energia elástica associada ao sistema.

## Mecanismo de Nabarro-Herring

O caso esquematizado na Figura 10.1 sugere que as lacunas são produzidas nas superfícies livres paralelas à direção da aplicação dos esforço mecânico e migram para as superfícies perpendiculares. As distâncias de difusão, bem como a razão entre área de superfície livre por volume de amostra, entretanto, levariam a taxas mínimas de fluência muito inferiores às observadas experimentalmente. Nabarro e Herring propuseram, independentemente, um modelo



Figura 10.1: Demonstração de que lacunas interagem com campos de tensão. A energia elástica gerada pelo campo  $\sigma$  (a) pode ser aliviada se lacunas forem nucleadas nas superfícies perpendiculares à tensão de tração e se elas migrarem para as superfícies paralelas (b).

semelhante ao discutido acima, porém onde as lacunas são produzidas **nos contornos de grão paralelos** e migram **para os contornos de grão perpendiculares** (Fig. 10.2).

Este mecanismo, atualmente, é conhecido como mecanismo de Nabarro-Herring (NR) e apresenta a seguinte expressão para a taxa mínima de fluência:

$$\dot{\varepsilon}_{min} \approx \frac{7\sigma Db^3}{k_B T d^2} \tag{10.2}$$

ou seja, p = 2 e n = 1.

- O mecanismo de NH é experimentalmente observado em tensões baixas (tipicamente para  $\frac{\sigma}{G} \leq 10^{-4}$ ) e temperaturas homólogas altas (típicamente  $\tau_H > 0, 7$ ).
- Como o mecanismo implica, o aspecto crítico do modelo é a nucleação de lacunas nos contornos de grão paralelos ao esforço. Se estes contornos forem minimizados a taxa mínima de fluência também diminuirá (esta é a justificativa para o uso de materiais com grãos colunares ou monocristalinos em aplicações onde a fluência é crítica).
- A queda de resistência à fluência supera o ganho de resistência mecânica produzido pelo refino do contornos de grão (relação de Hall-Petch), desta forma em aplicações onde a fluência é crítica desejamos utilizar os materiais de maior tamanho de grão possível.



Figura 10.2: Representação dos fluxos de átomos e de lacunas responsáveis pela deformação de fluência segundo o modelo de Nabarro-Herring.

## Macanismo de Coble

Em temperaturas menores que as onde o mecanismo de NH é observado, a fluência segue em um regime diferente, caracterizado por uma entalpia de ativação menor que a da difusão em volume (que, porém, correlaciona muito bem com a energia de ativação para difusão por contornos de grão). Coble (1963) postulou um mecanismo baseado na difusão de lacunas ao longo dos contornos de grão, que atualmente é conhecido como **mecanismo de Coble**:

$$\dot{\varepsilon}_{min} \approx \frac{50D^* \sigma b^4}{k_B T d^3} \tag{10.3}$$

ou seja, n = 1 e p = 3, onde  $D^*$  é a constante de difusão por contornos de grão.

### Mecanismo de Harper-Dorn

Harper e Dorn (1957) identificaram um mecanismo de fluência em monocristais de alumínio que foi atribuido à ascensão de discordâncias em cunha controladas pela difusão de lacunas (Fig. 10.3). O **mecanismo de Harper-Dorn** (HD) obedece à seguinte relação:

$$\dot{\varepsilon}_{min} \approx \frac{Db\sigma}{k_B T} \tag{10.4}$$

ou seja, n = 1 e p = 0. Note a independência do tamanho de grão, que faz sentido já que este mecanismo somente é observado em materiais monocristalinos ou com tamanhos de grão muito grandes.



Figura 10.3: Representação esquemática da interação entre discordâncias em cunha em ascensão e campos elásticos, responsável pela deformação em fluência de acordo com o mecanismo de Harper-Dorn.

### Resumo dos mecanismos difusionais

O mecanismo HD é observado para tensões baixas e temperaturas elevadas e predomina apenas quando o tamanho de grão é muito elevado (caso contrário predominam NH ou Coble).

O mecanismo HD foi observado em um certo número de metais, porém há pouca evidência para este mecanismo em cerâmicas, provavelmente devido ao fato de que cerâmicas normalmente tem tamanhos de grão pequenos, que favorecem outros mecanismos difusionais de fluência.

Fluência em cerâmicas ocorre fundamentalmente pelos mecanismos de NH ou Coble, porém

os processos são mais complexos que no caso de metais, pois dependendo da temperatura ou da tensão pode predominar a difusão de uma ou outra espécie iônica.

## **10.1.2** "Dislocation creep"

A um nível de tensão mais elevado  $(10^{-4} \le (\frac{\sigma}{G}) \le 10^{-2})$  outro regime de difusão passa a ser observado, que se caracteriza pela superação de obstáculos através de ascensão da discordância bloqueada (vide 10.4). Este mecanismo, entretanto, não deve ser confundido com o mecanismo HD, pois neste último a discordância não escorrega e a deformação observada deve-se apenas à ascensão da discordância.

Este mecanismo recebe o nome de "*dislocation creep*" (DC) na literatura inglesa e se caracteriza pela relação:

$$\dot{\varepsilon}_{min} \approx \frac{ADGb}{k_B T} \left(\frac{\sigma}{G}\right)^5 \tag{10.5}$$

portanto, n = 5, p = 0.



Figura 10.4: Representação esquemática da fundamentação do modelo de Weertman para o mecanismo DC: a discordância, por ascensão, atinge um plano de escorregamento acima da barreira, tal que a tensão contrária exercida por esta possa ser suplantada pela tensão aplicada.

O modelo de Weertman, esquematizado na Figura 10.4, calcula a taxa de ascensão a partir da concentração de equilíbrio de lacunas e da difusividade da liga, necessárias para que uma discordância inicialmente bloqueada por um obstáculo se afaste de uma distância *h* do plano de escorregamento, a tal ponto que a tensão de cisalhamento projetada sobre o novo plano de escorregamento supere a tensão contrária exercida pelo obstáculo.

## **10.1.3** Fluência por escorregamento de discordâncias

A níveis de tensão ainda maiores  $(\left(\frac{\sigma}{G}\right) \ge 0, 2)$  surge outra transição para um regime com  $n \approx 10$  ou com dependência exponencial na tensão, que é conhecido na literatura como **quebra do regime de lei de potência** ("*power-law breakdown*"). Resultados experimentais sugerem

que o mecanismo controlador, neste caso, passa a ser o escorregamento termicamente ativado de discordâncias. Flutuações térmicas forneceriam energia para que a tensão crítica projetada fosse superada localmente mesmo abaixo do limite de escoamento, resultando em deformação plástica em um elemento de volume no interior do corpo.

## **10.1.4** Escorregamento viscoso

Em soluções sólidas observa-se outro tipo de mecanismo de fluência denominado **escorregamento viscoso** (EV, "Viscous glide"). Este mecanismo de fluência ocorre quando algum fenômeno provoca o aparecimento de uma componente de atrito no escorregamento das discordâncias (por exemplo, interação com solutos ou com a estrutura ordenada) e é caracterizado por um expoente n = 3.

## **10.1.5** Escorregamento de contornos de grão

Escorregamento de contornos de grão é um processo observado fundamentalmente em todos os mecanismos de fluência, pois a manutenção da compatibilidade entre os grãos durante a deformação plástica só será possivel se este grau de liberdade estiver disponível ao contorno de grão durante a deformação, isto é particularmente crítico nos mecanismos de NH e Coble. Escorregamento de CGs, entretanto, adquire uma importância fundamental no estágio terciário, pois ele está associado aos mecanismos de nucleação de microcavidades, que levam à ruptura do material. Escorregamento de CGs também é fundamental na compreensão da superplasticidade, como será visto mais adiante.

A Figura 10.5 mostra o resultado de uma experiência desenhada para estudar o deslizamento de contornos de grão. Nesta experiência um corpo de prova de tração feito de um bicristal<sup>1</sup> de chumbo foi orientado de tal forma que a máxima tensão de cisalhamento atuou no plano do contorno. O deslocamento relativo dos marcadores em ambos os lados do CG evidencia a deformação angular produzida pela ação deste carregamento.

A Figura 10.6 apresenta outro exemplo da ação de deslizamento de contornos de grão em metais. A micrografia foi obtida a partir do ensaio de fluência de um corpo de prova de alumínio de alta pureza submetido a yyy MPa a xxx °C. A amostra foi deformada inicialmente 9,8%, polida e então deformada mais 1,6%. O relevo gerado na figura (evidenciado pela iluminação oblíqua) é causado pelo deslizamento relativo dos contornos de grão em direções divergentes.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Um bicristal é um corpo de prova contendo apenas dois grãos, separados por um contorno de alto ângulo, geralmente plano.



Figura 10.5: Deformação de um bicristal de chumbo sob a ação de uma tensão de cisalhamento no plano do contorno, evidenciando a ação de deslizamento de grão, evidenciado pelo deslocamento relativo dos marcadores.



Figura 10.6: Ensaio de fluência de um corpo de prova de alumínio de alta pureza submetido a yyy MPa a xxx °C. A amostra foi deformada inicialmente 9,8%, polida e então deformada mais 1,6% . O relevo gerado na figura (evidenciado pela iluminação oblíqua) é causado pelo deslizamento relativo dos contornos de grão em direções divergentes.

## 10.1.6 Efeito da dispersão de precipitados sobre a resistência à fluência

Ligas contendo dispersões de precipitados são caracterizadas por expoentes n muito altos (tipicamente 20, podendo porém atingir valores da ordem de 80-100), além de entalpias de ativação cerca de três vezes maiores que o valor para difusão em volume.

Estes resultados são racionalizados por meio da introdução do conceitos de tensão limite ( $\sigma_0$ , "threshold stress"): uma tensão mínima que deve ser superada para produzir deformação por fluência. Neste caso a equação de MBD deve ser modificada para

$$\dot{\varepsilon}_{min} = A \frac{DGb}{k_B T} \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{G}\right)^n \tag{10.6}$$

resultando em valores menores de *n* no regime de quebra da lei de potência.

## Resumo dos mecanismos de fluência

A Tabela 10.1 apresenta de forma resumida os parâmetros da Equ. 10.1 para os diversos mecanismos de deformação por fluência/superplástica, descritos anteriormente.

Tabela 10.1: Tabela-resumo dos parâmetros da equação de MBD para os diversos mecanismos de deformação por fluência/superplástica. V = difusão por volume, CG = Difusão por contornos de grão. Adaptada de A. K. Mukherjee *Mater. Sci. Engng. A*, **322** (2002) 1-22.

Mecanismo	Difusividade	А	р	n
NH	V (lacunas)	7	2	1
Coble	CG (lacunas)	50	3	1
DC (CFC)	V (lacunas)	$2,5  imes 10^{6}$	0	4,2 - 5,5
DC (CCC)	V (lacunas)	$\sim 2,5  imes 10^6$	0	4,0 - 7,0
DC (HCP)	V (lacunas)	$\sim 2,5  imes 10^6$	0	3,0 - 5,5
EV	V (soluto)	3	0	3,0 - 3,5
MNG (dispersão)	V (lacunas)	$< 8  imes 10^8 f(\lambda, r)$	0	6,0 - 8,0
escoamento superplástico	CG (lacunas)	$\sim 100$	2	2
HD (alumínio)	V (lacunas)	$1,35 \times 10^{-11}$	0	1

### Mapas de Weertmann-Ashby

Como discutido anteriormente, pela análise da dependência da taxa mínima de fluência é possível associar um dado mecanismo controlador a  $\sigma$ ,  $d \in T$ . Esta ideia foi aplicada por Weertmann e Ashby na construção dos chamados **mapas de Weertmann-Ashby**, que correspondem

a representações gráficas nos planos  $\left(\frac{\sigma}{G}\right) \times \tau_H$  ou  $\left(\frac{d}{b}\right) \times \tau_H$  das regiões correspondentes ao domínio de cada mecanismo controlador (é costume também representar as linhas de isotaxa de deformação nestes mapas).

Estes mapas permitem comparar o comportamento em fluência de materiais diferentes ou ainda o efeito da microestrutura sobre a resistência à fluência do material em escalas adimensionais.

# 10.2 Aplicação: Ligas ODS

Uma classe importante de ligas endurecíveis por dispersão resistentes à fluência são as chamadas ligas contendo dispersão de precipitados de óxido (ODS ou "oxide-dispersion strengthened"). Estas ligas contém uma dispersão muito fina de óxidos, geralmente produzida por técnicas de metalurgia do pó (por exemplo, por moagem de alta energia de ligas de alumínio, onde a camada superficial de alumina é quebrada e incorporada à matriz do material).

- Ligas ODS são caracterizadas por expoentes n da ordem de 7-8 e parâmetros A que dependem de λ/r<sup>2</sup>, onde λ é o espaçamento entre partículas e r o raio das partículas, além da existência da tensão limite σ<sub>0</sub>, além disto é estabelecido experimentalmente que a discordância se move por ascensão.
- Supostamente esta resistência elevada das ligas ODS é proveniente de dois termos aditivos
  - a tensão necessária para produzir fluência na matriz e
  - a tensão necessária para curvar a discordância em torno dos precipitados (tensão de Orowan).

A tensão limite supostamente surge de uma componente atrativa da interação da discordância com a superfície dos precipitados. Um modelo proposto por Mishra, Nandy e Greenwood (1994) atribui esta interação atrativa à dissociação da discordância em discordâncias de interface quando a discordância penetra a interface matriz/precipitado para superar o bloqueio por ascensão, o modelo prevê que  $\sigma_0$  depende:

- da distância entre partículas ( $\lambda$ ),
- do raio das partículas (*r*) e
- da redução da auto-energia da discordância no processo de dissociação.

Como Mukherjee discute, o modelo de Mishra-Nandy-Greenwood (MNG) inclui todo o efeito dos precipitados na tensão limite. Evidências experimentais (fig. 7a), entretanto, sugerem que algum efeito deve provir da constante *A* (fig. 7b), na forma

$$A = 8 \times 10^8 \exp\left[-103, 8\sqrt{\left(\frac{b}{\lambda}\right)}\right]$$
(10.7)

# 10.3 Superplasticidade

Como vimos no capítulo 4 a ductilidade de um material é limitada pelo surgimento da estricção, consequentemente, se for possível atrasar a formação da instabilidade plática iremos produzir um materila de ductilidade superior. Certos materiais apresentam alongamento em fratura muito elevado (atingindo valores da ordem de 1000%), que surgem:

- em uma faixa de taxa de deformação bem definida (tipicamente variando entre  $10^{-4}$  e  $10^{-2}$  s<sup>-1</sup>),
- em uma faixa de temperaturas bem definida (tipicamente acima de  $\tau_H = 0, 4$ ) e
- para condições microestruturais bem definidas (por exemplo, para tamanhos de grão micro- ou nanocristalinos ou microestruturas eutéticas/eutetóides muito refinadas).

Este comportamento é denominado **superplástico** e está fortemente relacionado com a fluência.

# 10.3.1 Sensibilidade à taxa de defomação e estricção

Nas aulas sobre plasticidade nós discutimos as condições para desenvolvimento da estricção em uma material com encruamento descrito pela relação de Hollomon:

$$\sigma^r = K \left( \varepsilon^r \right)^n \tag{10.8}$$

concluindo que a condição crítica para surgimento da instabilidade é dada pela lei de Considère ( $\varepsilon_u^r = n$ ).

Em materiais superplásticos a contribuição do encruamento geralmente pode ser deprezada (devido à temperatura elevada), porém a taxa de deformação também pode alterar a resistência do material e esta dependência é escrita na forma:

$$\sigma^r = C \left( \dot{\varepsilon}^r \right)^m \tag{10.9}$$

onde a constante m é denominada o coeficiente de sensibilidade à taxa de deformação, já anteriormente definido.

Vamos agora reescrever a equação anterior, lembrando que:

$$\sigma^r = \frac{F}{A}$$
 e  $\dot{\varepsilon}^r = \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{dt} = -\frac{1}{A} \frac{dA}{dt}$  (10.10)

assim

$$-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = A\dot{\varepsilon}^r = A^{1-\frac{1}{m}} \left(\frac{F}{C}\right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow -\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{F}{C}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{A^{\frac{(1-m)}{m}}}\right)$$
(10.11)

A equação acima indica que quanto menor a seção resistente, maior a velocidade com que esta diminui (desde que m < 1), desta forma as flutuações de redução de área são amplificadas resultando no surgimento da instabilidade.

Quando m se aproxima da unidade, entretanto, vemos que o decréscimo de área passa a depender unicamente da carga aplicada, indicando que o material se torna resistente ao surgimento da instabilidade. Superplasticidade ocorre nas condições de deformação (temperatura, taxa de deformação e microestrutura) que favorecem um aumento de m.

# 10.4 Fratura por fluência

Com o aumento da temperatura, o modo de fratura de uma liga dúctil muda de transgranular (a baixas temperaturas) para intergranular (a altas temperaturas) a temperatura da transição é denominada "temperatura equicoesiva" e corresponde ao ponto em que os contornos de grão passam a ser mais fracos que a matriz.

A fratura por fluência está associada ao surgimento de microcavidades durante o estágio terciário que, por sua vez, está associada ao mecanismo de deslizamento de contornos de grão. Este processo é denominado **cavitação**.

A cavitação (e portanto a fratura) é fortemente sensível à pressão hidrostática externa.

## Cavitação

Existem dois mecanismos principais de cavitação:

- tipo w, ou "wedge", que surge em pontos triplos sujeitos a cisalhamento (Figura 10.7) e
- tipo r, ou "round", que surge em contornos de grão perpendiculares à tensão normal aplicada (Figura 10.8).



Figura 10.7: Exemplo de cavidades tipo "w" em uma liga de cobre com 20% de níquel submetida à fluência com 22% de deformação a 1,7% / hora a 400  $^{\rm o}{\rm C}$ 



Figura 10.8: Exemplo de cavidades tipo "r" em uma liga de alumínio com 2% de magnésio submetida à fluência a 500 °F e  $\sigma$  = 4000 PSI.
## 11 FADIGA DOS MATERIAIS

### 11.1 Esforços dinâmicos

Até o momento discutimos principalmente o comportamento mecânico dos materiais sob a ação do que chamamos de **esforços monotônicos**, nos quais a carga (seja de tração ou de compressão) é sempre crescente.

Em um caso, entretanto, vimos que a alteração do sentido de aplicação da carga provoca mudanças no comportamento mecânico (o efeito Bauschinger). Isto nos sugere que a história (ou ainda, o caminho) de carregamento (ou de deformação) tem um papel relevante sobre a resposta do material aos esforços mecânicos.

Esforços cuja direção de aplicação da carga varia freqüentemente são denominados **esforços dinâmicos** e levam a um fenômeno conhecido pelo nome de **fadiga**.

#### Modos de carregamento cíclico

A Figura 11.1 apresenta os três modos típicos de carregamento empregados em ensaios de fadiga.

Os esforços de amplitude constante (*constant amplitude*, CA) são comumente empregados em ensaios de laboratório, mas raramente correspondem a situações reais de carregamento em componentes tecnológicos. Componentes onde o carregamento se aproxima (mas não é, realmente) a um carregamento em CA sao aqueles que trabalham em rotação com velocidade constante, por exemplo eixos e engrenagens. Os esforços CA, entretanto, são muito importantes porque permitem o estudo da fadiga (por exemplo, a propagação de uma trinca de fadiga) em uma situação controlada eliminando uma variável do problema (a variabilidade do carregamento).

Carregamento em bloco (*block loading*) era comumente empregado antes da invenção das maquinas de tração servo-controladas e eram usados para simular situações de carregamento



Figura 11.1: Representação esquemática dos modos de carregamento cíclico usualmente empregados em ensaios de fadiga.

mais realistas. Hoje em dia este tipo de carregamento não é mais empregado com freqüência.

Carregamento em espectro (*spectrum loading*) ou carregamento em amplitude variável (*variable amplitude*, VA) é uma forma de carregamento que procura simular carregamentos reais, medidos em componentes reais. Este tipo de carregamento tornou-se possível com a invenção das máquinas de tração servo-controladas, que são capazes de simular estes sinais. Espectros podem ser medidos experimentalmente para um determinado componente de interesse (por exemplo, pela instrumentação de eixos automobilísticos pode-se simular a sua história de carregamento por exemplo em um percurso em pista de teste) ou podem ser definidos como padrões e comercializados (por exemplo, o espectro característico de uma asa de avião, conhecido como FASTRAM). Os carregamentos em espectro são mais realistas, mas o estudo da fadiga sob estes esforços leva a questões muito complexas, como por exemplo, na contagem de ciclos e na definição das amplitudes correspondentes. Estes pontos serão tratados em detalhe no capítulo 15.

#### Parâmetros do carregamento cíclico

Para um esforço em amplitude constante podemos definir os seguintes parâmetros Os parâmetros (Fig. 11.2):

• Faixa de tensão:

$$\Delta \sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \tag{11.1a}$$

#### 11.1 Esforços dinâmicos



Figura 11.2: Definição dos parâmetros de carregamento cíclico.

• Amplitude de tensão:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \tag{11.1b}$$

• Tensão média:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \tag{11.1c}$$

• Razão de tensão:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \tag{11.1d}$$

Nota-se que basta especificar dois destes parâmetros<sup>1</sup> para que todo o carregamento seja definido. A freqüência é outro parâmetro, mas estudos realizados em materiais metálicos há bastante tempo mostram que a Fadiga não é afetada por este parâmetro para a faixa de freqüências usuais das máquinas típicas (de 1 a 500Hz).

Para materiais poliméricos, entretanto, temos uma forte influência deste parâmetro devido ao aquecimento adiabático (já que polímeros, em geral, são péssimos condutores de calor) e em alguns casos o corpo de prova chega a falhar por fusão localizada.

Recentemente, entretanto, ensaios de fadiga em materiais metálicos com carregamento ultra-sônico (tipicamente em 20000 Hz) se tornaram viáveis. Nestes ensaios o carregamento é produzido por ondas mecânicas propagando-se no interior do corpo de prova, que atua como um sonotrodo (variando-se o perfil do corpo de prova, por exemplo, pode-se variar a amplitude de tensão no local). O consenso dos pesquisadores que usam esta técnica, entretanto, é que se todo o cuidado for tomado para resfriar o corpo de prova, mantendo sua temperatura constante

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Exceto para a faixa de tensão e a amplitude de tensão, já que a última é simplesmente a metade da primeira.

durante o ensaio, os ensaios de fadiga nestas freqüências serão indistingüíveis daqueles realizados em amplitudos mais baixas. Não é à toa, portanto, que boa parte da máquina de fadiga é destinada ao sistema de resfriamento do corpo de prova.

## 11.2 Fadiga: definição e generalidades

No presente livro adotaremos a seguinte **Definição:** *Fadiga é um processo de degradação das propriedades mecânicas de um material que se caracteriza pelo crescimento lento de uma ou mais trincas sob a ação de carregamento dinâmico, levando eventualmente à fratura.* 

Obs.: Esta definição, por princípio, exclui o fenômeno que atinge materiais cerâmicos conhecido como **fadiga estática**. Este é mais propriamente caracterizado como um processo de corrosão sob tensão e será discutido no capítulo17.

É importante ressaltar que é possível definir-se fadiga de forma distinta. A definição acima é adotada neste livro devido a estudos recentes que apontam o papel relevante que o meio ambiente tem sobre a fadiga, que torna esta conexão com os processos de degradação mais clara.

Fadiga ocorre em todas as classes de materiais (metais, cerâmicas, polímeros e compósitos), ou seja, não há material imune à fadiga.

Fadiga ocorre mesmo para tensões baixas, nas quais não se observam deformações plásticas macroscópicas significativas (abaixo do limite de escoamento).

A degradação por fadiga é acelerada na presença de concentradores de tensão no componente, desta forma devem-se evitá-los (raios de curvatura pequenos, cantos vivos, grandes mudaças de seção em eixos) em peças que estarão sujeitas a carregamento dinâmico.

#### **Referências bibliográficas**

O assunto é tratado em todos os livros-texto importantes de mecânica dos materiais. As abordagens variam das voltadas mais à engenharia mecânica (ex. Dieter) às voltadas mais à ciência dos materiais (ex. Chawla). Fadiga, entretanto, é um tema ativo de pesquisa, com fortes características interdisciplinares. Isto significa que muito desenvolvimento novo é feito no dia a dia. Desta forma, na redação deste livro, foi feito uso de uma série de revisões bibliográficas recentemente publicadas em revistas importantes da área.

O principal artigo é: J. Schijve "Fatigue of structures and materials in the 20th century and

the state of the art" Int. J. Fatigue, vol. 25 (2003), pp. 679-702.

#### 11.2.1 História e fenomenologia da fadiga

#### **Primórdios**

Como Schijve cita em seu artigo de revisão, a conciência da fadiga como um problema de engenharia foi uma conseqüência direta da revolução industrial do século XIX. Fadiga era vista como um modo de fratura frágil (pois a superfície de fratura é aproximadamente perpendicular à máxima tensão normal e não se observa deformação plástica macroscópica significativa) que atingia componentes de máquinas a vapor, locomotivas e bombas hidráulicas após a aplicação de um grande número de ciclos de carga em situações em que um ciclo apenas não produzia dano algum.

Referência: W. Schütz "A history of fatigue" *Engng. Frac. Mech.*, vol. **54**(2) (1996), pp. 263-300.

Segundo Schütz, a história da fadiga se inicia em 1838 com um trabalho de W. A. J. Albert (um funcionário público da corte real de Hannover, responsável pela administração das minas de Clausthal, na região do Harz) que descreve o primeiro resultado conhecido de um ensaio de fadiga, realizado em correntes de correias transportadores que haviam rompido em serviço.

O desenvolvimento da fadiga, em seus primórdios, é sempre associado a este tipo de acontecimento: a investigação de um dado componente que falhou em serviço de forma inesperada.

O início da história da fadiga, como a conhecemos hoje em dia, entretanto, ocorreu com os trabalhos de A. Wöhler (publicados a partir de 1858), o engenheiro chefe de uma linha férrea da região da Silésia (hoje em dia na Polônia). Ele propos em 1860 três leis, que até hoje são relevantes:

- I Um material pode ser induzido a falhar pela múltipla repetição de tensões, que isoladamente são menores que a da resistência estática (ou seja, dos limites de escoamento e de resistência).
- II A amplitude de tensão é decisiva para a destruição da coesão do metal.
- III A tensão máxima influencia apenas no sentido de que quanto maior ela for, menores são as amplitudes de tensão que levam à falha (ou seja, um aumento da tensão média reduz a resistência à fadiga do material para uma dada amplitude de tensão).

#### Curva S-N

Uma das principais contribuições de Wöhler para a compreensão da fadiga foi na introdução das chamadas curvas S-N (ou também, curvas  $\sigma$ -N ou ainda curvas de Wöhler)<sup>2</sup>. Nestas graficase o logaritmo do número de ciclos ( $N_f$ ) ou o número de reversões ( $2N_f$ ) até a fratura na abcissa versus a amplitude de tensão (ou ainda a faixa de tensões) na ordenada (Fig. 11.3).



Figura 11.3: Uma curva S-N típica.

A curva S-N pode ser dividida em três regiões:

- I Para amplitudes de tensão próximas ao valor da resistência estática (ou seja, do limite de resistência) a curva apresenta um patamar de saturação, ou seja, se a falha não ocorre no primeiro ciclo é provável que ela venha a ocorrer apenas muito mais tarde (por exemplo, após 100 ciclos).
- II Para amplitudes de tensão intermediárias há um aumento da resistência à fadiga com a diminuição da amplitude de tensão. Este é o domínio usual de trabalho da maioria dos materiais.
- III Para amplitudes de tensão menores que um dado valor mínimo (conhecido como limite de fadiga,  $\sigma_L$ ) a fratura passa a ocorrer num valor virtualmente infinito de ciclos.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Deve-se notar, entretanto, que Wöhler nunca desenhou uma curva S-N em seus trabalhos. Ele publicava seus resultados na forma de tabelas. Outros pesquisadores, depois da morte de Wöhler, começaram a graficar os resultados dele, "inventado" a curva S-N.

#### Limite de fadiga ( $\sigma_L$ )

Em inglês o limite de fadiga também é referido como *endurance limit*. O limite de fadiga ( $\sigma_L$ ) existe necessariamente para todos os materiais, mas em alguns casos o trecho horizontal da curva S-N pode se estabilizar em um nível de amplitude de tensão correspondente a um número muito elevado de ciclos, o que inviabiliza sua determinação experimental.

Quando um limite de fadiga não pode ser determinado experimentalmente costuma-se adotar um critério numérico para a sua definição (por exemplo, a amplitude de tensão que resulta em  $N_f = 10^7$ ). Isto faz muito sentido do ponto de vista da engenharia.

Aços se caracterizam por limites de fadiga elevados, que podem ser experimentalmente detectados. Esta é a origem da noção errônea de que apenas os aços apresentam limite de fadiga.

É importante ressaltar, entretanto, que com o emprego das novas máquinas de ensaio de fadiga em freqüência ultra-sônica tornou-se possível estender o limite superior do número de ciclos para valores muito mais altos que  $10^7$ , casos com limite de ciclos tipicamente de  $10^9$ até  $10^{12}$  ciclos tem sido publicados recentemente (fala-se em Fadiga a Gigaciclos, *Gigacycle fati-gue*). Estes experimentos demonstram que o trecho horizontal da curva S-N não é realmente horizontal, mas sim que ele caracteriza-se por uma inclinação menor que o do trecho acima do limite de fadiga. Estes estudos nuclearam (já no século XXI) um novo campo de pesquisa em fadiga, denominado **Fadiga de ultra-alto ciclo** (*Ultra-high cycle fatigue*, ou UHCF).

**Exercício 11.1** As ligas de alumínio da série 7000 (AlZnMg) possuem uma resistência mecânica superior à das ligas da série 2000 (duralumínios), porém seu custo é maior e a resistência à fadiga das duas famílias é semelhante. Qual das duas famílias de ligas é ideal para aplicações aeronáuticas, onde o peso dos componentes, assim como solicitações de fadiga, são críticos?

#### 11.2.2 Fadiga em controle de tensão

Um dos equipamentos originais que Wöhler usou para levantar suas tabelas é o que conhecemos hoje em dia por máquina de eixo rotativo ("rotating beam machine"). Nesta máquina aplica-se um momento fletor a um corpo de prova que gira sobre o seu eixo, desta forma cada ponto da superfície do corpo de prova vai sendo solicitado consecutivamente em tração e em compressão a cada revolução. Este tipo de ensaio é capaz de fornecer dados na chamada **fadiga sob reversão total**, ou seja, com  $\sigma_m = 0$ .

Neste tipo de ensaio, e em outros similares utilizados nos inicios da história da fadiga, é

natural aplicar um ciclo de tensão ao corpo de prova. Diz-se neste caso, que o ensaio é executado em **controle de carga** (*load control*).

Em 1919 o americano O. Basquin propôs descrever a curva S-N (na região II) por meio da seguinte expressão:

$$N_f = k \left( \sigma_a \right)^m \tag{11.2}$$

O regime a que este procedimento se refere é o de:

- baixas amplitudes de tensão e
- alto número de ciclos para a ruptura.

#### 11.2.3 Fadiga em controle de deformação

Em meados do século passado a atenção da engenharia a assuntos relacionados à fadiga passou a se voltar para fenômenos como a fadiga termo-mecânica, a fadiga termica e a fluência-fadiga. Estes fenômenos tem dois aspectos em comum:

- I a redução do limite de escoamento com a temperatura faz com que a deformação plástica passe a ter um papel importante no fenômeno da fadiga e
- II os esforços são melhor caracterizados pela imposição de um ciclo de deformações ao material, ao invés de um ciclo de carregamento.

Isto levou dois pesquisadores, L. F. Coffin (1954) e S. M. Manson (1953) a investigar o que hoje em dia é conhecido como **fadiga sob controle de deformação** (strain control) neste tipo de problema um ciclo de deformação é aplicado ao material e a fadiga se estabelece, portanto, em condições de tensão variável (a tensão pode aumentar ou diminuir a cada ciclo de deformação, no que se conhece como endurecimento ou amolecimento dinâmico). A fadiga sob controle de deformação é característica por:

- altas amplitudes de tensão (por volta ou acima do limite de escoamento) e
- baixo número de ciclos para a ruptura.

#### Fadiga de alto e de baixo ciclo

Hoje em dia a distinção entre controle de tensão e controle de deformação subdivide o esforço investigativo em relação à fadiga em dois campo distintos:

- Fadiga de alto ciclo (FAC) regime de controle de carga, baixas amplitudes de tensão (em relação ao limite de escoamento), alto número de ciclos para a ruptura (tipicamente até 10<sup>7</sup>) e
- Fadiga de baixo ciclo (FBC) regime de controle de deformação, altas amplitudes de deformação, baixo número de ciclos para a ruptura.

Mais recentemente, no início do século XXI, como já foi mencionado anteriormente, um novo campo de pesquisa em Fadiga tem se tornado corrente. Trata-se da **Fadiga em ultra-alto ciclo** e se dedica ao estudo dos fenômenos associados à fadiga próximo e abaixo do limite de fadiga (com ruptura na ordem de  $10^9$ ).

#### Análise de Coffin-Manson

Coffin e Manson desenvolveram independentemente, baseados em idéias propostas por Bauschinger por volta de 1880, um formalismo para a descrição da curva E-N (ou  $\varepsilon$ -N) em condições de fadiga sob controle de deformação. Estes autores dividem a deformação total  $\Delta \varepsilon_t$ em duas parcelas, uma elástica  $\Delta \varepsilon_e$  e a outra plástica  $\Delta \varepsilon_p$  (Fig. 11.4):

$$\frac{\Delta\varepsilon_t}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \tag{11.3}$$

A parcela elástica pode ser expressa por uma relação similar à de Basquin:

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma_a^r}{E} = \left(\frac{\sigma_f'}{E}\right) \left(2N_f\right)^b \tag{11.4}$$

onde  $\sigma_a^r$  é a amplitude de tensão real,  $\sigma_f'$  é conhecido como **coeficiente de resistência à fadiga** (equivalente ao intercepto no eixo da tensão para  $2N_f = 1$ ) e *b* é o **expoente de resistência à fadiga**.

Já a parcela plástica é descrita pela relação de Coffin-Manson:

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon_f' \left( 2N_f \right)^c \tag{11.5}$$

onde  $\varepsilon'_f$  é o **coeficiente de ductilidade em fadiga** (intercepto no eixo das deformações para  $2N_f = 1$ ) e *c* é o **expoente de ductilidade em fadiga**.



Figura 11.4: Representação esquemática da separação da curva S-N em regiões de contribuição elástica (alto ciclo) e plástica (baixo ciclo), segundo Coffin e Manson.

#### Fadiga de baixo ciclo

A FBC é um problema relevante de engenharia para os casos de componentes sujeitos a poucos pulsos intensos de tensões em serviço a altas temperaturas (por exemplo em turbinas a gas ou a vapor e vasos de pressão). O caso de turbinas em aviões a jato é particularmente importante, pois estes componentes estão sujeitos a uma série de demandas de projeto conflitantes, como: baixa massa, baixo consumo de combustível (ou seja, altas temperaturas de operação), manutenção da integridade estrutural e longa vida em fadiga (¿ 20000 horas de vôo).

Desta forma o interesse da engenharia pela FBC cresceu grandemente desde 1954 (com a popularização dos aviões a jato), e é principalmente associada aos materiais resistentes ao calor.

### **11.3** Diagramas de vida constante

Ref.: G. P. Sendeckyj "Constant life diagrams — a historical review" *Int. J. Fatigue* 23 (2001) 347-353.

Diagramas de vida constante são representações gráficas do regime seguro de uso de um dado material sob carregamento cíclico para um dado critério de tempo de vida especificado (por exemplo, para o limite de fadiga no caso de vida infinita). Estes diagramas podem ser

expressos de diferentes maneiras em função dos dois parâmetros de carregamento ciclico que são selecionados para a sua construção ( $\sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_a, \Delta\sigma, \sigma_m$  ou *R*).

Conforme Sendeckyj ressalta, os diagramas de vida constante surgiram no final do século XIX (portanto, nos inícios da história da fadiga) e estavam associados ao problema da construção de pontes ferroviárias (de aço). Nestas pontes a solicitação cíclica pode ser dividida em duas partes, uma estática (devida ao peso da estrutura) e outra dinâmica (durante a passagem de um vagão, por exemplo). Estes diagramas foram desenvolvidos em duas vertentes teóricas, que serão descritas a seguir.

Gerber (1874), baseado nos dados de Wöhler, apresentou um gráfico de  $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_u}$  vs.  $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_u}$  (onde  $\sigma_u$  é o limite de resistência do material) e concluiu que estes dados podiam ser descritos por uma parábola. Os limites da região de operação segura, segundo Gerber, são dados por:

$$\sigma_a = \sigma_{R=-1} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 \right]$$
(11.6)

onde  $\sigma_{R=-1}$  é a amplitude de tensão correspondente a uma determinada vida útil (novamente, o limite de fadiga, caso desejemos vida infinita) no caso de um ensaio com reversão total.

Em 1899 Goodman propôs utilizar a **teoria dinâmica** para a criação de um critério para o projeto de pontes ferroviárias. Esta teoria estabelece que:

"as cargas cíclicas são equivalentes à aplicação de cargas repentinas (ou seja, de impacto) e que, conseqüentemente, um componente de metal não iria se romper caso a tensão 'momentânea' não excedesse a tensão estática de ruptura do material. Assim, a carga mínima (estática) mais duas vezes a faixa de tensão (carga dinâmica) devem ser iguais ao limite de resistência do material"

ou seja:

$$\sigma_a = \sigma_{R=-1} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right) \right] \tag{11.7}$$

Outros critérios existem, por exemplo, Soderberg (1930) propôs utilizar o critério de Goodman, porém com o limite de escoamento ( $\sigma_e$ ) como tensão de referência para a falha estática:

$$\sigma_a = \sigma_{R=-1} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_e} \right) \right] \tag{11.8}$$

A Figura 11.5 apresenta a representação gráfica dos diagramas de vida constante segundo Gerber, Goodman e Soderberg.



Figura 11.5: Diagramas de vida constante segundo Gerber, Goodman e Soderberg.

Experimentalmente observa-se que na maioria dos casos a fratura se situa entre as curvas de Gerber e de Goodman. Como Goodman propõe um critério mais conservador (além de ser mais facilmente implementado em cálculos) este critério é preferível.

Nenhum destes critérios tem uma base teórica sólida (a teoria dinâmica é questionável do ponto de vista moderno). Desta forma estes critérios devem ser considerados empiricos e seu uso deve ser restrito.

Os critérios foram inicialmente propostos para descrever situações de carregamento uniaxial. No caso triaxial calcula-se a energia equivalente de distorção (critério de von Mises) para os casos uniaxial e multiaxial assumindo-se que o comportamento sob carregamento cíclico é idêntico para a situação uniaxial e a situação triaxial e calculando-se o máximo valor da tensão média pelo critério de von Mises.

**Exercício 11.2** O aço AISI 4340 apresenta limite de fadiga determinado em ensaios de fadiga em flexão rotativa ( $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0$ ) na faixa entre 300 e 330 MPa e limite de resistência em tração  $\sigma_u = 820$  MPa. Determine a amplitude de tensão segura de trabalho para este aço em um carregamento cíclico com R = 0, 1. Dica: Costrua o diagrama de vida constante segundo Goodman para este aço.

## 12 FRATURA POR FADIGA

A fratura por fadiga pode ser dividida em três estágios:

- 1. Nucleação da trinca
- 2. Propagação estável da trinca
- 3. Propagação instável da trinca

A teoria da fadiga se ocupa fundamentalmente dos dois primeiros estágios, o primeiro por motivos óbvios, já o segundo é importante porque, na maioria dos casos este ocupa grande parte da vida útil de um componente de engenharia.

## 12.1 Nucleação da trinca

A nucleação da trinca ocorre predominantemente em descontinuidades do componente. Descontinuidades fundamentais são as superfícies ou então interfaces como contornos de grão ou interfaces matriz/inclusão.

A nucleação da trinca tende a ser favorecida pela existência de tensões normais de tração. Desta forma concentradores de tensão tem um papel fundamental na nucleação da trinca de fadiga.

As superfícies livres são sítios preferenciais de nucleação de trincas de fadiga, pois normalmente apresentam menores restrições à deformação plástica (além de serem os pontos de máxima tensão na maioria dos concentradores de tensão).

Um aspecto importante da nucleação de trincas de fadiga está associada à formação de estruturas complexas de deformação no material. Estas estruturas se formam devido às elevadas deformações que caracterizam o processo de carregamento cíclico (a deformação é cumulativa entre os ciclos). Desta forma estruturas muito estáveis de discordâncias são formadas (lembrando a discussão que foi feita no capítulo 4). Um aspecto importante da nucleação de trincas de fadiga está na formação da **bandas de deformação persistentes** (PSB, "persistent slip bands"). Estas heterogeneidades de deformação caracterizam-se pela formação de bandas de deslizamento na superfície do material. Estas bandas, mesmo depois do polimento da superfície, voltam a se formar no mesmo local, ou seja, elas *persistem*.

#### Intrusões e extrusões

Uma das consequências da formação das PSBs está no desenvolvimento de irregularidades superficiais por conta dea deformação cíclica. Estas irregularidades, denominadas **intrusões** e **extrusões** tem papel fundamental na nucleação de trincas de fadiga. A Figura 12.1 apresenta um modelo simplificado para a formação de intrusões e extrusões em uma superfície inicialmente plana.



Figura 12.1: Mecanismo simplificado para a formação de extrusões (a) e intrusões (b).

## 12.2 Aplicação: Efeito da qualidade da superfície sobre a vida em fadiga

Como a nucleação da trinca de fadiga ocorre predominantemente na superfície do material, a sua qualidade irá influenciar significativamente o comportamento sob fadiga do componente. Dois aspectos principais da preparação superficial que favorecem a resistência à fadiga são:

- Polimento
- Introdução de tensões residuais de compressão

#### Shot-peening

Um processo industrial de tratamento superficial aplicado rotineiramente a componentes que irão sofrer solicitações cíclicas (eixos automotivos, asas de avião) é o chamado **shot-peening** (a prática industrial utiliza o termo em inglês. Uma tradução possível seria **jatea-mento**, porém este termo não é adotado nas indústrias). Neste tratamento, pequenas esferas de aço são arremessadas contra a superfície do corpo produzindo deformação plástica localizada. Esta deformação plástica, por sua vez, gera tensões residuais de compressão na superfície do componente. O tratamento de shot-peening usualmente eleva o limite de fadiga do componente.

## 12.3 Propagação da trinca

Estima-se que o estágio de propagação estável da trinca de fadiga consuma por volta de 95% da vida útil de um componente submetido a solicitações cíclicas. Desta forma a investigação da propagação estável de trincas de fadiga adquire uma relevância especial na engenharia.

A propagação da trinca de fadiga (incluindo a propagação instável) pode ser dividida em três estágios, como esquematizado abaixo (Fig. 12.2):

- I Uma ou mais trincas começam a se propagar a partir da superfície, seguindo planos de deslizamento orientados a cerca de 45° do eixo de carregamento. Estas trincas crescem pouco (cerca de poucos micra por ciclo) e encontram em seus caminhos contornos de grão.
- II Após uma certa distância e ao atingir um contorno de grão (não necessariamente o primeiro), uma das microtrincas do estágio I muda de orientação passando ao estágio II e



Figura 12.2: Representação esquemática dos três estágios de propagação de uma trinca de fadiga.

começa a se propagar aproximadamente perpendicular ao plano de máxima tensão de tração. Esta trinca passa a dominar o processo dano por fadiga.

III - Após um determinado tamanho crítico a trinca atinge as condições necessárias para sofrer crescimento instável (ou seja, atinge o comprimento crítico) e a ruptura final do corpo ocorre no próximo ciclo de carregamento em tração.

As microtrincas de fadiga, características do estágio I, estão intimamente relacionadas às PSBs e, portanto, à nucleação da trinca. A propagação de trinca é influenciada pela microestrutura e ocorre por cisalhamento em planos cristalográficos (os planos de deslizamento correspondentes à PSB inicial). Não se conhece que mecanismo é responsável pela transição para o estágio II, porém esta transição está nitidamente relacionada à transposição de um contorno de grão (não necessáriamente o primeiro que a micro-trinca encontra) e indica uma mudança de mecanismo de propagação, já que deste ponto em diante apenas a trinca principal passa a se propagar (no caso de componentes com multiplos concentradores de tensão, mais de uma trinca principal pode se propagar no mesmo, porém o mecanismo aquí nada tem a ver com a propagação das micro-trincas em sí).

O estágio II corresponde à maior parte do dano de fadiga e é caracterizado por uma trinca principal que se propaga aproximadamente a 90° do eixo de carregamento. A propagação da trinca é descontínua (a trinca avança um certo  $\Delta a$  por ciclo) e a posição da frente da trinca durante a vida útil do componente freqüentemente pode ser associada a marcas aproximadamente concêntricas na superfície de fratura (**estrias**).

#### Shear lip

Para componentes delgados é possível observar a transição do modo de fratura plano (característico do estágio II) para uma fratura inclinada a 45° em relação ao eixo de carregamento, produzindo o que se conhece por "shear lip" (Fig. 12.3). Esta transição está associada à passagem do EPD (fratura plana) para o EPT (fratura inclinada) com o avanço da trinca, por conta do crescimento da zona plástica.



Figura 12.3: Modelo de Schijve para a transição da fratura plana para fratura inclinada com o avanço de trinca de fadiga (e com a formação dos "shear lips").

## 12.4 Superfície de fratura

- Como mencionado anteriormente, a superfície de fratura é macroscopicamente plana e perpendicular ao eixo de carregamento (modo I), porém em uma escala mais fina observamos que a topografia da superfície de fratura apresenta ondulações em torno do plano médio, subindo e decendo de forma aproximadamente aleatória.
- A superfície de fratura também apresenta uma rugosidade característica. Resultados em liga de alumínio sugerem que esta rugosidade depende do meio ambiente em que a fadiga se processa, sendo menor quanto mais agressivo for o meio.
- As estrias normalmente são observáveis apenas com aumentos muito grandes (por exemplo, com Microscópio eletrônico de transmissão, usando réplica da superfície). Em certos

#### 12.4 Superfície de fratura

casos elas podem mesmo estar ausentes (embora haja evidência de que a propagação ainda é intermitente).

#### **Estrias**

- Estrias são formadas pelo relevo resultande da formação da zona plástica no ciclo de tração e no ciclo reverso de compressão (arredondamento da trinca).
- Na maioria dos materiais (incluindo polímeros) as estrias estão associadas à posição da trinca a cada ciclo de carregamento, permitindo-se assim medira a taxa de avanço da trinca pela medida da separação entre as estrias.
- Existem excessões ao que foi dito acima: por exemplo, plásticos que se deformam por microfiblilamento ("crazing") em baixas amplitudes de tensão.

#### 12.4.1 Fadiga em polímeros

Como mencionado anteriormente, polímeros amorfos podem apresentar **bandas de crecimento denscontínuo** ("Discontinuous Growth Bands", DGB), que são semelhantes a estrias porém apresentam um espaçamento cerca de três ordens de grandeza maior. As DGBs são formadas em casos onde a trinca permanece estacionária por um grande número de ciclos, propagando-se então subitamente. Os modelos que descrevem este fenômeno estão vinculados à formação e crescimento de microfibrilas (MFBs) à frente da trinca, com a posterior propagação da trinca ao longo da MFB.

Outro aspecto relevante da fadiga em polímero está realcionado ao **aquecimento histerético**. Durante o carregamento cíclico ocorre deformação plástica e parte do trabalho mecânico é dissipado na forma de calor. Como polímeros geralmente são péssimos condutores de calor este se acumula localmente, elevando a temperatura do material. Esta elevação de temperatura pode ser suficiente para fundir o polímero, resultando na falha.

#### Fratografia

**Fratografia** é o ramo da ciência dos materias que envolve a observação de uma superfície de fratura e a análise, com base nesta observação, dos motivos que levaram à falha. Fratografia é muito rica, principalmente em conexão com a falha por fadiga. Apenas com a observação (muitas vezes a olho nú) da superfície de fratura por fadiga de um eixo, por exemplo, é possivel decidir-se qual foi o concentrador de tensão que deu origem à falha, determinar acidentes de

percurso na vida útil do componente e até mesmo decidir qual era o sentido de rotação do eixo quando em operação.

#### Exercício 12.1

Leia o trecho inicial sobre fadiga do livro de R. W. Herzberg (Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials, John Wiley and Sons,  $4^{a}$  ed., 1996, pp. 521 – 526) e responda:

- a. Qual o mecanismo responsável pela formação de marcas de praia (beach markings)?
- b. Qual o mecanismo responsável pela formação de marcas de catraca (ratchet markings)?
- c. Como a severidade do entalhe afeta a morfologia da superfície de fratura?

# 13 TEORIAS DE ACUMULAÇÃO DE DANOS E PROPAGAÇÃO DA TRINCA DE FADIGA

## 13.1 Previsão de vida em fadiga

Até o momento discutimos a fadiga como um fenômeno associado ao carregamento cíclico. Na prática industrial, entretanto, o carregamento cíclico é pouco comum. Carregamento em bloco (por exemplo, eixos de máquinas que operam intermitentemente) e carregamento em espectro (por exemplo, componentes da fuselagem de aviões) são muito mais comuns. Isto torna necessário desenvolver metodologias para prever o comportamento dos componentes sob estes esforços dinâmicos complexos ← teorias de acumulação de danos.

Como mencionado na aula anterior, a fadiga é um processo de degradação das propriedades mecânicas dependente do tempo. Isto induz ao conceito de **acumulação de danos**. A ideia central é que cada ciclo de carregamento resulta em alterações irreversíveis da estrutura do material que se acumulam até atingir um valor crítico, acima do qual a vida útil do material se exaure.

#### Regra de Palmgren-Miner-Langer

Em 1924 o engenheiro sueco A. Palmgren propôs a primeira regra de previsão de vida em fadiga para solicitações não constantes. A regra de Palmgren estipula que o dano produzido a cada ciclo é linear (Fig. 13.1).

 Em 1937 B. F. Langer, nos EEUU, propôs essencialmente a mesma regra linear (provavelmente ignorando o trabalho de Palmgren), com a sofisticação de separar o dano responsável pela nucleação da trinca e o dano responsável pela propagação da trinca até a fratura.



Figura 13.1: Esquema de cálculo da vida em fadiga segundo a regra de Palmgren-Miner-Langer.

 S. V. Sorensen, na URSS em 1938 e M. A. Miner, nos EEUU em 1945, também propuseram regras lineares equivalentes à de Palmgren, cabendo a este último autor expressá-la por meio de uma equação:

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{n_k}{N_k} = 1 \tag{13.1}$$

onde *M* é o número de níveis de amplitude de tensão distintos,  $n_k$  é o número de ciclos correspondente a cada nível de tensão e  $N_k$  é o número de ciclos para a fratura correspondente ao nível de amplitude de tensão  $\sigma_k$ .

#### Exercício 13.1

Um determinado componente encontra-se sujeito a um espectro de tensões em serviço. Este espectro foi analisado e transformado nos histogramas de amplitude de tensão ( $\sigma_a$ ) por dois métodos de contagem diferentes (vide sec. 15.2), cruzamento de nível e "rainflow", que são mostrados na Tabela 13.1. O material do componente em questão é um duralumínio (AA2024) extrudado, cuja curvaS-N pode ser descrita pela relação de Basquin (Eq. 11.2) com parâmetros: k = 6,59 e m = -0,07.

Com base nestes dados responda:

- a . Qual o limite de fadiga do material, supondo que este é definido como a amplitude de tensão correspondente a  $N_f = 5 \times 10^7$  ciclos?
- b. Qual o número de ciclos (*N*) do carregamento no espectro de serviço previsto para a ruptura do componente usando os dados dos dois métodos de contagem de ciclos?

Tabela 13.1: Análise do espectro de amplitudes de tensão de serviço do componente em questão por dois métodos de contagem: cruzamento de nível (CN) e "Rainflow" (R). Os resultados são dados em "fração de cíclos", ou seja, a probabilidade de que um dado ciclo de carregamento do espectro tenha esta amplitude de tensão.

$\sigma_a$ [MPa]	fração (CN)	fração (R)
210	0.05	0.01
220	0.12	0.05
230	0.34	0.23
240	0.36	0.37
250	0.10	0.29
260	0.02	0.03
270	0.01	0.02

c . Discuta a diferença no número de ciclos esperados para a fratura do componente calculados no ítem anterior. Por que ela ocorre?

Dica — Utilize o critério de acúmulo linear de dano de Palmgren-Miner (Eq. 13.1) para a previsão do número de ciclos para a falha do componente.

#### Crítica à regra linear

A linearidade da regra de Palmgren-Langer-Miner implica que os danos realizados nos diferentes níveis de amplitude de tensão são independentes entre sí. Isto significa, em princípio, que a ordem em que os diferentes níveis de amplitude são aplicados ao componente é irrelevante para o resultado. Usando o exemplo do último gráfico, o resultado será o mesmo se os 25% de cíclos de baixa carga forem aplicados antes ou depois dos 75% de ciclos de alta carga. Experimentalmente isto não se verifica. A vida útil do componente **depende** da história de carregamento e será **menor** se o bloco de ciclos de baixa carga for aplicado **antes** dos ciclos de alta carga. Diz-se que o material apresenta **interação de cargas** ("load interaction").

Um grande número de critérios de previsão de vida em fadiga tem sido adotados na engenharia. A. Fatemi e L. Yang (*Int. J. Fatigue* **20**, pp. 9-34, 1998) apresentam um grande númere destes critérios, alguns incluindo o efeito de interação de cargas. Do ponto de vista do conhecimento atual, entretanto, estes métodos estão fadados a fornecer soluções aproximadas ao problema proposto, como será visto em uma aula futura. A revisão acima indicada, entretanto, é recomendada para o aluno que se interessar pelos fundamentos dos critérios adotados na engenharia.

## 13.2 Aplicação da MFEL à fadiga: Relação de Paris

A discussão anterior implica num certo caráter misterioso para o dano de fadiga. No caso do dano de nucleação ele está relacionado ao desenvolvimento da estrutura de deformação, à formação das PSBs (ou de microfibrilamento, no caso de polímeros) e ao desenvolvimento das intrusões e extrusões. Já no dano de propagação nós sabemos o que é o dano: ele corresponde a uma trinca se propagando pelo componente. Desta forma o dano de propagação tem um caráter muito mais sólido, podendo eventualmente ser medido. Neste contexto é natural que a Fadiga e a Mecânica da Fratura tenham uma forte superposição. Iremos a seguir descrever os fundamentos da aplicação da MFEL à fadiga, como são entendidos hoje em dia.

Em 1962, P. C. Paris defendeu sua tese de doutoramento na Lehigh University (EEUU). Este autor pesquisou a propagação de trincas de fadiga e correlacionou com diversos parâmetros da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL). Como resultado ele propôs que a taxa de crescimento da trinca  $(\frac{da}{dN})$  estaria relacionada a  $\Delta K \equiv Y \Delta \sigma \sqrt{\pi a}$  por:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = C\left(\Delta K\right)^n \tag{13.2}$$

que é conhecida hoje em dia como **relação de Paris** (*C* e *n* são constantes).

#### Exercício 13.2

Considere uma trinca central passante de comprimento 2a = 0,5 mm em uma placa de largura  $W \gg a$  (ou seja,  $Y \approx 1$ ) feita de material com tenacidade à fratura  $K_{Ic} = 5$  MPa.m<sup>0,5</sup> carregada em modo I com uma solicitação cíclica onde  $\sigma_{min} = 0$  e  $\sigma_{max} = 100$  MPa com freqüência de 5 Hz. Determine o tempo (em termos dos parâmetros da relação de Paris) que a placa sobreviverá antes de se romper por fadiga, supondo que a propagação da trinca pode ser descrita pela relação de Paris.

Dica: Integre a relação de Paris entre  $a e a_c$ .

#### **Desenvolvimentos recentes**

Desde 1962 muito desenvolvimento ocorreu no campo da Mecânica da Fratura, em particular há o desenvolvimento da Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP). A discussão dos desenvolvimentos recentes na aplicação de meodos da Mecânica da Fratura à propagação de trincas de fadiga sai fora do escopo deste curso. O aluno interessado, entretanto, deve consultar o artigo recente de revisão de J. C. Newman Jr. (The merging of fatigue and fracture mechanics concepts: a historical perspective, *Progr. Aerospace Sci.*, vol. **34**, 1998, 347-390).

## 13.3 Críticas à relação de Paris

A relação de Paris, obviamente é um avanço no sentido em que ela permite prever a falha final se o tamanho do defeito for conhecido. A rigor, entretanto, ela não pode ser correta, já que:

- não prevê o efeito da tensão média,
- não prevê a falha estática,
- não prevê um limite de fadiga.

Quando analisamos a propagação da trinca em função de  $\Delta$  K, obtemos uma curva similar à representada na Figura 13.2.



Figura 13.2: Representação esquemática da curva  $\frac{da}{dN} \times \Delta K$  de um material metálico convencional.

A curva de propagação da trinca como apresentada, pode ser dividida em três regiões:

- I Propagação muito lenta (da ordem do parâmetro de rede por ciclo), a microestrutura (contornos de grão, per exemplo) influencia muito. Abaixo de  $\Delta K_{th}$  (*threshold*, **limiar de propagação**) a propagação cessa totalmente.
- II Regime da lei de potência (relação de Paris), a trinca é relativamente insensível à microestrutura.



Figura 13.3: Efeito de *R* sobre a propagação da trinca de fadiga.

III - Propagação rápida de trinca, condições próximas à da criticalidade estática (mecanismos atuantes são clivagem, coalescimento de microcavidades etc.),  $K_{max} \approx K_{Ic}$ .

#### Efeito de R

Por mais atrativa que seja, a representação gráfica da dependência da taxa de propagação da trinca com  $\Delta K$  não é completa. A curva depende do valor de *R* adotado no ensaio (Fig. 13.3). Em geral, valores maiores de *R* (acima de -1) levam a um deslocamento da curva na direção de maiores taxas de propagação, levando também a uma redução de  $\Delta K_{th}$ .

#### **13.3.1** Desvios do comportamento de Paris

O formalismo de Paris é tentador, pois permite um método simples para estimar a taxa de crescimento da trinca (ou seja, o dano associado à propagação da trinca) em uma estrutura teórica única, abstraindo, por exemplo, os efeitos da geometria do componente e da trinca. Infelizmente o processo de fadiga é muito mais complexo do que o previsto por esta teoria, como já fica claro pela análise do efeito de R, discutida anteriormente. Dois fenômenos adicionais, entretanto, demonstram que a propagação da trinca é fortemente não linear, estes fenômenos são:

- a. A propagação de trincas curtas e
- b. O efeito de sobrecargas (overloads) e sub-cargas (underloads).

#### Propagação de trincas curtas

Em 1975 S. Pearson (*Engng. Frac. Mech.*, vol. **7**, 1975, 235-247), trabalhando na Inglaterra, observou (em ligas comerciais de alumínio) a existência de microtrincas com 0,006mm de comprimento que se originavam em inclusões (por decoesão da interface inclusão/matriz ou por microtrincas nucleadas na inclusão) superficiais e que cresciam a uma taxa média de propagação muito superior à prevista pela relação de Paris. Este foi o início do campo de pesquisa do **problema das trincas curtas** (short crack problem).

Conforme o próprio Pearson atesta no seu artigo, a existência de um limiar de propagação  $\Delta K_{th}$  é incompatível com a nucleação de trincas de fadiga e, portanto, o comportamento de microtrincas superficiais deve **necessariamente** se desviar da curva de Paris.

O problema das trincas curtas pode ser esquematicamente representado pela Figura 13.4, adaptada livremente do artigo de J. C. Newman Jr. (opus cit.).



Figura 13.4: Taxa de poropagação de trincas curtas, comparadas às das trincas longas. Adaptado de J. C. Newman Jr. *Progr. Aerospace Sci.*, vol. **34**, 1998, 347 – 390.

#### Sobrecargas e sub-cargas

O efeito de sobrecargas pode ser esquematicamente representado pela Figura 13.5:





- Sobrecargas (*overloads*, OLs) promovem um retardo na propagação da trinca, já subcargas (*underloads*, ULs) promovem uma aceleração,
- O efeito é marcadamente não linear e não é facilmente quantificavel,
- Após um certo número de ciclos a taxa de crescimento da trinca volta a ser a mesma do estado prévio ao da aplicação da OL,
- O efeito de OLs e ULs é essencial em aplicações onde ocorre o carregamento em espectro, portanto a compreensão dos mecanismos que levam a estes efeitos é essencial para o desenvolvimento de métodos de previsão de vida em fadiga.

#### 13.3.2 Modelos explicativos dos desvios

Desde a introdução da curva de Paris em 1962 dois modelos foram propostos para justificar os desvios observados (efeito de *R*, problema das trincas curtas e efeito de sobrecargas), estes modelos são:

- Fechamento prematuro de trinca e
- Teoria dos dois parâmetros.

#### Fechamento prematuro de trincas ("crack closure")

Em 1968 W. Elber, em sua tese de doutoramento da Univ. de Nova Gales do Sul (Austrália), propôs um mecanismo capaz de explicar o efeito de *R* sobre a propagação de trincas de fadiga. Segundo este mecanismo (baseado em uma verifição experimental, vide Schijve) a deformação na ponta da trinca causa um "abaulamento" das faces da trinca que ficam para trás ("*crack wake*"). Durante o ciclo de carregamento entre  $K_{min}$  e  $K_{max}$ , portanto, as faces da trinca se tocam antes de atingir K = 0 (em  $K_{op}$ ). Este mecanismo recebe o nome de **Fechamento prematuro de trinca** ("*Crack closure*").

Elber sugeriu que o dano de fadiga ocorre unicamente quando a trinca se encontra aberta. Este autor introduziu os conceitos de  $\Delta K_{ef}$ , definido como:

$$K_{ef} = K_{max} - K_{op} \tag{13.3}$$

Segundo este formalismo,  $\Delta K$  deve ser substituido na equação de Paris, o que reduz portanto o potencial para propagação da trinca.



Figura 13.6: Mecanismos modernos de frachamento de trincas.

Hoje em dia assume-se que outros mecanismos de fechamento podem atuar durante a propagação da trinca (Fig. 13.6).

#### Teoria dos dois parâmetros

K. Sadananda e A. K. Vasudevan, ambos trabalhando nos EEUU em institutos de pesquisa da marinha americana, desenvolveram recentemente uma teoria alternativa à do fechamento de trinca, que denominaram **teoria dos dois parâmetros**. Esta teoria parte do pressuposto de que a taxa de crescimento da trinca não é apenas dependente de  $\Delta K$ , mas que  $K_{max}$  também tem seu efeito, ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = f\left(\Delta K, K_{max}\right) \tag{13.4}$$

A teoria dos dois parâmetros pode ser caracterizada por oito afirmações:

- 1. Fadiga depende fundamentalmente de dois parâmetros,  $\Delta K \in K_{max}$ ,
- 2. Existem dois limiares de propagação,  $\Delta K_{th} \in K_{max}^*$ ,
- 3. A existência dos dois limiares torna trivial a dependência de  $\Delta K_{th}$  com *R*, portanto fechamento de trinca é desnecessário,
- 4. Caso o fechamento de trinca seja importante no processo, ele será caracterizado por um terceiro parâmetro,
- 5. A força motriz para o crescimento da trinca é o estado de tensão na ponta da trinca, ou seja, a superposição das tensões geradas pela tensão remota e das tensões residuais de compressão existentes na ponta da trinca,
- A zona plástica à frente da trinca é uma das principais fontes de tensões residuais de compressão,

- 7. O efeito básico das tensões residuais é deslocar o valor de  $\sigma_m$ , portanto a dependência em  $K_{max}$  é mais sensível a este parâmetro e
- 8. Efeitos ambientais (ex. corrosão-fadiga) se manifestam fundamentalmente na dependência em K<sub>max</sub>.

#### Comparação dos dois modelos

- Os dois modelos são incompatíveis, fechamento de trinca se refere a um fenômeno que ocorre atrás ("wake") da trinca, enquanto que a teoria dos dois parâmetros atribui o efeito não linear a um fenômeno que ocorre à frente da trinca (na zona plástica).
- O fechamento de trinca atribui o efeito não linear a um aumento da tensão de fechamento (por exemplo, devido a uma OL), já a teoria dos dois parâmetros trabalha com a hipótese de que as tensões residuais de compressão serão maiores se a zona plástica (gerada pela OL) for maior.
- Ambos os modelos atribuem os desvios observados na propagação de trincas curtas a um desenvolvimento insuficiente da zona plástica (deficiência de fechamento levando a um K<sub>op</sub> menor ou tensões residuais de compressão menores).

A teoria dos dois parâmetros tem causado polêmica na comunidade acadêmica e tecnológica. A quase totalidade dos pesquisadores no campo da fadiga trabalham com a hipótese de que o fechamento prematuro de trinca é o principal efeito que justifica os desvios do comportamento de Paris na propagação da trinca. O mérito da teoria dos dois parâmetros, entretanto, está na sua habilidade em unificar os diferentes fenômenos responsáveis pela propagação da trinca numa estrutura cognitiva comum. Uma solução do dilema, entretanto, depende do desenvolvimento de métodos experimentais capazes de diferenciar o efeito das tensões residuais do fechamento da trinca, o que não é possível no momento.

#### Exercício 13.3

Para ser resolvido em grupos.

- I Leia o artigo de C. R. Krenn e J. R. Morris Jr. (Int. J. Fatigue, vol. 21, 1999, S147-S155).
- II Depedendo do critério estabelecido pelo professor você receberá a tarefa de defender o ponto de vista de uma das duas teorias conflitantes (fechamento de trinca ou teoria dos dois parâmetros).

- III Você poderá se basear nos argumentos tirados dos artigos:
  - a. L. P. Borrego et al. *Engng. Frac. Mech.*, **70**, 2003, 1379-1397 (fechamento de trinca) ou
  - b. K. Sadananda et al. Int. J. Fatigue, 21, 1999, S233-S246 (teoria dos dois parâmetros).
- IV Reuna-se com os colegas que tem a mesma tarefa e prepare uma estratégia do seu grupo para o debate que se seguirá.
- V Debata com o grupo rival.
- VI Ao final os grupos irão concluir qual é o modelo mais adequado para a descrição do fenômeno.

## 14 FADIGA EM MODO MISTO

Fadiga normalmente é discutida no contexto do carregamento em modo I, porém é comum que aplicações práticas envolvam outras formas de carregamento (por exemplo, modo II, modo III ou combinações). Um exemplo típico são molas helicoidais, onde predomina carregamento em modo II.

Uma revisão recente e razoavelmente completa de fadiga em modo misto é encontrada no artigo de Qian e Fatemi *Engng. Frac. Mech.* **55**(6), 1996, pp. 969-990.

## 14.1 Critérios para crescimento de trinca

Uma complicação adicional no caso de fadiga em modo misto é que a trinca não cresce mais perpendicularmente ao eixo de carregamento (muitas vezes nem de pode assumir que há um eixo de carregamento). Isto leva à definição de **critérios de crescimento de trinca em modo misto**.

#### **Critério MTS**

O primeiro critério é o da máxima tensão normal de tração ("maximum tensile stress", MTS). Ele estabelece que a trinca irá crescer na direção (ângulo  $\theta$ ) correspondente à máxima tensão tangencial de tração do estado de tensão quando a tensão tangencial atingir o valor correspondente ao limite de fadiga em carregamento uniaxial. Matematicamente:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \tag{14.1}$$

Ou ainda:

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3\cos \theta - 1) = 0 \tag{14.2}$$

#### Critério S

Outro critério estabelece que a trinca irá crescer ao longo da direção que apresentar a mínima densidade de energia de deformação, S, e inicia quando esta atinge um valor crítico,  $S_c$ . S é definida como:

$$S = a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2 + a_{33}k_3^2$$
(14.3)

onde os  $a_{ij}$  são coeficientes relacionados ao ângulo polar, ao módulo de rigidez e ao coeficiente de Poisson, os k são definidos como:

$$k_i = \frac{K_i}{\pi} \qquad (i = \mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}) \tag{14.4}$$

#### Critério J

Este critério se baseia na definição do vetor:

$$\overrightarrow{J} = J_I \overrightarrow{i} + J_{II} \overrightarrow{j} \tag{14.5}$$

Onde  $J_I$  e  $J_{II}$  são as integrais J em modo I e II respectivamente.

O critério J é impreciso em situações onde predomina modo II de carregamento.

#### Resumo dos critérios

Os critérios MTS e S são os mais utilizados, porém nenhum critério é satisfatório. Por exemplo, todos os critérios (exceto o J) preveem que a trinca sob modo II irá crescer aproximadamente a 70° da direção original da trinca, porém experimentalmente observa-se que a trinca se propaga ou em modo I ou em modo II dependendo de condições como magnitudes de carga ou propriedades do material.

## 14.2 Taxa de crescimento da trinca

Tanaka (citado em Qian e Fatemi) propõe a seguinte relação:

14.2 Taxa de crescimento da trinca

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = C \left(\Delta K_{mix}\right)^m \tag{14.6}$$

onde:

$$\Delta K_{mix} = \left[\Delta K_I^4 + 8\Delta K_{II}^4\right]^{0,25} \tag{14.7}$$

## 15 FADIGA OPERACIONAL

Em seu artigo de revisão, Jaap Schijve (Int. J. Fatigue, **25**, 2003, pp. 679-702) apresenta o diagrama de blocos abaixo:



O diagrama serve para representar que o caminho que leva à previsão de vida em fadiga em um componente industrial é consideravelmente complexo e sujeito à influência de diversos fatores, que muitas vezes são desconhecidos  $\rightarrow$  ensaios em estruturas (carros, aviões etc...).

A este ramo do estudo da fadiga dá-se o nome de **fadiga operacional** (em alemão, *Betrieb-festigkeit*).

A princípio pode parecer estranha esta necessidade de se diferenciar a fadiga a amplitude constante da fadiga operacional. Quando escrevemos  $\dot{a} \propto \frac{da}{dN} = A (\Delta K)^n$  (com *A* e *n* sendo funções de *R*) não estamos na verdade assumindo que a única contribuição para o crescimento da trinca vêm de parâmetros instantâneos do corregamento? Por quê então precisamos ensaiar toda a estrutura? A razão vêm da existência de uma hipótese implícita na formulação de equações do tipo expresso acima: **a hipótese de similaridade**.

#### Hipótese de similaridade

A hipótese de similaridade estabelece que:

"Condições similares, aplicadas a sistemas similares, devem produzir a mesma conseqüência".

que no contexto da fadiga pode ser traduzido como:

"Ciclos com  $\Delta K$  semelhantes aplicados a diferentes trincas, devem produzir a mesma taxa de crescimento de trinca".

#### J. Schijve (opus cit.)

#### Crítica à hipótese de similaridade

R. Sunder recentemente publicou um artigo (*Int. J. Fatigue* **25** (2003) pp. 971-981) em que cita o resultado do seguinte experimento:

Três amostras de liga de alumínio 7075-T6 ensaiadas em amplitude constante com  $\sigma_a = 98$ MPa e R = 0,1 em (de cima para baixo) vácuo, ar e água salgada. O resultado claramente mostra que a geometria da frente de trinca (compare os *shear lips* na posição da linha pontilhada) **depende** do ambiente e, ainda por cima, de uma forma contrária ao senso comum (Fig. 15.1). O resultado é incompatível com a hipótese da similaridade.

### 15.1 Ensaios em estruturas

Ensaios em estruturas são mais confiáveis que ensaios de fadiga padronizados tendo em vista que eles avaliam o dano verificado na própria estrutura montada. Entretanto eles são custosos e demorados, sendo portanto limitados apenas a situações onde a falha em serviço

#### 15.1 Ensaios em estruturas



Figura 15.1: Efeito do ambiente do ensaio sobre a morfologia da superfície de fratura por fadiga. Fonte: R. Sunder *Int. J. Fatigue* **25** (2003) pp. 971–981.

seja inaceitável (por exemplo, componentes estruturais e na fuselagem de aviões) ou onde a produtividade é tão elevada a ponto de permitir amortizar o custo do ensaio (por exemplo, em veículos automotores).

#### **15.1.1 Desenvolvimentos atuais**

O elevado custo dos ensaios em estruturas torna viável desenvolver metodologias para previsão do comportamento mecânico de estruturas a partir de ensaios em corpos de prova padronizados. Neste contexto surgem os **ensaios com carregamento em espectro** e os **modelos matemáticos de previsão de vida em fadiga**.

#### Ensaios com carregamento em espectro

O reconhecimento da importância da fadiga em amplitude variável data da década de 1930, como conseqüência de eventos desastrosos na indústria aeronáutica. Gassner foi o pioneiro neste aspecto, sendo o autor da idéia de se registrar a história de carregamento da estrutura e de utilizar esta história em ensaios de fadiga. Limitações técnicas, entretanto, fizeram-no aproximar os espectros reais por meio de ensaios com carregamento em bloco.

Com o desenvolvimento das máquinas de ensaios mecânicos servo-controladas tornou-se possível a realização de ensaios mecânicos usando o espectro medido em estruturas. Hoje em dia podem-se adquirir espectros padronizados (por exemplo, FASTRAN) ou medir espectros em


Figura 15.2: Exemplo de espectro utilizado na demonstração do critério de contagem por cruzamento de nível.

componentes (tipicamente na indústria automobilística) usando-se os mesmos em ensaios de bancada.

# 15.2 Contagem de ciclos

Um dos problemas associados à fadiga em amplitude variável é como contar o número de ciclos em um determinado carregamento.

Quantos cíclos correspondem a um dado valor de  $\Delta \sigma$  (ou  $\Delta K$ )?

Quatro métodos:

- 1. Contagem por cruzamento de nível (level crossing counting)
- 2. Contagem de picos (peak counting)
- 3. Contagem de faixas (simple-range counting)
- 4. "Rainflow" e métodos associados

Norma ASTM 1049-85 (reaprovada em 1997) "Standard practice for Cycle Counting in Fatigue Analysis"

Para analisar os critérios de contagem iremos empregar o espectro apresentado na Fig. 15.2.

#### Cruzamento de nível

Estabelecer um nível de referência e contar os cruzamentos com inclinação positiva (Fig. 15.3):



Figura 15.3: Primeiro passo no método da contagem por cruzamento de nível.

Determinar níveis de carga acima da referência e contar os pontos de cruzamento com inclinação positiva (Fig. 15.4).



Figura 15.4: Segundo passo no método de contagem pro cruzamento de nível.

Determinar níveis de carga abaixo da referência e contar os pontos de cruzamento com inclinação negativa.

Montar a tabela de cruzamentos (Tabela 15.1):

A partir da tabela de cruzamentos montam-se as possíveis faixas de tensão, começando-se da maior, "gastando-se" sucessivamente os cruzamentos. Por exemplo, na tabela anterior há



Figura 15.5: Terceiro passo no meodo de contagem por cruzamento de nível.

Tabela 15.1: Tabela de cruzamentos para o espectro mostrado na Figura 15.2.

Nível	Cruzamentos
+4	2
+3	3
+2	3
+1	3
0	2
-1	3
-2	1
-3	1

uma única possibilidade de se construir uma faixa de tensão +7 (um dos cruzamentos +4 com o cruzamento -3), o segundo cruzamento em +4 somente poderá participar de uma faixa +6 (com -2) e assim por diante. A tabela de faixas de tensão do exemplo anterior encontra-se na Tab. 15.2.

Tabela 15.2: Tabela das amplitudes de tensão do ciclo apresentado na Figura 15.2 de acordo com o método de cruzamento de nível.

Faixa	Freqüência
+7	1
+6	1
+5	0
+4	3
+3	0
+2	2
+1	4

## Método "Rainflow"

R. Sunder "Spectrum load fatigue — underlying mechanisms and their significance in testing and analysis" *Int. J. Fatigue* vol. **25** (2003) 971-981.

O método "Rainflow" foi proposto por Endo, Mitsunaga e Nakagawa em 1967 e se baseia nas seguintes premissas básicas:

- a. O dano de fadiga está associado à plasticidade reversa (Fig. 15.6).
- b. Durante o ciclo de fadiga o material na região da ponta da trinca de fadiga irá se deformar segundo a curva tensão deformação ciclica (*cyclic stress strain curve*, cssc), isto é, assumese que o material já se estabilizou e não sofre mais endurecimento ou amolescimento cíclico.
- c . O dano é quantificado pelo trabalho dissipado no ciclo histerético correspondente à história de carregamento (Fig. 15.7).

O ciclo ef não seria contado pelo método "Rainflow" no exemplo apresentado na Fig. 15.7 e a faixa de amplitude de tensão correspondente seria dada por eg.

#### Métodos de contagem: resumo

Fatos sobre os métodos de contagem:



Figura 15.6: Representação da formação da zona plástica reversa durante o carregamento cíclico e de sua relação com a propagação da trinca de fadiga.



Figura 15.7: Representação do comportamento histerético da deformação plástica durante o carregamento em espectro.Obs.: A curva tensão-deformação se refere ao estado de tensão na ponta da trinca.

- Diferentes métodos aplicados a um mesmo espectro resultam, geralmente, em diferentes distribuições de faixas de tensão.
- Normalmente o método "rainflow" resulta em distribuições de faixas de tensão mais severas.
- Em sua formulação original os métodos não permitem armazenar a informação sobre a ordem em que as faixas de tensão são aplicadas (interação de cargas), mas existem modificações recentes que o permitem (vide R.J. Anthes, *Int. J. Fatigue* vol. 19 (1997) 529-535).

Implementação:

- Apesar de sua aparente complexidade todos os métodos são descritos por algoritmos simples, que podem ser facilmente implementados, por exemplo, por subrotinas de FORTRAN77 com poucas linhas (descritas na norma).
- O método "Rainflow" pode ser encontrado como uma função de biblioteca do MatLab.

# 15.3 Modelos matemáticos

Existem basicamente duas abordagens tradicionais:

- 1. Modelos analíticos  $\rightarrow$  integração de  $\frac{da}{dN} = f(\Delta K)$ ) e
- 2. Modelos numéricos de elementos finitos (FE, *finite element*)  $\rightarrow$  definição da grade.

A tendência atual da pesquisa está no desenvolvimento de modelos baseados em mecanismos  $\rightarrow$  problema de multi-escala.

# 15.3.1 Projeto em fadiga

- "Fail-safe"  $\rightarrow$  curvas S-N ou  $\varepsilon$ -N,
- "Damage tolerance" -> defeitos pre-existentes e inspecionáveis,
- "Durability design" → aproximação probabilística, definição de uma distribuição de defeitos equivalentes,

## 15.3 Modelos matemáticos

- "Small crack theory" → duas etapas, uma dependente da microestrutura do material (trincas curtas) e a segunda dependendo da propagação da trinca principal.
- "Safe-life"  $\rightarrow$  nenhuma hipótese sobre o defeito inicial, o objetivo da história.

# 16 MICROESTRUTURAS DE DEFORMAÇÃO EM FADIGA

Baseado em

- KWL-I D. Kuhlman-Wilsdorf, C. Laird, Dislocation behavior in Fatigue, *Mater. Sci. Engng.*27 (1977) 137 156.
- KWL-II D. Kuhlman-Wilsdorf, C. Laird, Dislocation behavior in Fatigue II. Friction stress and back stress as inferred from an analysis of Hysteresis loops, *Mater. Sci. Engng.* 37 (1979) 111 – 120.
- KW-III D. Kuhlman-Wilsdorf, Dislocation behavior in Fatigue III. Properties of the loop patches – Do they participate in fitigue cycling?, *Mater. Sci. Engng.* 39 (1979) 127 – 139.
- KW-IV D. Kuhlman-Wilsdorf, Dislocation behavior in Fatigue IV. Quantitative interpretation of friction stress and back stress derived from hysteresis loops, *Mater. Sci. Engng.* 39 (1979) 231 245.
- KWL-V D. Kuhlman-Wilsdorf, C. Laird, Dislocation behavior in Fatigue V. Breakdown of loop patches and formation of persistent slip bands, *Mater. Sci. Engng.* 46 (1980) 209 – 219.
- Laird C. Laird, P. Charsley, H. Mughrabi, Low energy dislocation structures produced by cyclic deformation, *Mater. Sci. Engng.* 81 (1986) 433–450.
- **Huang-I** H. L. Huang, A study of dislocation evolution in poly crystalline copper during low cycle fatigue at low strain amplitudes, *Mater. Sci. Engng. A* **342** (2003) 38 43.
- Huang-II H. L. Huang, N. J. Ho, The observation of dislocation reversal in front of crack tips of polycrystalline copper after reducing the maximum load, *Mater. Sci. Engng.* A345 (2003) 215 – 222.

- Huang-III H. L. Huang, J. L. Ho, T. L. Hu, Estimating the amplitude of plastic strain from the distribution of the dislocation morphologies in front of the crack tips *Mater. Sci. Engng.* A386 (2004) 112 117.
- Huang-IV H. L. Huang, D. L. Ho, The observation and analysis of the dislocation morphology of fatigue crack tips at steady state propagation rates subject to a single peak load *Mater*. *Sci. Engng.* A298 (2001) 251 – 261.

# 16.1 Fadiga de Baixo Ciclo

# 16.1.1 Ciclos de histerese

Nome dado ao campo de pesquisa de fadiga onde as tensões máximas são comparáveis ao limite de escoamento, portanto onde a deformação plástica macroscópica ocorre no ciclo. Sinônimo para fadiga em controle de deformação.

O papel relevante da deformação plástica na Fadiga de Baixo Ciclo (FBC) fica evidente quando observamos que a tensão no ensaio não permanece contante, pois encruamento (ou amolescimento, como será visto posteriormente), é observado durante o ciclo. Naturalmente também parte da deformação observada no ciclo é permanente. Tudo isto se reflete na existência de ciclos de histerese, que evoluem com o progresso da deformação cíclica. A Figura 16.1 mostra um exemplo de curva de histerese medida por H. Mughrabi para em cobre monocristalino.

Como já foi mencionado, o ciclo de histerese não é imediatamente estável. Há fenômenos transientes que são denominados:

- Endurescimento cíclico, quando a tensão máxima cresce ciclo após ciclo e
- Amolescimento cíclico, quando a tensão máxima decresce ciclo após ciclo.

Em ambos os casos o ciclo de histerese tende a um ciclo-limite. Como reza a equação de Taylor, nestas condições a densidade de discordâncias deve permanecer inalterada com a continuação da deformação. O desafio na teoria da Fadiga é compreender como estas micro-estruturas particulares se desenvolvem e como isto está relacionado ao crescimento da trinca. Para o cobre monocristalino observa-se que a tensão máxima estabiliza em torno de 30 MPa.

A partir da forma do ciclo-limite definem-se alguns parâmetros (Figura 16.2), a saber:

•  $\tau_S = \text{limite de escoamento}$ ,



Figura 16.1: Exemplo de curva de histerese em fadiga de baixo ciclo. Material: Cobre monocristalino, amplitude de deformação:  $\Delta \gamma_p = 0.003$ , R = -1, Fonte: H. Mughrabi, *Mater. Sci. Engng.* **33** (1978) p. 207ff.

- $\tau_E$  = tensão máxima,
- $\tau_B = \text{contratensão} (backstress),$
- $\tau_F$  = tensão de fricção,
- $\Gamma = 2\Delta \gamma_p$  = amplitude de deformação plástica.



Figura 16.2: Ciclo-limite esquemático mostrando as definições da contratensão (*backstress*) e da tensão de fricção.

Segundo uma proposta de Cottrell, feita em 1956, a contratensão e a tensão de fricção podem ser calculadas em função da tensão de escoamento e da tensão máxima como:

$$\tau_F = \frac{(\tau_E + \tau_S)}{2} \tag{16.1a}$$

e

$$\tau_B = \frac{(\tau_E - \tau_S)}{2} \tag{16.1b}$$

D. Kuhlman-Wilsdorf e C. Laird (KWL-II) analisaram a forma das curvas de histerese medidas por diversos autores para o cobre monocristalino com diversas amplitudes de deformação e concluíram que:

- 1.  $\tau_B \in \tau_F$  tem natureza física real
- 2.  $\tau_F$  é composta de duas parcelas claramente distingüíveis
- 3. a maior parcela de  $\tau_F$  é idêntica a  $\tau_B$ , porém uma parcela menor tem uma dependência completamente diferente com a deformação plástica acumulada e satura num valor muito menor que  $\tau_B$ , o que implica que ela tem orígem física distinta.

Estes resultados foram interpretados pelos autores como uma evidência de que a contratensão e a parcela menor da tensão de fricção podem ser justificadas a partir do desenvolvimento da microestrutura de deformação.

Como será visto em mais detalhe adiante, a microestrutura desenvolvida em FBC segue uma hierarquia em função da amplitude de deformação imposta ao corpo de prova. Brevemente podemos dizer que esta hierarquia é composta por (em ordem de amplitude de deformação crescente):

- Uma estrutura composta por resíduos da mútua, porém imperfeita, aniquilação de discordâncias de sinais opostos, composta de um grande aglomerado de aneis dipolares de discordâncias em cunha (*loop patches*)
- Veios (*veins*) alongados compostos por dipolos de discordâncias em cunha separados por canais com densidade reduzida de discordâncias.
- Bandas persistentes de deformação (PSBs).
- Células de discordâncias.

### Análise quantitativa de $\tau_B$ e $\tau_F$

Doris Kuhlman-Wilsdorf (em KW-III e KW-IV) desenvolve um modelo microscópico da resposta mecânica baseado na estrutura de deformação induzida no cobre monocristalino durante FBC. Neste modelo os *loop patches* apresentam baixa resistência ao escorregamento e reagem rápidamente às tensões geradas pela imposição da amplitude de deformação  $\rightarrow$  Os *loop patches* formam uma estrutura similar a um reticulado de Taylor. Durante a ciclagem de fadiga os *loop patches* oscilam alternadamente entre duas "polaridades", que a autora denominou "esquerda" e "direita". A Figura 16.3 representa estas duas configurações, bem como as duas variáveis geométricas que ela usou em seus cálculos.



Figura 16.3: Modelo de Kuhlman-Wilsdorf para o comportamento micromecânico dos *loop patches* em duas polaridades, "esquerda" e "direita", correspondentes a configurações alternates observadas quando o material percorre o ciclo de histerese.

Por meio de seu modelo, Kuhlman-Wilsdorf demonstrou que a força com que o reticulado de Taylor resiste à reversão de polaridade em função da relação  $\frac{s_d}{\ell}$  satura rapidamente em um valor aproximadamente 2,8 vezes maior que a carga observada no momento da reversão, sendo que este valor é observado para valores de  $\frac{s_d}{\ell}$  maiores que 1,5. Ela observou também que o deslocamento crítico (ou seja, qual o deslocamento relativo entre a camada superior e a inferior observado no momento da reversão cresce lentamente de 0,25 a 0,46 quando  $\frac{s}{\ell}$  cresce de 0 a 7. Usando estes resultados e a forma da curva de descarregamento no ciclo de histerese do Cobre a autora concluíu ainda que a relação  $\frac{s_d}{\ell}$  correspondente aos *loop patches*<sup>1</sup> neste material é próxima de 0,55.

O resultado mais expressivo da análise mecânica dos *loop patches* feita por Kuhlman-Wilsdorf (em KW-IV), entretanto, é a previsão de uma regra de similaridade da forma dos ciclos de histerese em função do número de ciclos aplicados ( $N^* e N^{**}$ ) na forma:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>A autora assumiu que o material apresenta uma fração volumétrica de 50% de *loop patches* e 50% de canais isentos de discordâncias e calculou o módulo de rigidez efetivo, comparando com o resultado experimental.

$$\tau^{**} = \tau^* \sqrt{\frac{N^{**}}{N^*}}$$
(16.2a)

para

$$\gamma^{**} = \gamma^* \sqrt{\frac{N^{**}}{N^*}} \tag{16.2b}$$



Figura 16.4: Verificação experimental da relação de escala prevista no modelo micromecânico dos *loop patches* feito por Kuhlman-Wilsdorf. Os ciclos de histerese à esqueda correspondem aos ciclos medidos experimentalmente por Mughrabi, os ciclos da direita forma calculados usando as relações 16.2 tomando como base o ciclo que atinge a tensão máxima com deformação plástica acumulada de 2.0.

Em suma, os resultados de KW-III e KW-IV foram interpretados pela autora como uma evidência de que a contratensão corresponde a uma tensão de orígem elástica correpondente à resistência que os *loop patches* oferecem à reversão da direção de carregamento após o ciclo de histerese atingir a tensão máxima, sendo máxima no início da reversão e mudando de sinal no momento em que a tensão de escoamento é atingida durante o descarregamento. Como a reversão de polaridade envolve de certa forma uma deformação permanente, ela é observada também na tensão de fricção, entretanto uma parcela menor correspondente a outros processos dissipativos (por exemplo, arraste de "jogs" nas discordâncias em hélice que percorrem os canais ou endurecimento por defeitos puntiformes gerados pela deformação plástica) também contribui para a tensão de fricção.

# 16.2 Formação das PSBs

A Figura 16.5 mostra esquematicamente a variação de  $\tau_S$  com a deformação plástica acumulada (conhecida como curva tensão -deformação cíclica) medida por C. Laird para cobre monocristalino orientado para monodeslizamento.





Esta curva mostra o estágio de endurecimento cíclico (região A) e o estágio de estabilidade (região B), já descritos anteriormente, mas inclui um novo estágio (região C) que corresponde a um novo estágio de endurecimento cíclico que ocorre após o esgotamento do processo responsável pela existência do patamar.

Experimentalmente verifica-se que cada uma destas regiões está associada ao desenvolvimento de estruturas particulares de discordâncias. O patamar, em particular, está associado ao desenvolvimento das PSBs, tendo um papel fundamental, portanto, na nucleação da trinca de fadiga.

#### Região A

A região A da curva apresentada na Figura 16.5 está associada ao desenvolvimento progressivo das estruturas conhecidas como *loop patches* e veios.

A Figura 16.6 mostra a microestrutura desenvolvida no inicio da região A, correspondendo portanto ao estágio inicial da formação dos *loop patches* e do encruamento cíclico.



Figura 16.6: Estágio inicial da formação de *loop patches* (região A da curva tensão-deformação cíclica).

A microestrutura mostrada na Figura 16.6 consiste de aglomerados de discordâncias retas orientadas em cunha e localizadas ni plano de deslizamento primário (veja a indicação da direção correspondente ao vetor de Burgers no canto superior esquerdo da figura). A ausência de variações de contraste entre as diversas regiões da micrografia é consistente com a ausência de campos de tensão de longo alcance, portanto estas discordâncias devem estar formando dipolos ou multipolos com uma resultante nula do vetor de Burgers. Estas aglomerações de discordâncias, com a continuação da deformação cíclica, irão reter novas discordâncias crescendo em fração volumétrica.

O aspecto que a microestrutura adquire numa fase mais desenvolv]ida do endurecimento cíclico é mostrada na Figura 16.7. A imagem correspondente ao plano  $(1\bar{2}1)$  é a imagem clássica dos *loop patches* e mostra que as regiões ricas em discordâncias são separadas por canais aparentemente isentos de discordâncias. Experiências cuidadosas envolvendo o bloqueio de discordâncias por defeitos puntiformes formados pela exposição do material a neutrons mostra que os canais não são completamente isentos de discordâncias, mas sim que são percorridos por discordâncias orientadas majoritariamente em hélice que se extendem de um *loop patch* a outro. Estas discordâncias tem uma papel relevante na deformação cíclica, acomodando a deformação na região dos canais. O bloqueio das discordâncias por exposição a nêutrons é necessária pois durante o afinamento da lâmina fina para observação em Microscópio Eletrônico de Transmissão elas migram para a superfície e são eliminadas, resultando na aparente ausência de discordâncias no interior dos canais. Note que o plano  $(1\bar{2}1)$  é perpendicular tanto ao plano de escorregamento primário, (111), quanto à direção do vetor de Burgers,  $[10\bar{1}]$  (mostrada na forma de uma seta no canto superior esquerdo).

Imediatamente antes do Plateau, os LP ocupam cerca de 50% da microestrutura e os canais tornam-se mais sinuosos, permanecendo, porém, interconectados. Os LP se distribuem uniformemente e que há canais livres entre eles com ângulos de cerca de  $20^{\circ}$  a  $35^{\circ}$  com respeito ao plano de escorregamento primário. Esta microestrutura é capaz de acomodar deformações cíclicas máximas da ordem de  $8 \times 10^{-5}$ . A continuação da deformação cíclica, portanto, requer a transição para uma microestrutura de deformação capaz de acomodar deformação maiores. Isto é conseguido por localização da deformação na forma das PSBs.

#### Região B

Na primeira parte do Plateau (até aproximadamente  $2 \times 10^{-3}$ ) formam-se as PSBs (Figura 16.8), com o aspecto caracteristico de "escada" (em inglês, *ladder*). Os degraus da "escada" são compostos por paredes dipolares de discordâncias em cunha e os canais são percorridos por



Figura 16.7: *Loop patches* desenvolvidos, aspecto tridimensional. Os canais, aparentemente isentos de discordâncias, na verdade são ocupados por uma baixa densidade de discordâncias em hélice.

discordâncias em hélice para cima e para baixo durante o ciclo, gerando portanto deformações perpendiculares aos degraus. Experimentalmente observa-se que a fração volumétrica de PSBs aumenta constantemente ao longo do plateau e que em média cada canal é percorrido por uma discordância. A deformação total devida a um PSB, portanto, é da ordem de  $10^{-2}$ , correspondendo ao limite superior do patamar. Isto originou o modelo das duas "fases", onde os *loop patches* corresponderiam a uma fase "dura" e as PSBs a uma fase "mole" que prograssivamente ocuparia o lugar da matriz. Entretanto a microestrutura ao longo do patamar sofre outra transição para deformações superiores a aproximadamente  $2 \times 10^{-3}$ .



Figura 16.8: Estrutura em escada característica de uma PSB.

A Figura 16.9 ilustra o modelo porposto por Kuhlman-Wilsdorf para explicar o colapso dos *loop patches* e a formação dos canais que produzirão as PSBs. Neste modelo, um sistema de escorregamento secundário é ativado, levando ao colapso do reticulado de Taylor pela aniqulação de discordâncias de sinal oposto que agora escorregam no mesmo plano.

A principal virtude deste modelo é explicar como a transição entre *loop patch* e PSB pode ser gradual e não explosiva, como a autora havia suposto em [KWL-I]. *Loop patches* seriam, portanto, estruturas características do mono-deslizamento, enquanto que as PSBs se formariam pela ativação de sistemas secundários de escorregamento.

A Figura 16.10 ilustra o modelo proposto por Kuhlman-Wilsdorf para explicar a forma como as discordâncias em hélice que percorrem os canais atuam para produzir a deformação cíclica. Segundo este modelo a discordância percorre os canais entre as paredes dipolares de-



Figura 16.9: Modelo proposto por Kuhlman-Wilsdorf para explicar o colapso dos *loop patches*. Um sistema de escorregamento secundário, indicado por uma linha tracejada, é ativado causando o colapso do reticulado de Taylor pela aniquilação de discordâncias se sinal oposto que agora escorregam no mesmo plano.

positando discordâncias em cunha sobre as paredes. A direção de propagação da discordânacia em hélice é necessariamente a mesma em canais visinhos devido à necessidade de se manter um balanço entre os sinais do vetor de Burgers das discordâncias depositadas e minimizar a energia elástica da estrutura. Desta forma a deformação produzida por uma PSB é cooperativa e localizada e a deformação total é, portato, compatível com a deformação no limite máximo do patamar de endurescimento cíclico, o que aparentemente justifica o modelo de duas fases.

Experimentalmente, entretanto, observa-se a  $2 \times 10^{-3}$  (portanto em uma posição intermediária no patamar) uma transição na microestrutura de deformação para a estrutura de "labirinto" (em inglês, "*labirinth*" ou "*maze*"). A Figura 16.11 mostra dois exemplos desta estrutura.

Na estrutura de labirinto as paredes dipolares são formadas por discordâncias pertencentes a dois sistemas de escorregamento diferentes (entretanto em cada parede apenas um sistema contribui), o que obviamente só é possivel se o segundo sistema participar ativamente da deformação cíclica.

Em resumo, durante o patamar a contribuição de um sistema de escorregamento secundário vai se tornando progressivamente mais relevante, primeiramente na conversão dos *loop patches* em PSBs e posteriormente na conversão das estruturas de PSBs em estruturas de labirinto. Em todos os casos, entretanto, a microestrutura continua sendo paracterizadas por paredes dipolares de discordâncias onde apenas um sistema de escorregamento atua na formação de cada parede. Este processo se esgota ao final do patamar e deformações maiores requerem uma nova



Figura 16.10: Modelo proposto por Kuhlman-Wilsdorf para explicar como as discordâncias em hélice que percorrem os canais agem cooperativamente produzindo o deslocamento da PSB durante o ciclo.



Figura 16.11: Estruturas de "labirinto" formadas em (a) liga cobre-niquel policristalina e em (b) cobre monocristalino ciclado até  $5 \times 10^{-3}$  e observado na seção  $(1\overline{2}1)$ . Note que a presença de dois tipos de paredes dipolares no *maze* requer a contribuição de um sistema de escorregamento secundário.

transição da microestrutura de deformação, que será vista a seguir.

## Região C

Além do patamar o processo responsável pela formação das estruturas de labitinto esgotase. Deformações maiores somente são possiveis pela substituição das paredes dipolares, onde apenas um sistema de escorregamento atua, para estruturas celulares onde a parede de célula é composta por discordâncias pertencentes a mais de um sistema de escorregamento. A Figura 16.12 mostra a microestrutura celular desenvolvida no cobre monocristalino após o patamar.



Figura 16.12: Estrutura celular de discordâncias desenvolvida em cobre monocristalino após o plateau com o aumento da contribuição de sistemas de escorregamento secundários. Note que na seção (111) ela ainda se assemalha a uma PSB.

Ainda assim a ausência de contraste entre células visinhas indica que esta estrutura é livre de tensões elásticas de longo alcance. As paredes de célula, portanto, ainda mantém um balanço de vetores de Burgers de forma a minimizar a energia armazenada.

Sendo assim a microestrutura observada pós-plateau é característica do polideslizamento pleno, o que é consistente com a progressão observada durante o plateau.

# 16.3 Conexão das estruturas em FBC e a propagação da trinca

O discutido até agora limita-se à descrição da hierarquia de estruturas formadas em cobre monocristalino e ligas CFC em geral durante a fadiga de baixo ciclo. Recentemente, entretanto, H. L. Huang, um pesquisador da Academia Militar da República da China (em Taiwan) tem publicado uma série de trabalhos onde descreve a microestrutura de deformação observada à frente de trincas de fadiga em propagação. Estes resultados parecem lançar uma nova luz sobre a conexão entre estas microestruturas e a propagação efetiva da trinca, o que será discutido nesta seção.

Este autor observou uma correlação entre a hierarquia de microestruturas desenvolvidas à frente da trinca se propagando em cobre em função da distância com aquelas observadas no cobre monocristalino sob FBC. Ele observou que durante a propagação em estado estacionário com taxas variando entre  $10^{-8}$  a  $10^{-6}$  mm ciclo<sup>-1</sup>) a estrutura segue uma hierarquia de estruturas com a distância da seguinte forma (isto é, afastando-se da ponta da trinca):

- Células com um diâmetro médio de 0.7  $\mu$ m, logo à frente da ponta da trinca,
- Paredes dipolares (condensed walls)
- PSBs multidirecionais
- PSBs unidirecionais
- Veios e loop patches

As diferenças observadas em função da taxa de propagação eram refletidas nates na escala da microestrutura desenvolvida, no sentido da distância percorrida até a transição entre estas microestruturas e não na escala dos componentes microestruturas em cada região (por exemplo, o tamamnho da zona formada por células varia, mas o tamanho de célula permanece constante).

O autor observou também que, aparentemente, as perturbações na taxa de propagação da trinca em função de alterações no regime de cargas (por exemplo, em sobre-cargas e sub-cargas, ou na simples redução de amplitude de deformação durante o ensaio) se refletiam na destruição desta hierarquia microestrutural.

No caso de sobre-cargas, por exemplo, Huang observou que durante o ciclo de alta amplitude a trinca inicialmente propaga-se muito rápido, fazendo com que sua ponta atinja a região de *loop patches* e veios formada na propagação anterior (Figura 16.13). Com isto a taxa de propagação diminuiria até que a estrutura de células pudesse ser reformada, quando então retomaria a propagação na taxa do estado estacionário (vide Figura 16.14).

No caso de sub-cargas o modelo é ainda mais facilmente compreendido. Sob a ação do ciclo de sub-carga a propagação da trinca inicialmente cessa, permitindo que a região de celulas



Figura 16.13: Microestrutura desenvolvida na ponta de uma trinca propagando a  $10^{-6}$  mm ciclo<sup>-1</sup> submetida a um pico de sobre-carga (*overload*) onde a microestrutura alterou para veios e *loop patches* e aproximou-se da observada para propagação a  $10^{-7}$  mm ciclo<sup>-1</sup>.



Figura 16.14: Representação esquemática da evolução da microestrutura de deformação à frente da ponta da trinca (a) com propagação em estado estacionário e (b) após um pico de sobre-carga (*overload*).

cresça no próximo ciclo para um tamamnho maior (Figura 16.15), característico de uma taxa de propagação também maior. Assim a trinca passa a se propagar aceleradamente de acordo com a nova taxa e não na do estado estacionário (vide Figura 16.16).



Figura 16.15: Microestrutura desenvolvida na ponta de uma trinca propagando a  $3 \times 10^{-7}$  mm ciclo<sup>-1</sup> submetida a um pico de sub-carga (*overload*) onde a microestrutura continua apresentando células, porém ocupando um volume maior, logo ocorre aceleração.

Desta forma Huang justifica o atraso e a aceleração da trinca respectivamente com sobrecargas e sub-cargas em função das alterações microestruturais observadas. Ironicamente, a trinca submetida a uma sobre-carga se atrasa porque inicialmente se propaga numa taxa muito grande. Da mesma forma, a trinca submetida a uma sub-carga se acelera porque inicialmente se propaga muito pouco.

A proposta de Huang é inovadora pois desloca a discussão de efeitos de sobre-carga e de sub-carga de aspectos mecânicos do problema (fechamento prematuro e tensões residuais à frente da ponta da trica) para uma discussão mecanicista, onde a microestrutura desenvolvida é a chave. Um passo que ainda falta ser dado é associar a microestrutura desenvolvida à frente da ponta da trinca a um modelo de propagação da mesma. Deve-se notar que justamente à frente da trinca a microestrutura estável durante a propagação estacionária é formada por células com alto grau de desorientação entre elas e que a taxa de propagação parece estar assciada ao volume desta região e não ao tamanho das células (portanto ela depende do número de células contidas



Figura 16.16: Representação esquemática da evolução da microestrutura de deformação à frente da ponta da trinca (a) com propagação em estado estacionário e (b) após um pico de sub-carga (*underload*).

nessa região). Parece lógico pressupor que um modelo microestrutural de propagação deverá se basear na rotação das paredes de células durante o ciclo, mas isto, por enquanto é apenas especulação.

Por fim, duas conclusões podem ser tiradas dos resultados de Huang:

- Há uma correspondência entre as microestruturas de deformação macroscópicas me FBC e as microestruturas observadas à frente de uma trinca em propagação estacionária, o que parece justificar a fundamentação teórica do Método *rainflow* de contagem de ciclos, que se baseia na energia dissipada no ciclo de histerese local na região da ponta da trinca (vide seção 15.2).
- Há evidências de que o desenvolvimento de uma microestrutura celular de discordâncias é essencial para manter a propagação da trinca o que claramente sugere um papel crucial do polideslizamento neste processo.

Esta última observação também permite compreender por que a propagação de trincas longas parece ser insensível à microestrutura: seja qual for a orientação do grão onde a trinca está se propagando, a ativação de diversos sistemas de escorregamento reduzirá a eventual anisotropia.

# 17 DEGRADAÇÃO DOS MATERIAIS

No contexto desta disciplina **degradação** se refere a todo o mecanismo que provoca a deterioração **irreversível** das propriedades mecânicas de um material sob a ação de **um fator ambiental** (ataque químico, radiação, calor, esforços mecânicos) e do **tempo**.

Todos os mecanismos de degradação aqui discutidos tem um ponto em comum: eles dependem da interação do material com o meio. Desta forma a resposta do material a este "esforço" não dependerá exclusivamente do material, mas sim de todo o sistema (material + meio). Não podemos, portanto, nos referir de maneira absoluta à resistência que um material apresenta a um determinado mecanismo de degradação.

É sempre mandatório especificar em que sistema a dita propriedade foi determinada.

Chamaremos a isto de **comportamento mecânico do sistema** para diferenciá-lo do comportamento mecânico do material.

A Fadiga, como visto anteriormente, provoca uma redução da vida útil de um dado material e depende fortemente do sistema (fadiga operacional). Sendo assim a fadiga satizfaz os critérios estabelecidos anteriormente na definição de degradação. Fadiga pode ser considerada, efetivamente, como um processo de degradação mecânica dos materiais.

# 17.1 Degradação térmica

O calor é um poderoso agente degradante. Alguns casos já vistos anteriormente satisfazem parcialmente os critérios de definição de degradação. Fluência ou deformação plástica a quente, por exemplo, são irreversível e levam à fratura), não nos deteremos novamente nestes processos já que *faz sentido* falar em resistência à fluência e limite de escoamento a quente de um material. Iremos aqui nos deter em outros processos.

# Ação irreversível do calor

O calor age sobre os materiais provocando:

- 1. mudanças de composição (por oxidação, evaporação etc...),
- 2. mudanças estruturais (ruptura de cadeias poliméricas e/ou de ligações cruzadas),
- 3. mudanças microestruturais (crescimento de grão, coalescimento de precipitados),
- 4. transformações de fases (precipitação de solutos em soluções sólidas supersaturadas, substituição de fases metaestáveis por outras mais estáveis etc...)

# **Exemplo 1**

Peste do MoSi<sub>2</sub>:

- Cermets (= compósitos cerâmicos) de SiC e  $MoSi_2 \rightarrow$  elementos de resistência em fornos de alta temperatura (1700 1800 °C) Kanthal Super (R),
- são vendidos no estado compactado a verde (frágilidade a frio) e são sinterizados *in loco* (ou seja, na primeira operação do forno),
- essencial evitar permanência em temperaturas entre 500 e 800 °C no primeiro aquecimento → desintegração total (*peste* do MoSi<sub>2</sub>). Aquecer rapidamente a T > 1200 °C.
- baixas temperaturas → MoO<sub>3</sub> (alta pressão de vapor), altas temperaturas → película vítrea protege contra oxidação.

# **Exemplo 2**

Fragilidade do revenido em aços:

- ocorre em aços ferríticos e martensíticos,
- mais intenso no revenido por volta de 350 °C (não confundir com "blue brittleness" → envelhecimento dinâmico – "strain aging" – devido ao carbono),
- ocorre em dois tipos
  - em duas etapas: segregação de P e Sn para o CG austenítico original  $\rightarrow$  aumenta a NDT do material em até 300 °C.

em uma etapa: substituição do carboneto  $\varepsilon$  por cementita em forma de plaquetas  $\rightarrow$  redução da tenacidade e ductilidade.

# **Exemplo 3**

Estabilidade térmica de polímeros:

- $\uparrow$  intensidade das ligações principais (ex. C F > C H, C C)
- ↑ rigidez da cadeia (PON, grupos cíclicos)
- $\uparrow$  eliminação de grupos oxidáveis (*C H*)

Reações de degradação:

- 1. reações de despolimerização (ex. PMMA),
- 2 . reações de eliminação (ex. decomposição do PVC  $\rightarrow$  HCl)
- reações de substituição (as cadeias reagem mudando a estrutura, mas não a estequiometria, ex. cilização da Poliacrilonitrila, PAN).

Referência: N. S. Allen, M. Edge "Fundamentals of polymer degradation and stability" Elsevier, 1992.

# 17.2 Degradação Química

- 1. Fragilização por hidrogênio
  - a . fratura retardada
  - b. fragilização por hidrogênio
  - c. fadiga assistida por hidrogênio
  - d. fragilização ambiental de intermetálicos.
- 2. Corrosão-sob-tensão (CST)
  - a. em metais e ligas
  - b. em polímeros

- c. em cerâmicas (fadiga estática)
- 3. Corrosão-fadiga

Os fenômenos que serão descritos aqui são agrupados na lingua inglesa em alguns casos pelo termo *Environmentally Assisted Cracking* (EAC). Não há tradução consagrada deste termo para a língua portuguêsa, mas poderiamos pensar em algo como **Fratura Induzida pelo Ambiente**.

## Referências

- a "Hydrogen embrittlement and stress corrosion cracking" R. Gibala, R. F. Heheman (eds.), American Society for Metals (ASM), Metals Park-OH, EEUU, 1984 (Caps. 1 e 2, Johnson e Hirth).
- b The theory of stress corrosion cracking in alloys" J. D. Scully (ed.), NATO Scientific Affairs, Bruxelas, 1971 (Caps. 1 e 7, Scully).
- c B. Craig "Environmentaly Induced Cracking" in: Metals Handbook vol. 13:Corrosion, 9<sup>th</sup>
  ed., ASM, Metals Park-OH, EEUU, 1987.
- d A. J. Sedricks "Corrosion of Stainless Steels" Cap. 7: "Stress Corrosion Cracking", John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1996.
- e Capítulo 11 (Environment-assisted Cracking) do Hertzberg.

Em comum, todos os fenômenos associados à degradação dos materiais apresentam um forte caráter multidisciplinar, envolvendo aspectos de metalurgia física, químicos/eletroquímicos e de mecânica da fratura. Esta interdisciplinariedade está representada na Figura 17.1.

# 17.2.1 Degradação por Hidrogênio

Fenomenologia:

- O efeito fragilizante pode ser "ligado" e "desligado" → difusão muito rápida para a região da ponta da trinca.
- Fratura retardada, fragilização por hidrogênio e fadiga assistida por hidrogênio em sí se referem ao mesmo fenêmono, dependendo apenas do tipo de esforço aplicado e da quantidade de hidrogênio disponível.



Figura 17.1: Representação gráfica do caráter multidisciplinar dos fenômenos associados à degradação química dos materiais.

- Há uma tensão mínima para o surgimento do efeito fragilizante.
- Nos aços: relação inversa entre resistência mecânica e sucetibilidade à fragilização por H.

# Fratura retardada (delayed fracture)

- o fenômeno ocorre mesmo quando não há evidência de fragilização,
- as tensões nominais de fratura são muito baixas,
- o período de incubação pode ser revertido, i.e. tornado infinito por uma série de tratamentos termo-mecânicos, e
- a fratura retardada é sensível a entalhes → o ponto de nucleação da trinca varia com a severidade do entalhe ⇒ estado de tensão e triaxialidade.

# Mecanismos de fragilização por hidrogênio

- **Pressão hidrostática** o hidrogênio se acumula nas cavidade internas aumentando a componente de tração na ponta da trinca,
- **Energia de superfície** o hidrogênio adsorve na superfície de fratura, reduzindo a tensão superficial,

Coesão - o hidrogênio se acumula na ponta da trinca, reduzindo a coesão do metal,

- Atividade de discordâncias o hidrogênio se acumula na ponta da trinca reduzindo  $\tau_{CRSS}$ , o que provoca o surgimento de uma instabilidade de deformação,
- **Hidretos** o hidrogênio se concentra na região da ponta da trinca e provoca a precipitação de hidretos frágeis (importante em Ti, Zr, Hf, Nb etc...).

## **Resultados recentes**

Apesar da importância do fenômeno, muito pouco ainda se sabe ao certo sobre as causas da fragilização pro hidrogênio. Um aspecto relevante é que mesmo pequenas quantidades de H são capazes de reduzir drasticamente a ductilidade dos materiais → hidrogênio combinado com defeitos cristalinos.

P. J. Ferreira et al. (*Acta Mater.* **47**, pp. 2991-2998, 1999) observaram *in situ* o efeito do hidrogênio sobre o caráter das discordâncias em Al puro por meio de Microscópio Eletrônico de Transmissão com Ambiente Controlado, concluindo que o H estabiliza a porção em cunha das discordâncias, inibindo deslizamento com desvio (*cross slip*). O resultado, em sí, não justifica o efeito fragilizante do H, mas permite compreender a transição entre deslizamento difuso para deslizamento plano observado em amostras sujeitas ao H.

Y. Tayeyama e T. Ohno (*ISIJ Int* **43**, pp. 573-578, 2003) demonstraram por meio de cálculos *ab initio*, que o H se provavelmente se encontra combinado no ferro na forma de complexos lacuna +  $H_2$  e não dissolvido intersticialmente. A incorporação do hidrogênio molecular à lacuna reduz consideravelmente a energia de formação deste defeito, o que levaria a uma superprodução de lacunas na região da ponta da trinca, que se alinhariam na forma de *clusters* orientados de lacunas. Ambas as observações justificam o efeito fragilizante.

Visão Contemporânea:

- a. Diferentes mecanismos de fragilização podem estar associados em um mesmo material, dependendo da quantidade de hidrogênio disponível.
- b. Há um aparente consenso de que a plasticidade (nucleação de micro-vazios) tem um papel predominante, ao menos em aços de alta resistência.
- c. O fator decisivo na fragilização por H parece ser a formação de defeitos durante a deformação plástica (estimulada sob a ação do hidrogênio) e não o H dissolvido em sí → formação de lacunas e clusters de lacunas → fratura dúctil (quasi-clivagem).

#### 17.2 Degradação Química

## M. Nagumo ISIJ Int 41, pp. 590-598, 2001.

## Fadiga assistida por H

- Alta severidade.
- Ocorre mesmo para microestruturas, composições e níveis de tensão não sucetíveis à fragilização por H.
- A taxa de crescimento da trinca acelera-se pelo menos 10 vezes na presença de H<sub>2</sub>.

## Exercício 17.1

Em um artigo recente Zielinski e Domzalicki (*J. Mater. Proc. Tech.* **133**, 2003, 230) discutem um problema associado ao uso de aços carbono na construção marítima (especificamente na construção de cascos de navios). Segundo estes autores, na tentativa de se proteger o aço contra a corrosão por meio de proteção catódica é possível que haja a evolução de hidrogênio sobre a chapa de aço (ou seja, produção de hidrogênio gasoso), que associado a tensões de tração pode ser prejudicial ao material. Proponha um mecanismo que explique o processo de degradação destes aços nas condições descritas e discuta possíveis alternativas evitar sua ocorrência em serviço.

# 17.2.2 Corrosão sob tensão (CST)

- Em inglês: *Stress Corrosion Cracking*, SCC.
- Nucleação e propagação lenta de uma trinca sob a ação de um fator ambiental → fenômeno sinergético.
- Até recentemente acreditava-se que metais puros eram imunes à CST, hoje em dia sabe-se que este não é o caso.
- CST normalmente é associada a metais e ligas, porém há fenômenos semelhantes que atingem materiais cerâmicos (fadiga estática) e poliméricos (fratura por crescimento e subsequente ruptura de microfibrilas, *crazes*, induzidas por fator ambiental).

## Fatores que influenciam a CST

1. Reações eletroquímicas (distintas para a nucleação e para a propagação da trinca).

- 2. Estrutura do reticulado (estrutura de contornos de grão, sistemas de escorregamento etc...).
- 3. Estado de tensão e como ele afeta a nucleação e a propagação da trinca.

#### **Campo de pesquisa interdisciplinar!** $\rightarrow$ Corrosão, Metalurgia Física, Mecânica da Fratura.

#### Meios que induzem à CST

- Normalmente são eletrólitos aquosos (mas nem sempre).
- A espécie química que causa CST para uma dada liga é geralmente específica (ions amônia para ligas de cobre, cloreto para materiais ferrosos etc...)
- Mudanças de temperatura, aeração ou mesmo de concentração das espécies podem tornar um meio inócuo em um que provoca CST.
- CST é observada geralmente em combinações liga/eletrólito que causam o surgimento de filme protetor (filme passivante, pátina, camada empobrecida em um dos elementos de liga) → CST é especialmente relevante em materiais resistentes à corrosão generalizada.

#### Efeitos do estado de tensões

- I CST ocorre somente quando tensões de tração são predominantes, porém as magnitudes associadas geralmente são muito inferiores a  $\sigma_e$ .
- II As tensões podem ser remotas ou residuais  $\rightarrow$  **ZAT em soldagem!**.
- III Tensões residuais de compressão na superfície podem ser usadas para auxiliar a controlar o fenômeno.

#### Mecanismos de CST

A Figura 17.2 apresenta um dos mecanismos propostos para justificar a interação entre deformação plástica e corrosão na CST: Um metal inicialmente passivado apresenta um concentrador de tensão, por conta disto um sistema de escorregamento é ativado e produz um degrau na superfície, o que expõe metal não oxidado (normalmente muito reativo) ao ataque do meio.

Freqüentemente CST é observada em associação a outros fenômenos de corrosão, como por exemplo, corrosão por pites ou corrosão intergranular (vide Fig. 17.3).



Figura 17.2: Representação gráfica de um dos mecanismos propostos para justificar a interação entre deformação plástica e corrosão em CST.



Figura 17.3: Mecanismo de interação entre corrosão intergranular e CST, justificando a observação experimental de que trincas de CST podem apresentar caráter misto, trans- e intergranular: (a) a corrosão intergranular promove o surgimento de uma trinca próxima à superfície, (b) por conta disto surge uma concentração de tensão, que ativa um sistema de escorregamento, (c) isto induz à CST (por exemplo, pelo mecanismo exposto na Fig. 17.2) e (d) o processo se retroalimenta pela corrosão de novos contornos e pela ativação de sistemas de escorregamento em poutros grãos.
#### Ensaios de CST

Norma ASTM G49-85(2000):

- Carregamento estático a diversos níveis de tensão, mede-se o tempo para fratura. Há uma tensão mínima para CST.
- Carregamento dinâmico com taxas muito lentas (10<sup>-5</sup> a 10<sup>-9</sup> m/s de afast. das garras) e plota-se o alongamento em função da taxa de carregamento, comparando-se com amostras semelhantes ensaiadas em ambiente inerte.

Norma ASTM G168-00:

- Amostra pré-trincada para flexão (Double cantillever bean, DCB).
- Carregamento a deslocamento constante (p. ex. por meio de parafusos e roscas) ou a carga constante (p. ex. por meio de cargas estáticas), plota-se  $\frac{da}{dN} = f(K) \rightarrow K_{Iscc}$ .
- O CP pode ser exposto à atmosfera, imerso na solução, ou esta pode ser adicionada gotaa-gota na ponta de trinca.

Norma ASTM G30-87:

 Uma chapa de metal é dobrada em 180° em torno de um determinado raio e, em seguida, é imersa na solução.

#### Aspectos fratográficos da CST

- Freqüentemente a trinca apresenta características cristalográficas (facetas).
- Coalescimento de trincas  $\rightarrow$  formato em leque.
- Modo misto trans- e intergranular.
- Interação com corrosão intergranular.

#### CST em aços inoxidáveis

Norma ASTM G36: imersão em cloreto de magnésio ou de sódio ferventes.

- aços ferríticos apresentam elevada resistência à CST nestes meios (MgCl<sub>2</sub> e NaCl fervente) ≠ imunidade generalizada conferida pela estrutura CCC!
- aços dúplex são suscetíveis à CST, porém > valores de K<sub>Iscc</sub> em comparação aos austeníticos.
- composição (principalmente, Ni), microestrutura (Vv e morf. de α, ∈ fase σ) e meio influenciam CST nos aços dúplex.
- o perigo de CST em aços inoxidáveis austeníticos não deve ser subestimado!

#### Fadiga estática: CST em cerâmicas

Crescimento sub-crítico de trincas, crescimento estável de trincas  $\rightarrow$  sinônimo de CST aplicável principalmente a cerâmicas (mas também a polímeros, em alguns casos).

- Exemplo: vidros de sílica ← CST por umidade atmosférica (vide R. Gy J. Non-cryst. Sol. 316, pp. 1-11, 2003).
- "Crack healing" → fenômeno inverso: por conta da oxidação a trinca previamente aberta se fecha novamente, reduzindo K.

#### CST em polímeros

- Processo complexo devido à natureza visco-elástica do material.
- Normalmente associado à formação de uma microfibrila, sua propagação e ruptura das fibrilas pelo meio (ex. CST de PET em meio contendo íons OH<sup>−</sup>) → a propagação da trinca é descontínua (*Discontinuous Growth Bands*, DCBs).
- Fenômeno que ocorre no dia-a-dia sem que o notemos, pois estamos acostumados a simplesmente descartar peças plásticas que quebram.
- O fenômeno vem despertando interesse em função do crescente uso de materiais poliméricos em aplicações de responsabilidade.

## Fragilização ambiental de ICs

Materiais intermetálicos (ICs, de *Intermetallic Compounds*): Fe<sub>3</sub>Al, FeAl, Ni<sub>3</sub>Al, NiAl, Ti<sub>3</sub>Al - TiAl.

- apresentam ductilidade em tração reduzida quando ensaiados em ambiente contendo umidade, relativo a ensaios a vácuo ou em O<sub>2</sub> seco.
- supostamente redução do vapor d'água pelo alumínio presente na liga.

$$Al + 3H_2O \rightarrow Al_2O_3 + 6H^+ \tag{17.1}$$

# 17.3 Degradação radiativa

Dano provocado por radiação eletromagnética (luz visível ou UV, raios-X, raios  $\gamma$ ) ou por partículas de alta energia ( $\alpha$ , nêutrons, elétrons).

- Deslocamento de elétrons (ionização  $\rightarrow$  não metais).
- Deslocamento de átomos por colisão elástica.
- Fissão e picos de calor (*thermal spikes*)

#### Degradação radiativa de polímeros

Classificação com respeito à posição dos grupos cromofóricos:

- Tipo A- os grupos são defeitos que estão no meio ou na terminação da cadeia polimérica.
- Tipo B- os grupos fazem parte da cadeia principal.

Tipos de processos:

Fotodegradação - processos que ocorrem mesmo na ausência de O<sub>2</sub>.

Fotooxidação - processos que requerem O<sub>2</sub> para ocorrerem.

**Degradação/oxidação fototérmica -** processos que adicionalmente necessitam de temperatura elevada para ocorrer (porém abaixo da temperatura de degradação térmica pura).

Grupos cromofóricos:

- Grupos carbonila.
- Grupos carbonila produzindo oxigênio nascente.

#### 17.3 Degradação radiativa

- Grupos carbonila insaturados.
- Grupos peróxido de hidrogênio.
- Complexos de transferência de carga entre O<sub>2</sub> e polímero.
- Íons metálicos.

#### Danos por nêutrons em metais

Deslocamento do átomo para uma posição intersticial e formação de um par lacuna - autointersticial, seguida da migração dos defeitos.

Impacto sobre as propriedades mecânicas:

- Diretamente endurecimento por lacunas (e autointersticiais).
- Indiretamente -
  - destruição da ordem do reticulado,
  - fraccionamento de precipitados (eventualmente redissolução),
  - aceleração da nucleação e
  - aceleração da difusão.

Danos por irradiação de neutrons rápidos em metais (tecnologia de reatores nucleares):

- Irradiação em baixas temperaturas (; 0,2 τ<sub>H</sub>) → formação de anéis prismáticos de discordâncias.
- Condensação das lacunas e formação de microcavidades.
- Inchamento (*swelling*).

# 18 MECÂNICA DOS MATERIAIS COMPÓSITOS

Materiais compósitos formam uma classe especial de materiais "engenheirados":

- Freqüentemente  $\Rightarrow$  comportamento mecânico superior (resistência, rigidez, tenacidade)
- Caráter hibrido (metal + cerâmica, polímero + cerâmica etc...) → síntese da mecânica dos materiais.

Estas são as justificativas para a introdução deste tema na presente disciplina.

# 18.1 Definições

Material composto por duas ou mais fases distintas do ponto de vista químico e físico (normalmente envolvendo algum processo de engenharia em sua elaboração).

- a. Produto sintético.
- b. Produto natural  $\rightarrow$  compósitos *in situ*.
  - Fase contínua = **matriz**
  - Fase distribuída = **reforço**

Em contraposição aos materiais compósitos, diz-se que os materiais convencionais são **mo-nolíticos**.

#### Compósitos in situ

Figura 18.1: exemplo de eutético fibroso que poderia eventualmente dar origem a um compósito *in situ*.



Figura 18.1: Exemplo de eutético fibroso  $(Ni_3Al + (Ni,Cr,Fe)_7C_3)$  em liga Ni-Al-Cr-C, potencial candidato à fabricação de compósitos *in situ* por solidificação direcional. Foto obtida em microscópio eletrônico de varredura com ataque profundo da matriz. Fonte: Hélio Goldenstein *et al.* (2004).

# 18.1.1 Compósitos - Classificação

Por material da matriz:

- CMM Compósitos de matriz metálica (exemplo: Al SiC<sub>p</sub> na indústria automobilística).
- CMC Compósitos de matriz cerâmica (exemplo: Super Kanthal ℝ): Elementos de resistência para fornos mufla de altas temperaturas T  $_{i}$  1400 °C → SiC + MoSi<sub>2</sub>).
- CMP Compósitos de matriz polimérica (exemplo: compósitos Epóxi + fibra de vidro).

Por geometria do reforço:

- Compósitos reforçados por partículas,
- Compósitos reforçados por whiskers (ou fibras curtas),
- Compósitos reforçados por fibras ou placas.

#### Exemplo - Compósito reforçado por partículas

CMM Zamak-SiC $_p$  (Fig. 18.2).



Figura 18.2: Exemplo de CMM, matriz Zamak (liga de zinco e alumínio, usada em fundição de precisão), reforço por partículas de SiC. Note a presença de poros no canto inferior direito da figura. Fonte: by Roberto Martins de Souza, diss. mestrado, PMT-EPUSP, 1994.



Figura 18.3: Exemplo de CMP: matriz Epóxi e reforço por fibras de carbono. Fonte: Gerson Marinucci - IPEN/CNEN-SP - 2005.

#### Exemplo - Compósito reforçado por fibras

Figura 18.3: CMP Epoxi-fibra de C, apresentando camadas com fibras orientadas a  $0^{\circ}$  e a  $90^{\circ}$ , o monofilamento tem  $7\mu m \not \emptyset$ .

## 18.1.2 CMPs

Matrizes típicas são termorígidas com elevada densidade de ligações cruzadas:

- 1. Resinas fenólicas custo menor, porém risco à saúde do trabalhador (produção de resíduos tóxicos durante a cura).
- 2. Resinas epóxi e poliéster cura por mecanismo de adição, sem a produção de resíduos tóxicos.

Matrizes termoplásticas  $\rightarrow$  Poli(éter éter acetona), PEEK  $\rightarrow$  matrizes para compósitos avançados de fibra de carbono, possuem maior tenacidade e resistência ao impacto (funções da cristalinidade). A Tabela 18.1 lista as propriedades mecânicas típicas da alguns CMPs reforçados por fibras.

#### **CMPs - Prepregs**

Prepregs  $\rightarrow$  material pré-impregnado: matriz polimérica parcialmente curada com fibra unidirecional (ou tecida), vendida na forma de rolos de 300 a 1500 mm de largura por 0,125mm de espessura e de 50 a 250m de comprimento, contendo 35% em volume de polímero. Os

Tabela 18.1: Exemplos de propriedades típicas de CMPs. Porcentagens de reforço expressas em volume - f.c. = fibra de carbono, f.v = fibra de vidro. Fonte: R. W. Hertzberg, "Deformation and fracture mechanics of engineering materials"  $4^{a}$  ed., John Wiley and Sons, 1996.

Material	Ε	$\sigma_e$ ou $\sigma_f$	$\mathcal{E}_{f}$
Nylon 66 + 25% f.c.	14 GPa	$\sim 200 \text{ MPa}$	2,2%
Epoxi + 60% f.c.	220 GPa	1400 MPa	0,8%
Poliester + 50% f.v. (alinhadas)	38 GPa	750 MPa	1,8%
Poliester + 50% f.v. (aleatórias)	8,5 GPa	110 MPa	2%

prepregs são cortados, aplicados em camadas na peça que se deseja fabricar (no caso de prepregs com fibras unidirecionais, é comum aplicar-se em camadas com orientação alternada) e curadas (geralmente em autoclave)

# 18.1.3 Características das matrizes

- Altas densidades de discordâncias em matrizes metálicas (tensões térmicas) → caminhos rápidos de difusão.
- Alteração da cinética de cristalização em matrizes poliméricas, pela ação do reforço.
- Microtrincamento da matriz cerâmica devido a tensões térmicas.

Em resumo, a microestrutura da matriz é fortemente influenciada pelo processo de fabricação do compósito  $\Rightarrow$  o material da matriz e a matriz do compósito tem comportamento diferente (ex. envelhecimento de matrizes de liga Al- Cu). Já o material do reforço raramente é afetado pelo processamento.

## Exemplo

Figura 18.4: Interação entre as partículas de reforço com a microestrutura do eutético em um CMM Zamak-SiC<sub>p</sub> obtido por infiltração.

# 18.1.4 Rotas de fabricação

Mistura mecânica e co-sinterização:

• Rota-padrão para CMCs, custo semelhante ao de produção de cerâmicas.



Figura 18.4: Exemplo de interação entre a microestrutura da matriz, neste caso um eutético Zn-Al da liga Zamak com as partículas do reforço (SiC). Fonte: Roberto Martins de Souza, diss. mestrado, PMT-EPUSP, 1995.

• Liga Incoloy MA956  $\rightarrow$  moagem mecânica de pós da matriz metálica e  $Y_2O_3$  e posterior extrusão da mistura  $\rightarrow$  incremento da resistência à fluência.

Exemplo (Fig. 18.5): CMM Al 1100 + 10% vol. SiC<sub>p</sub> (27 $\mu$ m  $\emptyset$ ), produzido por mistura dos pós, encapsulamento em tubo de alumínio e extrusão na razão 48:1.

Fundição:

- Mistura do reforço em forma de pó com a matriz no estado líquido e vazamento em um molde (eventualmente fundição-sob-pressão).
- Rota comum no processamento de CMMs com reforço particulado (exemplo, Al/ SiC<sub>p</sub>).
- Econômica, porém suscetível a problemas de segregação do reforço.

Infiltração:

- A pré-forma com o reforço em fibra é posicionada no interior de um molde e a matriz é introduzida (infiltrada) na cavidade no estado líquido.
- Rota-padrão para a produção de CMMs com reforço em fibra.
- Requer equipamento especializado.



Figura 18.5: Exemplo de CMM obtido pela rota de mistura mecânica e co-sinterização. Fonte: Humberto Naoyuki Yoshimura, diss. mestrado, PMT-EPUSP, 1994.

• Permite um melhor controle da distribuição do reforço em comparação com a rota de fundição, porém também é suscetível a problemas (carregamento da pré-forma pelo líquido).

Moldagem por aplicação:

- Rota-padrão para a fabricação de CMPs com reforço em fibra.
- A matriz e o reforço são depositados em camadas sucessivas, que vão dando forma ao produto desejado (vide seção 18.1.2)

Solidificação direcional:

- Rota-padrão para a fabricação de CMMs in situ.
- O material é solidificado na presença de um forte gradiente de temperatura, com o eutético crescendo em uma única direção.

# 18.1.5 Defeitos em compósitos

Porosidade: Figura 18.2

- evolução de gases durante o processamento, contração de solidificação, falha na eliminação de material ligante (em CMCs),
- em compósitos fabricados por infiltração líquida uma alta fração volumétrica de reforço pode impedir a movimentação da massa semi-sólida → *debulking* em PMCs,
- desenvolvimento de estados de tensão residual com forte componente hidrostática de tração contrapõe-se à sinterização em CMCs.

## Regiões ricas em reforço (clustering) 18.6

Regiões ricas em matriz 18.7

Cavidades

Microtrincas Figura 18.8

Desalinhamento de fibras

Regiões não consolidadas (debonded)

Planos não consolidados (delaminated) Figura 18.9



Figura 18.6: Exemplo de *clustering* em um CMM Al 1100 + 20%vol. SiC<sub>p</sub> (10  $\mu$ m  $\emptyset$ ). Fonte: Humberto Naoyuke Yoshimura, diss. mestrado, PMT-EPUSP, 1994.



Figura 18.7: Exemplo de regiões ricas em matriz em um CMM Al 6063 + 10% vol. SiC<sub>p</sub> (43  $\mu$ m  $\emptyset$ ). Fonte: Humberto Naoyuke Yoshimura, diss. mestrado, PMT-EPUSP, 1994.



Figura 18.8: Exemplo de microtrincamento em um CMM (a) Al 6063 + 5% vol. SiC<sub>p</sub> (27  $\mu$ m  $\emptyset$ ) e (b) Al 6063 + 10% vol. SiC<sub>p</sub> (43  $\mu$ m  $\emptyset$ ). Fonte: Humberto Naoyuke Yoshimura, diss. mestrado, PMT-EPUSP, 1994.

#### 18.1 Definições



Figura 18.9: CMP Epoxi - Fibra de C: Exemplo de fratura por delaminação na região de transição entre uma camada orientada a 0° e a 90°, imagem por microscopia óptica (a) e eletrônica de varredura (b). Fonte: Gerson Marinucci, IPEN/CNEN-SP (a ser publicado em Composite Structures).

# 18.1.6 Interfaces

- A quantidade de interfaces em um material compósito é muito alta em comparação com materiais monolíticos → forte impacto sobre as propriedades do material.
- Em geral (exceto para os compósitos *in situ* e para casos muito particulares) as interfaces não estão em equilíbrio termodinâmico → reações na interface.

**Barreiras de difusão:** camada de fase muito estável e com baixíssima difusividade na temperatura de trabalho do compósito, que é formada na interface (geralmente sobre o reforço) e tem por objetivo reduzir a cinética de reação entre matriz e reforço.

#### **Tensões térmicas**

$$\boldsymbol{\sigma} = f(E_r, E_m, \frac{a}{b}, \bar{r}) \Delta \alpha \Delta T \tag{18.1}$$

 $E_r = \text{módulo} \text{ de rigidez} \text{ do reforço}, E_m = \text{módulo} \text{ de rigidez} \text{ da matriz} (obs. freqüentemente anisotrópicos), <math>\frac{a}{b}$  fator de forma do reforço,  $\bar{r} = \text{raio}$  equivalente do reforço,  $\Delta \alpha = \text{diferença} \text{ de coeficientes}$  de dilatação lineares,  $\Delta T = \text{diferença} \text{ de temperatura}$  (durante o processamento ou uso).

# $f(E_r, E_m, \frac{a}{b}, \bar{r}) \rightarrow$ manuais de compósitos

A área de interface aumenta com o fator de forma e com a diminuição do raio equivalente.

#### Estrutura da interface

- Em CMCs e CMMs → geralmente interfaces incoerentes e de alta energia → fontes e sumidouros de lacunas e discordâncias → sítios de nucleação heterogênea.
  - Excessão: compósitos in situ  $\rightarrow$  interfaces semi-coerentes.
- Em CMPs → cristalinidade induzida pela presença do reforço (exemplo, nanocompósitos com reforço por argilas).

#### Ligação na interface

- Transferência de carga na interface (CMPs e CMMs) → aumento da rigidez e da resistência.
- Deflexão de trincas (CMCs) → aumento da tenacidade por microtrincamento da interface ou por bifurcação da trinca.

Molhabilidade = condição necessária, mas não suficiente.

*Sizing* (engomadura) de CMPs  $\rightarrow$  tratamento superficial aplicado a reforços por fibras para melhorar a ligação interfacial  $\rightarrow$  organosilanas ( $R - SiX_3$ , onde R é um radical compatível com a matriz polimérica e X normalmente é cloro).

Entrelaçamento mecânico (*mechanical interlocking*)  $\rightarrow$  tratamento de pré-oxidação aplicado a fibras de carbono com o objetivo de aumentar a rugosidade, melhorando a capacidade de transferência de carga na interface.

# 18.1.7 Aplicações de compósitos

Aeroespaciais:

- Diminuição do peso (= aumento da carga útil).
- Praticidade de montagem (CMPs).
- Resistência ao espaço sideral.
- Substituição de ligas de Berílio (tóxicas) por Al/SiC<sub>p</sub>.

Resistência à temperatura (CMCs)  $\rightarrow$  até 1600 °C no futuro avião sub-orbital.

Outras aplicações:

- Construção civil, marinha e produtos esportivos (PMCs com fibras de aramida, silício ou carbono).
- Automotivas (uso de Al/SiC<sub>p</sub> em pistões de motor à explosão).
- Elétricas (Cabos de cobre com reforço contínuo de Nb, Ta ou Cr → resistência mecânica, condutividade térmica e elétrica. Supercondutores convencionais → fibras de Nb-Ti ou Nb<sub>3</sub>Si em matriz de cobre).
- Mecânicas (ferramentas de corte, metalduro, WC / Co, ou mais recentemente Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> / SiC<sub>w</sub>)
- Médicas (implantes biocompatíveis de C / C).

# 18.2 Propriedades físicas dos compósitos

Compósitos são materiais "engenheirados" ⇔ previsão numérica das propriedades físicas.

# 18.2.1 Mistura mecânica

A regra mais simples para a previsão das propriedades mecânicas de um compósito é a da **mistura mecânica**:

"Dada uma certa propriedade física X característica do reforço  $(X_r)$  e da matriz  $(X_m)$ , teremos

$$X = V_m X_m + V_r X_r \tag{18.2}$$

onde  $V_m$  e  $V_r$  correspondem respectivamente às frações volumétricas de matriz e de reforço no compósito."

#### Exemplos

Densidade ( $\rho$ ):

$$\rho = V_m \rho_m + V_r \rho_r \tag{18.3}$$

Capacidade térmica (*C*):

$$C = \frac{C_m \rho_m V_m + C_r \rho_r V_r}{\rho} \tag{18.4}$$

Obs.:  $V_r + V_m < 1$  na presença de porosidade!

#### Anisotropia

Em compósitos com reforço em fibras orientadas (longas ou curtas) teremos geralmente  $X_{\parallel} \neq X_{\perp}$  (onde  $X_{\parallel}$  e  $X_{\perp}$  correspondem, respectivamente, à propriedade X medida ao longo e perpendicular à direção da fibra)  $\Rightarrow$  anisotropia!

#### Módulos de rigidez

Módulo de rigidez longitudinal ( $E_{\parallel}$ ), Figura 18.10.



Figura 18.10: Carregamento de um compósito reforçado por fibras na diração longitudinal.

$$V_f \sigma_f + V_m \sigma_m = V_f \varepsilon_f E_f + V_m \varepsilon_m E_m = \varepsilon E_{\parallel}$$
(18.6)

Supondo que  $\varepsilon = \varepsilon_f = \varepsilon_m$  teremos:

$$E_{\parallel} = V_f E_f + V_m E_m \tag{18.7}$$

Média de Voigt

Módulo de rigidez transversal ( $E_{\perp}$ ), Figura 18.11.



Figura 18.11: Carregamento de um compósito reforçado por fibras na direção transversal.

$$F = F_r = F_m \Rightarrow \varepsilon = V_f \varepsilon_f + V_m \varepsilon_m \tag{18.8}$$

Módulo de rigidez transversal  $(E_{\perp})$ 

$$V_f \varepsilon_f + V_m \varepsilon_m = V_f \frac{\sigma_f}{E_f} + V_m \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma}{E_\perp}$$
(18.9)

Supondo que  $\sigma = \sigma_f = \sigma_m$  teremos:

$$\frac{1}{E_{\perp}} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$$
(18.10)

#### Média de Reuss

Os módulos obtidos acima baseiam-se em aproximações grosseiras: nem a deformação é igualmente distribuida na matriz e no reforço na orientção longitudinal, nem a tensão é igualmente distribuida na orientação transversal, isto torna-se ainda mais crítico quando partimos para compósitos com reforços de fibras curtas ou de partículas alongadas. A Figura 18.12 apresenta o resultado obtido para os módulos longitudinal e transversal assumindo uma matriz Epóxi



 $\operatorname{com} E = 4$ GPa e um reforço por fivra de vidro  $\operatorname{com} E = 80$ GPa.

Figura 18.12: Resultado típico de módulos longitudinal e transversal em função da fração volumétrica de reforço para um compósito Epoxi (E = 4GPa) - Fibra de vidro (E = 80 GPa).

#### Exercício 18.1

e

Um dado compósito é fabricado com reforço em lâminas contínuas, como esquematizado na figura 18.13. Obtenha uma expressão para o coeficiente de Poisson do compósito (v) em função dos valores para a matriz ( $v_m$ ) e para o reforço ( $v_r$ ) e de suas frações volumétricas (respectivamente  $V_m$  e  $V_r$ ) quando:

a. o compósito é carregado em tração em uma direção contida no plano das lâminas e

b. o compósito é carregado em compressão na direção perpendicular ao plano das lâminas.

Dica — utilize o critério de isotensão ou de isodeformação dependendo do caso e determine o coeficiente de Poisson como a mistura mecânica da quantidade conveniente.

# 18.2.2 Volume crítico de reforço

Podemos agora calcular o potencial de reforço de um compósito por meio de algumas hipóteses simples:

• o compósito irá falhar na carga aplicada  $F_c$  quando a tensão atuante na matriz/reforço atingir o valor da tensão crítica de ruptura da fibra/deformação plástica da matriz  $(\sigma_{f,m}^f)$ )





• vale a regra das misturas (ou seja, não há efeito sinergético).

Com base nestas hipóteses definimos  $\sigma_c = \frac{F_c}{A_0}$  onde  $A_0$  é a área da seção transversal do compósito.

Define-se  $\sigma'_m$  como a tensão atuante na matriz, que corresponde à deformação de fratura da fibra  $\varepsilon_f^f = \frac{\sigma_f^f}{E_f}$  (Figura 18.14).



Figura 18.14: Representação esquemática dos estados de tensão e de deformação de um reforço frágil e de uma matriz dúctil, com a definição de  $\varepsilon'_m$ .

Desta forma podemos estabelecer um critério de falha para o compósito quando a deformação da matriz suplanta a deformação crítica da fibra **ou** quando a tensão na fibra supera o seu limite de ruptura. Considerando agora que as dimensões da matriz e do reforço são as mesmas, podemos obter a máxima tensão admissível **no compósito** como (Fig. 18.15):



Figura 18.15: Máxima tensão admissível em um compósito reforçado por fibras contínuas, assumindo que este falha quando a deformação da matriz suplanta a deformação crítica da fibra ou quando a tensão sobre a fibra supera a tensão de ruptura da mesma.

$$\sigma_c \approx \sigma_f^f V_f + \sigma_m'(1 - V_f) \tag{18.11}$$

Pela análise da Figura 18.15 verificamos que para frações volumétricas de reforço abaixo de um determinado valor crítico ( $V_{crit}$ ) o compósitio apresentará efetivamente uma tensão de ruptura menor que a da matriz isenta de reforço. Compósitos com fração de reforço inferior ao volume crítico possuem, portanto, resistência inferior à da matriz isenta de reforço.

#### Transferência de carga entre matriz e fibra

A carga aplicada a compósitos reforçados por fibras é transmitida da matriz ao reforço por meio de tensões de cisalhamento atuantes na interface. Para o caso de uma fibra circular de raio *R*, estas tensões de cisalhamento produzem uma tensão axial ao longo do comprimento da fibra ( $\sigma_{zz}$ ) dada por (Fig. 18.16):

$$\sigma_{zz}\pi R^2 = \tau_{rz} 2\pi R x \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{2\tau_{rz} x}{R}$$
(18.12)

onde *x* é a coordenada linear ao longo do comprimento da fibra.

Pela análise da equação deduzida vemos que a tensão é nula nas extremidades da fibra e cresce linearmente com a distância, obviamente até atingir o valor de tensão de ruptura da fibra.

Definimos o comprimento crítico de transferência ( $\ell_c$ ):



Figura 18.16: Estado de tensão ao longo de uma fibra curta.

$$\frac{\ell_c}{d} = \frac{\ell_c}{2R} = \frac{\sigma_f^f}{2\tau_{rz}}$$
(18.13)

A tensão média atuando sobre uma fibra  $(\overline{\sigma}_f)$  será:

$$\overline{\sigma}_{f} = \frac{\sigma_{f}^{f}\ell - \sigma_{f}^{f}(\frac{\ell_{c}}{2})}{\ell_{c}} = \sigma_{f}^{f}\left(1 - \frac{\ell_{c}}{2\ell}\right)$$
(18.14)

O critério de determinação do volume crítico de reforço no caso de fibras curtas se altera para:

$$\sigma_c = \sigma_f^f \left( 1 - \frac{\ell_c}{2\ell} \right) V_f + \sigma_m' \left( 1 - V_f \right)$$
(18.15)

que é menor que no caso de fibras longas.

# 18.2.3 Fratura de compósitos

Fratura isolada ou fratura múltipla ↔ dois limites de resistência!

Três casos (Fig. 18.17):

- 1. a matriz tem alongamento maior, porém resistência menor em comparação ao reforço  $\rightarrow$  fratura única em um plano, quando a fibra quebrar.
- a matriz tem resistência maior em comparação ao reforço → fratura múltipla do reforço e fratura final quando a matriz romper
- a matriz tem alongamento menor em relação ao reforço (ex. Epoxi reforçado com fios de aço) → fratura múltipla da matriz.



Figura 18.17: Modos de fratura em compósitos.

Mecanismos de fratura em compósitos:

- I As fibras quebram ao longo de um único plano, a matriz não suporta a tensão e rompe → compósitos com alta fração volumétrica de fibras frágeis e resistentes.
- II A interface tem baixa resistência, a fibra rompe, mas deve ser "arrancada" da matriz ("pull-out") → fratura não plana.

# 18.2.4 Tenacificação

- Ancoramento de trinca ("crack bridging")
- Arrancamento ("pull-out")
- Deflexão e bifurcação na interface

Epoxi de alto impacto  $\rightarrow$  compósitos de matriz de Epoxi com reforço por partículas de borracha formadas "in situ"

**Exercício 18.2** Takahashi et al. (*J. European Ceramic Soc.*, vol. **23**, pp. 1971–1978, 2003) investigaram a resistência a propagação a quente de trincas em compósitos de matriz cerâmica Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>/SiC. Leia este artigo e responda:

- a . os autores mencionam no artigo um fenômeno denominado "crack-healing", o que significa isto?
- b. qual o impacto que o fenômeno de "crack-healing" tem sobre as propriedades deste compósito?
- c . localize dados na literatura sobre os materiais de base (nitreto de silício e carbeto de silício monolíticos) e discuta as suas propriedades em comparação com as do compósito.
- d. discuta uma possível aplicação estrutural para este compósito.

#### Exercício 18.3

Considere uma fibra cilíndrica de raio r inserida em um comprimento  $\ell$  em uma matriz (conforme a figura 18.18 abaixo). Caso a fibra seja puxada da matriz no sentido de seu eixo surgirá uma tensão de cisalhamento homogeneamente distribuída na interface. Suponha que, neste compósito, a tensão de ruptura da fibra  $\sigma_f$  seja oito vezes maior que a máxima tensão de cisalhamento,  $\tau_{max}$ , que a interface pode suportar e responda:

- a. Qual a relação de forma da fibra  $\frac{r}{\ell}$  que irá resultar na ruptura da fibra ao invés do seu arrancamento ("pull-out") da matriz?
- b. Qual o trabalho de arrancamento realizado sobre o sistema fibra/matriz em função da carga aplicada (supondo que a relação de forma seja menor que a calculada no item anterior) e de  $\ell$ ?
- c. Qual o modo de fratura previsto usando o resultado do item a (assumindo que as hipóteses do enunciado são válidas e que o comprimento *l* corresponde a metade do comprimento total da fibra) para as duas fibras curtas minerais usadas no reforço de matrizes de polipropileno, cujas propriedades são apresentadas na tabela 18.2 abaixo? Compare seus resultados com os resultados experimentais apresentados no artigo de J. S. Szabó e T. Czigány *Polymer Testing* 22(6), 2003, 711-719.

Obs.: O exercício foi inspirado pelo exercício 15.11 do livro de Chawla e Meyers.



Figura 18.18: Representação esquemática de um fibra sendo arrancada de uma matriz em um compósito.

Tabela 18.2: Valores tabelados referentes a duas fibras curtas minerais utilizadas no reforço de polipropileno.

Fibra	2r	$2\ell$	$\sigma_{f}$
"Cerâmica" (SiC)	5,9 μm	0,15 mm	828 MPa
Basáltica	9,0 µm	0,11 mm	586 MPa

APÊNDICE A – TENSORES