PMT2405 – Mecânica dos Materiais

Lista de exercícios nº 1 – Gabarito

1. Um dado estado de deformação no referencial definido pelas direções vertical, x_1, e horizontal, x_2, é dado pelo tensor

$$\varepsilon_{i,j} = \begin{pmatrix} 0.0003 & -0.00005 \\ -0.00005 & -0.00015 \end{pmatrix}$$

Desenhe o círculo de Mohr correspondente e determine:

(a) o valor da deformação média;

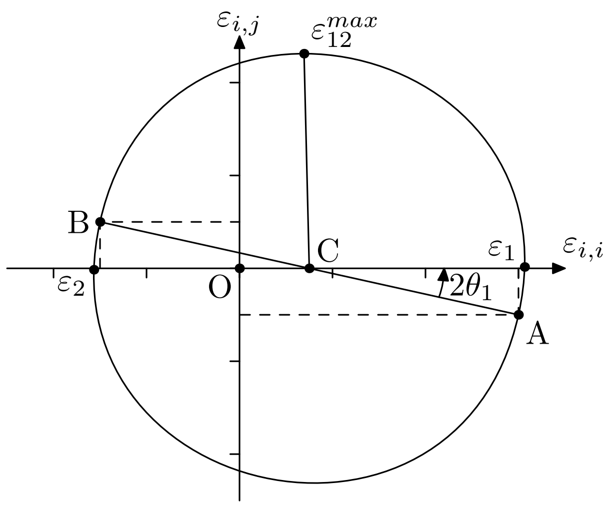
(b) as duas deformações principais;

(c) a orientação das direções principais em relação a x_1 e x_2;

(d) o valor da máxima deformação angular;

(e) o plano onde atua a máxima deformação angular em relação a x_1 e x_2.

Solução: O círculo de Mohr é dado pela figura abaixo, na qual A= $(3 \times 10^{-4}, -5 \times 10^{-5})$ e B= $(-1.5 \times 10^{-4}, +5 \times 10^{-5})$:



(a) a deformação média é dada pelo ponto C (centro do círculo), ou seja:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} = \frac{3 - 1.5}{2} \times 10^{-4}$$

$$\boxed{\varepsilon_m = 7.5 \times 10^{-5}}$$

(b) o raio R do círculo é metade de AB, ou seja:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(0.0003 + 0.00015)^2 + (-0.00005 - 0.00005)^2} = 2.3 \times 10^{-4}$$

As deformações principais são portanto:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_m + R \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = 3.1 \times 10^{-4}}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_m - R \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = -1.6 \times 10^{-4}}$$

(c) a orientação θ_1 da direção principal ε_1 pode ser obtida da seguinte relação:

$$\sin 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_{12}}{R} = -\frac{0.5}{2.3} \Rightarrow \boxed{\theta_1 = -6.3^\circ}$$

A orientação de ε_2 será portanto $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$, ou seja,

$$\boxed{\theta_2 = 83.7^\circ}$$

(d) a máxima deformação angular é simplesmente o raio do círculo, já calculado. Alternativamente, ε_{12}^{max} é a metade da diferença entre as deformações principais (metade do diâmetro AB). De qualquer modo:

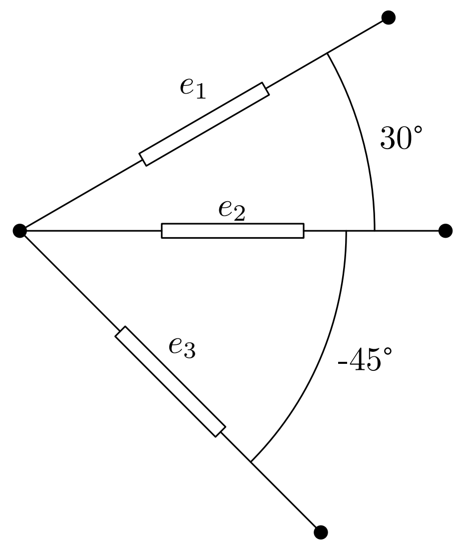
$$\varepsilon_{12}^{max} = R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{12}^{max} = 2.3 \times 10^{-4}}$$

(e) o plano de máxima deformação angular é o qual $\theta_{12} = \theta_1 - 45^\circ$ ou $\theta_{12} = 45^\circ - \theta_1$. Logo,

$$\boxed{\theta_{12} = 51.3^\circ}$$

■

2. A roseta apresentada na figura abaixo foi instalada em um dado ponto de uma barragem de usina hidrelétrica durante a sua construção, com o reservatório vazio, para medir as deformações paralelas ao seu plano (sendo que a direção de e_2 corresponde à direção horizontal). Após a instalação e a cura do concreto, as leituras dos extensômetros foram "zeradas" (ou seja, o estado de referência para a leitura das deformações foi considerado como sendo o reservatório vazio). A leitura das deformações normais após o reservatório ter sido preenchido por água até 80% de sua capacidade resultou em $e_1 = 0.0001$, $e_2 = 0.0003$ e $e_3 = 0.00025$.



Determine:

(a) o valor da máxima deformação normal neste ponto;

(b) o plano perpendicular à máxima deformação normal de tração em relação à direção horizontal (e perpendicular à normal ao plano da barragem);

(c) a deformação angular atuante no plano perpendicular à máxima deformação normal na direção perpendicular à normal ao plano da barragem

Dica: assuma que a barragem está sujeita a um estado plano de deformação, com deformação nula ao longo da direção normal ao plano da barragem.

Solução: Temos que calcular as deformações ε_{11}, ε_{22} e ε_{12}, a partir dos valores de e_i, no ponto de aplicação da roseta. Quando obtivermos estes valores, poderemos desenhar o círculo de Mohr e obter as informações pedidas.

Existem pelo menos duas maneiras de resolver a primeira parte deste exercício. A primeira consiste em partir diretamente da equação da tensão em função dos ângulo θ:

$$\varepsilon'_{ii} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\varepsilon'_{ii} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{12} \sin 2\theta \,.$$

Trata-se portanto de igualar ε'_{ii} a e_1, e_2 ou e_3, para cada um dos três valores de θ, obtendo assim três equações lineares para três incógnitas: ε_{11}, ε_{22} e ε_{12}.

O segundo método de resolução é a construção gráfica proposta por S. Timoshenko e J. N. Goodier, *Theory of Elasticity,* McGraw-Hill, 1951, pág. 21.

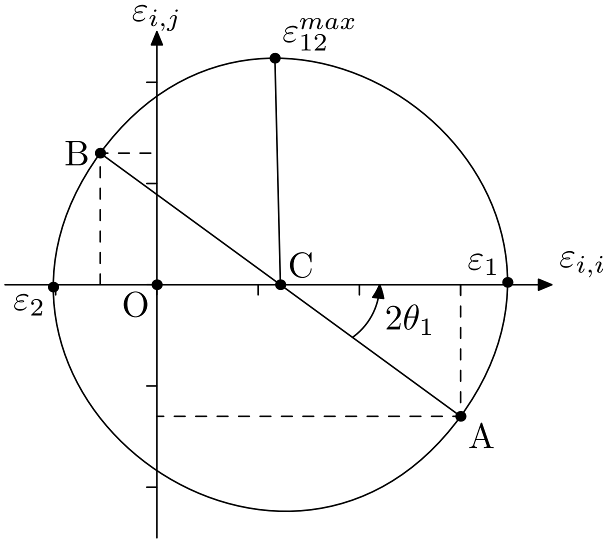
De qualquer forma, resolvendo o problema numérica ou graficamente, teremos

$$\varepsilon_{11} = 3 \times 10^{-4} \tag{1}$$

$$\varepsilon_{22} = -5.6 \times 10^{-5} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{12} = -1.3 \times 10^{-4} \tag{3}$$

O círculo de Mohr está indicado abaixo:



Seguindo o mesmo procedimento do ex. 1, chegamos aos valores dados abaixo:

(a)

$$\boxed{\varepsilon_1 = 3.4 \times 10^{-4}}$$

(b)

$$\boxed{\theta_1 = -17.86\,^{\circ}}$$

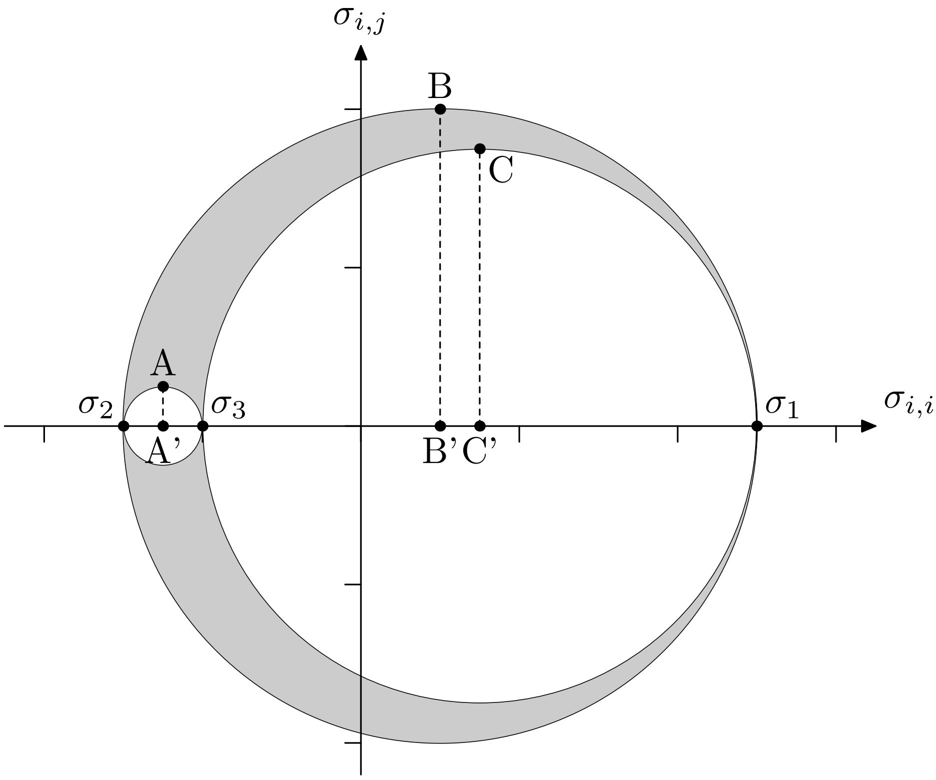
(c)

$$\boxed{\varepsilon_{12}^{max} = 2.2 \times 10^{-4}}$$

■

3. Desenhe o círculo de Mohr para um estado de tensão onde as tensões principais são $\sigma_1 = 250\,\text{MPa}$, $\sigma_2 = -150\,\text{MPa}$ e $\sigma_3 = -100\,\text{MPa}$ e determine a tensão média correspondente a este estado de tensão e a máxima tensão de cizalhamento no plano perpendicular à direção de σ_2.

Solução: O círculo de Mohr é dado na figura abaixo:



A tensão média é calculada pela média entra as tensões principais, ou seja,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{250 - 150 - 100}{3} \Rightarrow \boxed{\sigma_m = 0}$$

A tensão máxima de cizalhamento na direção perpendicular a σ_2 é dada pelo raio do círculo entre σ_1 e σ_3, ou seja, é igual ao comprimento do segmento CC' no círculo. Portanto,

$$\tau_2^{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{250 + 100}{2} \Rightarrow \boxed{\tau_2^{max} = 175\,\text{MPa}}$$

Obs: repare que, normalmente, convenciona-se que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, ao contrário do que acontece neste exercício.

■