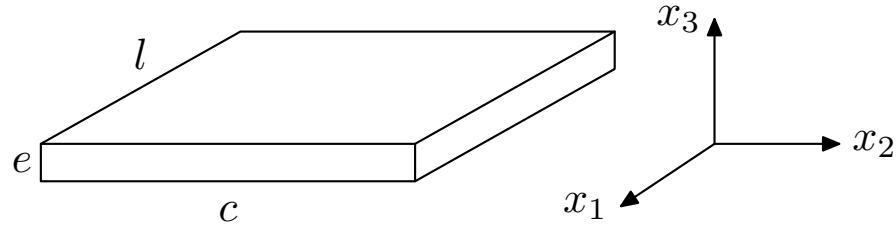
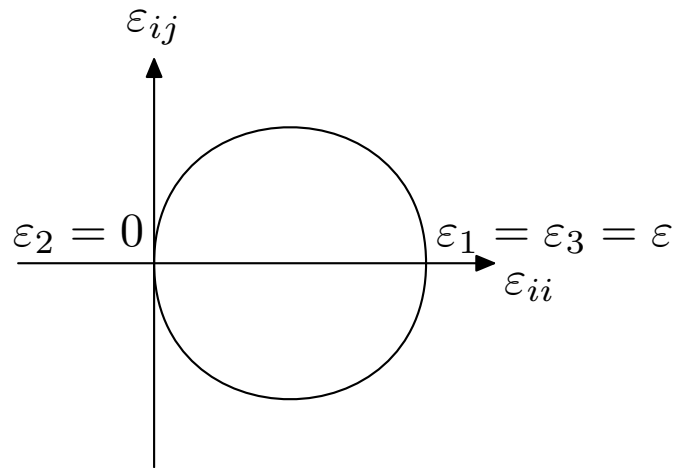


1. A figura mostra esquematicamente uma chapa de aço com as seguintes dimensões iniciais: comprimento c , largura l e espessura e .



Esta chapa está submetida ao estado de deformação indicado no círculo de Mohr, sendo que as deformações principais ε_1 , ε_2 e ε_3 estão localizadas respectivamente nas direções x_1 , x_2 e x_3 .



Supondo que o material tem módulo de Young E e coeficiente de Poisson ν , determine:

- o círculo de Mohr do estado de tensão correspondente;
- o volume final da chapa em função do volume inicial;
- a força atuante na direção x_3 ;
- o módulo efetivo ao longo de x_3 (ou seja, a razão entre σ_3 e ε_3).

Solução:

Inicialmente, supomos que o material da chapa é isotrópico, aproximação razoável se a textura da distribuição dos grãos não for muito acentuada.

(a) as equações que relacionam as tensões com as deformações são

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_s,$$

sendo que

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

e λ e μ são os parâmetros de Lamé, dados por

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

e

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

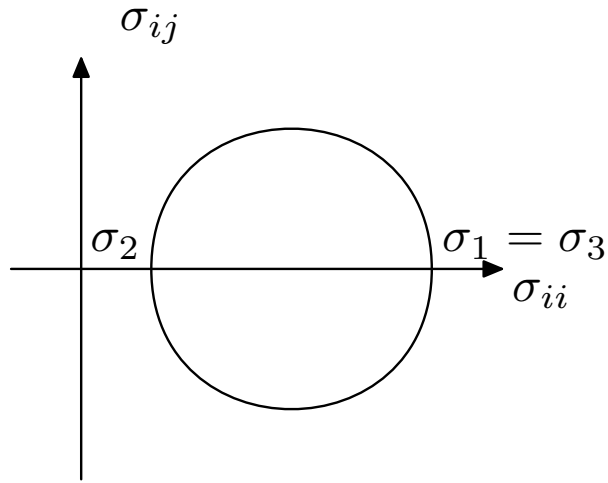
Do círculo de Mohr das deformações, temos que $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = \varepsilon$ enquanto que $\varepsilon_{22} = 0$ e $\varepsilon_{ij} = 0$ ($i \neq j$). Logo:

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = 2(\lambda + \mu)\varepsilon$$

$$\sigma_{22} = 2\lambda\varepsilon$$

$$\sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

Repare que, para manter a deformação nula na direção x_2 , é necessária a aplicação de uma tensão de tração igual a σ_2 , conforme esperado. O círculo de Mohr das tensões está representado abaixo:



(b) A variação de volume é aproximadamente dada por

$$\Delta V = V - V_0 = c(1 + \varepsilon_{11}) \cdot l \cdot e(1 + \varepsilon_{33}) - cle.$$

Desprezando os termos quadráticos, ΔV será

$$\boxed{\Delta V = 2cle\varepsilon}$$

(c) A força na direção x_3 é $F_3 = \sigma_3 \cdot c \cdot l$, ou seja,

$$\boxed{F_3 = 2\varepsilon(\lambda + \mu)cl}$$

(d) O módulo efetivo E_3 é igual a

$$\boxed{E_3 = \frac{\sigma_{33}}{\varepsilon_{33}} = 2(\lambda + \mu)}$$

■

2. No “Smithells Metals Reference Book” (W. F. Gale, T. C. Totemeier, Elsevier 8^a ed., 2004), encontramos os valores de constantes elásticas para o titânio hexagonal compacto, listadas na tabela abaixo:

(em GPa)	C_{11}	C_{33}	C_{44}	C_{12}	C_{13}
Ti	160	181	46.5	90	66

Com base nestes valores, escreva a matriz de rigidez $C_{i,j}$ para monocristais deste metal, onde

$$\sigma_i = C_{i,j} \varepsilon_j$$

e calcule o estado de tensão que surgirá caso o material esteja sujeito ao seguinte estado de deformação:

$$\varepsilon_{i,j} = \begin{pmatrix} 0.003 & -0.0001 & 0.0001 \\ -0.0001 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0001 & 0.0 & -0.0001 \end{pmatrix}.$$

Solução:

De acordo com K. G. F. Janssen et al, “Computational Materials Engineering – an introduction to microstructure evolution” (Elsevier, 2007), cap. 8, pág. 277, para o sistema hcp, a matriz de rigidez é dada por

$$C_{i,j} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é obtida a partir de considerações sobre a simetria do sistema hexagonal compacto. Os valores numéricos destas constantes são os da tabela fornecida no enunciado. O estado de tensão atuante no material é

calculado através da equação abaixo:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix},$$

com $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_{23}$, $\varepsilon_5 = \varepsilon_{13}$ e $\varepsilon_6 = \varepsilon_{12}$. Substituindo os valores e multiplicando as matrizes, teremos:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 473.4 \\ 263.4 \\ 179.9 \\ 0 \\ 4.65 \\ -3.5 \end{pmatrix} \quad (\text{MPa})$$

Ou seja,

$$\sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} 473.4 & -3.5 & 4.65 \\ -3.5 & 263.4 & 0 \\ 4.65 & 0 & 179.9 \end{pmatrix} \quad (\text{MPa})$$

■