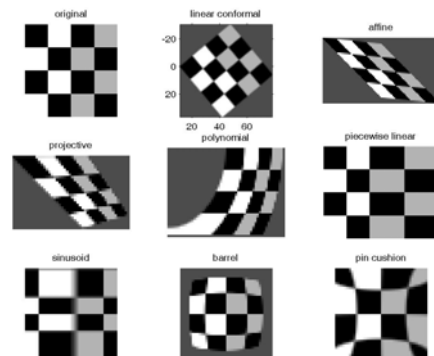


Transformações Geométricas

Sérgio S Furuie
PTC5892/EPUSP

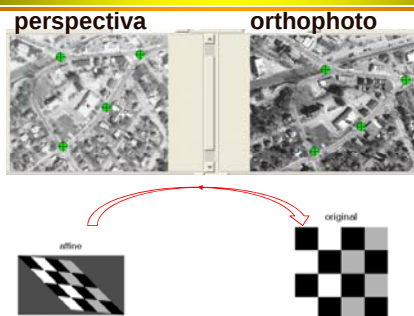
SF 17/06/2010 - 1

Exemplos de transf. Geom.



17/06/2010 - 2

Registro/fusão de imagens

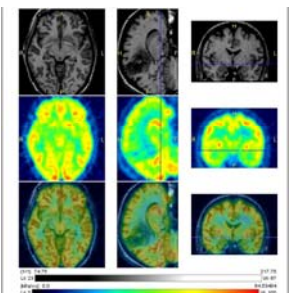


Como faríamos o alinhamento?

SF 17/06/2010 - 3

Motivação: fusão

- Conjugação de imagens para melhorar a sensibilidade e especificidade diagnóstica (fusão)
- Alinhamento de imagens 3D
 - Estudo multi-modal (CT, MRI, SPECT, ..) quantitativa
 - Aumento da sensibilidade e da especificidade diagnóstica



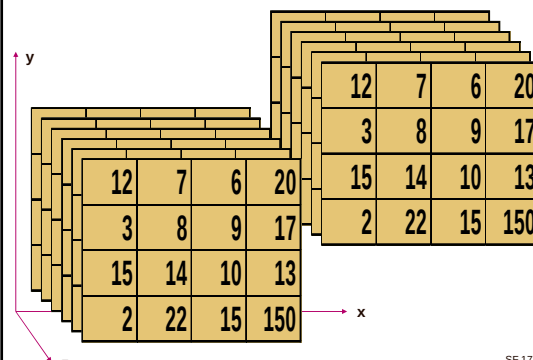
SF 17/06/2010 - 4

Transformações geométricas

- Transformação global vs. Local
- Transformação rígida vs. Deformativa
- Transformações geométricas:
 - translação, rotação =>rígida, linear
 - escala, shear, perspectiva =>deformativa
 - translação, rotação, escala =>linear
 - translação, rotação, escala, shear => affine

SF 17/06/2010 - 5

Translação



SF 17/06/2010 - 6

Translação

$$P_1 + \text{translacao} \Rightarrow P_2$$

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_0, y_0, z_0) = (x_2, y_2, z_2)$$

$$g(x_2, y_2, z_2) = f(x_1, y_1, z_1)$$

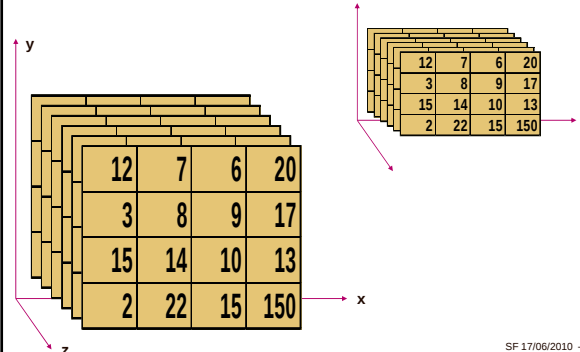
$$g(x_2, y_2, z_2) = f(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



SF 17/06/2010 - 7

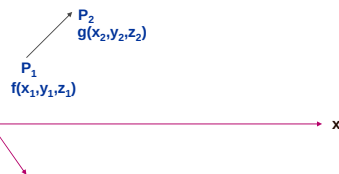
Escala



SF 17/06/2010 - 8

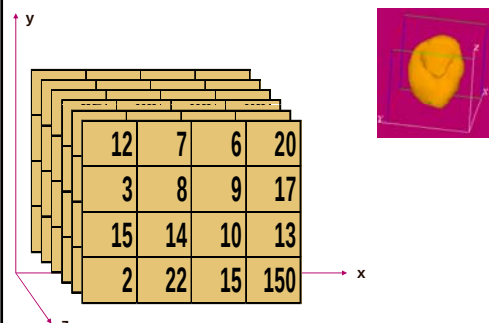
Escala

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



SF 17/06/2010 - 9

Rotação



SF 17/06/2010 - 10

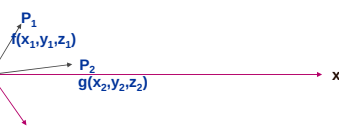
Rotação

$$P_1[\text{rotação } (\alpha, \beta, \gamma)] \Rightarrow P_2$$

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



SF 17/06/2010 - 11

Transf. geométricas na prática

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

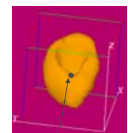
(tornou linear!)

$$R = R_\alpha \cdot R_\beta \cdot R_\gamma$$

Escalamento (S) e Rotação (R) em torno de um ponto genérico (P_0)

- 1) P / rotação deve-se centrar em (P_0) $\Rightarrow$ translação T
- 2) Rotação R
- 3) Retorno da translação (T^{-1})
- 4) Escala S

$$P_2 = S \cdot T_0^{-1} \cdot R \cdot T_0(P_1)$$



SF 17/06/2010 - 12

Métodos para alinhamento

- ▣ Baseado em pares de pontos conhecidos
 - Procrustes (rígido)
 - Affine (permite translação, rotação, escala, shear)
 - Projetiva (perspectiva, translação, rotação, escala, shear)
 - Determinação de parâmetros de transformação (fitting de modelos)
- ▣ Baseado no conteúdo das imagens (não-supervis.) p/ alinhamento rígido [refinamento]
 - Correlação cruzada
 - Informação mútua
 - otimização

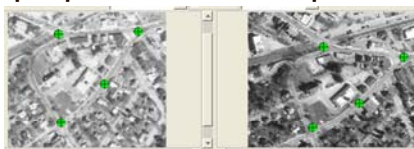
SF 17/06/2010 - 13

Alinhamento

- ▣ Estratégias
 - Alinhamento preliminar (rígido)
 - Refinamento do alinhamento
 - Informação mútua
 - Correlação cruzada

SF 17/06/2010 - 14

perspectiva orthophoto

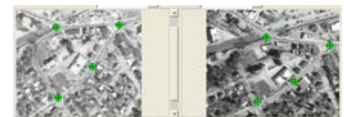


registrado

SF 17/06/2010 - 15

Alinhamento rígido

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$R = R_\alpha \cdot R_\beta \cdot R_\gamma$$

Solução: sistema de equações

- 1) Para cada par de pontos, Obter a equação
- 2) Resolver o sistema de equações

p		q	
x	y	x'	y'
12	30	15	42
80	32	95	45
14	90	10	94
60	40	65	60

SF 17/06/2010 - 16

Sistema de equações

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_{11}x_i + r_{12}y_i + t_x &= x'_i \quad i=1,P \\ r_{21}x_i + r_{22}y_i + t_y &= y'_i \quad i=1,P \end{aligned}$$

$$A\vec{b} = \vec{c}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: caso tenhamos 3 pares de pontos (P=3)

$$\begin{aligned} r_{11}x_1 + r_{12}y_1 + t_x + 0 + 0 + 0 &= x'_1 \\ r_{11}x_2 + r_{12}y_2 + t_x + 0 + 0 + 0 &= x'_2 \\ r_{11}x_3 + r_{12}y_3 + t_x + 0 + 0 + 0 &= x'_3 \\ 0 + 0 + 0 + r_{21}x_1 + r_{22}y_1 + t_y &= y'_1 \\ 0 + 0 + 0 + r_{21}x_2 + r_{22}y_2 + t_y &= y'_2 \\ 0 + 0 + 0 + r_{21}x_3 + r_{22}y_3 + t_y &= y'_3 \end{aligned}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ t_x \\ r_{21} \\ r_{22} \\ t_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = A^{-1} \cdot \vec{c}$$

Sistema de 6 equações com 6 incógnitas.
E se tivéssemos P=20 pares?

SF 17/06/2010 - 17

Solução pela pseudo-inversa

E se tivéssemos P=20 pares?

- Mesma abordagem, porém usando a pseudo-inversa (solução Least-square error)
- Seja então M equações com N incógnitas, M>N

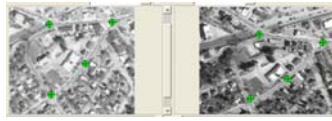
$$\begin{aligned} A_{M \times N} \cdot \vec{b}_{N \times 1} &= \vec{c}_{M \times 1} \\ \vec{b}_{N \times 1} &= A_{N \times M}^+ \cdot \vec{c}_{M \times 1} \\ A_{N \times M}^+ &: \text{pseudo-inversa (A)} \end{aligned}$$

SF 17/06/2010 - 18

Solução Procrustes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_x R_y R_z$$



Solução: algoritmo de Procrustes

- 1) cov(p,q)
- 2) SVD
- 3) Rotação
- 4) Translação

p		q	
x	y	x'	y'
12	30	15	42
80	32	95	45
14	90	10	94
60	40	65	60

SF 17/06/2010 - 19

Procrustes (caso 2D)

$$K = \text{cov} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right)$$

$$K = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(x'_i - \bar{x}')}{\sum_i (x_i - \bar{x})(x'_i - \bar{x}') + \sum_i (y_i - \bar{y})(y'_i - \bar{y}')} \begin{bmatrix} \sum_i (x_i - \bar{x})(x'_i - \bar{x}') & \sum_i (x_i - \bar{x})(y'_i - \bar{y}') \\ \sum_i (y_i - \bar{y})(x'_i - \bar{x}') & \sum_i (y_i - \bar{y})(y'_i - \bar{y}') \end{bmatrix}$$

O qual é equivalente a:

$$K = (P - \bar{P})^T (Q - \bar{Q})$$

$$P - \bar{P} = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} \\ x_2 - \bar{x} & y_2 - \bar{y} \\ \vdots & \vdots \\ x_n - \bar{x} & y_n - \bar{y} \end{bmatrix} \quad Q - \bar{Q} = \begin{bmatrix} x'_1 - \bar{x}' & y'_1 - \bar{y}' \\ x'_2 - \bar{x}' & y'_2 - \bar{y}' \\ \vdots & \vdots \\ x'_n - \bar{x}' & y'_n - \bar{y}' \end{bmatrix}$$

$$K = UDV^T \quad (\text{decomposição SVD})$$

$$R = VU^T$$

$$t = \bar{Q} - R\bar{P}$$

p		q	
x	y	x'	y'
12	30	15	42
80	32	95	45
14	90	10	94
60	40	65	60

SF 17/06/2010 - 20

Alinhamento Affine

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Shear, rotação, translação

Solução: otimização

$$\bar{p} = T\bar{q}$$

$$\min_T \sum_i \|r\bar{q}_i - \bar{p}_i\|^2$$

SF 17/06/2010 - 21

Alinh. Conteúdo: Informação mútua

$$H = \sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = - \sum_i p_i \log_2 p_i$$

entropia

$$H(A, B) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log_2 p(i, j)$$

entropia conjunta

$$I(A, B) = H(A) + H(B) - H(A, B)$$

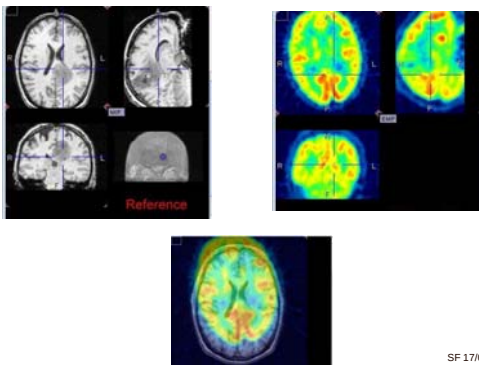
informação mútua

$$I_N(A, B) = \frac{H(A) + H(B)}{H(A, B)}$$

informação mútua normalizada

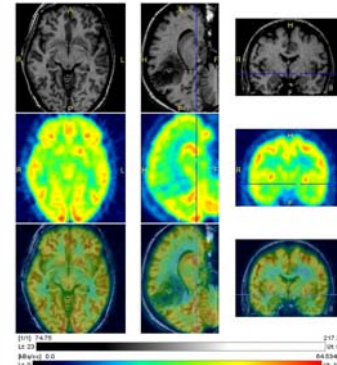
SF 17/06/2010 - 22

MR + PET sem registro



SF 17/06/2010 - 23

Registro/fusão de imagens:MR+PET

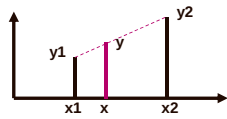


SF 17/06/2010 - 24

Transf. geom. => Interpolação



Frequentemente uma transformação geométrica exigirá também uma interpolação na intensidade



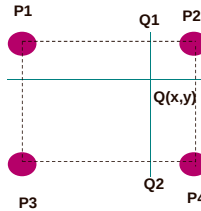
$$y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot (x - x_1)$$

6	8
2	4



SF 17/06/2010 - 25

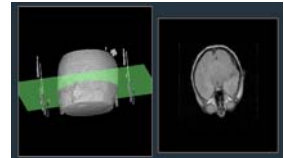
Interpolação bi-linear



$$I(Q1) = I_1 + \frac{(I_2 - I_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot (x - x_1)$$

$$I(Q2) = I_3 + \frac{(I_4 - I_3)}{(x_4 - x_3)} \cdot (x - x_3)$$

$$I(Q) = I(Q1) + \frac{I(Q2) - I(Q1)}{(y_2 - y_1)} \cdot (y - y_1)$$



SF 17/06/2010 - 26

Exemplos práticos (IJ)



- Rotação=> efeito com e sem interpolação
- slice
- interpolação

SF 17/06/2010 - 27